

3世代ニュートリノの非断熱遷移

首都大学東京大学院 理工学研究科 物理学専攻
山本 一成

平成 22 年 2 月 18 日

目次

本書の概要	3
第1章 太陽ニュートリノ	4
1.1 標準太陽模型	4
1.2 太陽ニュートリノ問題	9
1.2.1 塩素実験	9
1.2.2 神岡実験	11
1.2.3 ガリウム実験	13
第2章 大気ニュートリノ	14
2.1 大気ニュートリノ問題	15
第3章 ニュートリノ振動	17
3.1 ニュートリノの質量	17
3.2 2世代ニュートリノ振動	20
3.2.1 真空中での2世代ニュートリノ振動	21
3.2.2 大気ニュートリノ実験	23
3.2.3 物質中での2世代ニュートリノ振動	26
3.2.4 太陽ニュートリノ実験	32
3.3 2世代ニュートリノにおける非断熱遷移	35
3.3.1 Zener 近似	36
3.3.2 Landau 近似	40
3.3.3 高密度近似 (厳密解)	42
3.4 3世代ニュートリノ振動	50
3.4.1 3世代大気ニュートリノ	51
3.4.2 3世代太陽ニュートリノ	52
3.4.3 混合角 θ_{13} の探索	56
第4章 ICA の検証	57
4.1 解析の手法	58
4.2 数値計算結果	60
4.3 幾つかの考察過程	62
4.3.1 ニュートリノ-核子相互作用の効果	62

4.3.2	ICA の破れと共鳴域の重複との関連性	62
4.3.3	ICA の破れと $\theta_{13}, \Delta m_{13}^2$ との関連性	66
4.3.4	ニュートリノ-ニュートリノ相互作用の効果	70
4.3.5	非線形物理学の観点による解釈	70
第 5 章 結論として		71

本書の概要

本研究の目的は、「3世代ニュートリノの非断熱遷移における Independent Crossing Approximation(ICA)¹の検証」である。これはニュートリノ物理学の中でも「高エネルギーニュートリノ物理学」に触れる内容である。高密度の物質中における3世代ニュートリノの伝播には2度の共鳴現象²を伴う。その共鳴域では、断熱ないし非断熱遷移が生じる。それらが共に非断熱遷移であるとき、現状では各点の遷移が独立だと「近似」するICAが用いられる。この近似法の有効範囲などの議論は、ほとんど成されていない。しかし近い将来に高エネルギーニュートリノ物理学を議論する際、ICA適用の是非は確実に立ち上がってくる問題である。超新星ニュートリノを議論する際も、この問題に抵触する。本研究ではICAの精度を、これを用いた形式解と数値計算の結果から比較検証することで、高エネルギーニュートリノに対するICA適用の是非を確認した。

主題に入る前に、まずは後継のためにも「ニュートリノ振動論」の基礎について記しておいた。ニュートリノ物理学は、素粒子理論の中で独立した1分野を確立するに至るまで発展した理論である。その主翼を担う理論がニュートリノ振動であり、この理論の理解に本書が僅かでも役立つことを願う。ニュートリノ振動論が急速に発展したのは前世紀末、カミオカンデで超新星ニュートリノが観測されたときからである。一方で厳密には、ニュートリノ振動論の始まりは1968年にあるとも言える。何故ならニュートリノ振動を理解するためには、この理論が多大な貢献を果たした「太陽ニュートリノ問題」を理解しておく必要があるからだ。本書ではこの問題の提起を導入の起点とし、ニュートリノ振動によって太陽ニュートリノ問題が解決されるに至った過程を主軸としてニュートリノ振動の理論体系を紹介した。

またその際、現在では排除されている小混合角(SMA)解について別節を設けて記した。ICAでは2準位の非断熱遷移を扱うことになるので、この時点で非断熱遷移の解析法を紹介しておくことは有益であると考えた。

¹3準位以上の系における複数回の非断熱遷移を考える際の近似法。そのような系ではエネルギー固有値の交叉点が2つ以上あるが、個々の点を独立と近似してその近傍を2準位で解析する。詳細は後述。

²ニュートリノ振動における物質効果の詳細は後述。

第1章 太陽ニュートリノ

太陽ニュートリノ問題を指摘するために、本章ではまず太陽ニュートリノの生成過程を記す。太陽内における反応機構と、これに伴う生成物などについての理論は標準太陽模型 (SSM) と呼ばれる。これは惑星物理学の1分野で、ニュートリノ物理学とは別途に発展してきた分野である。

1.1 標準太陽模型

太陽は宇宙空間へ絶えずエネルギーを放出している。1920年代以前、そのエネルギー源は重力エネルギーにあると考えられていた。そのエネルギーは下式で見積もることができる。

$$E \cong G \frac{M_{\odot}}{R_{\odot}}$$

しかし放出エネルギーの源が全て重力由来のものと考えると、太陽の寿命は5,000万年程度でしかなくなってしまう。

後に太陽の構成元素が判明し、これを基に Eddington がそのエネルギー源を熱核融合説¹に求めた。1939年には Bethe により、SSMの基礎理論体系が構築された。

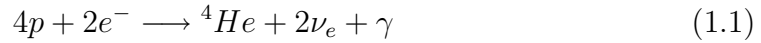
この理論によれば星の中心温度上昇は物質密度増加に伴い、2,000万 K ほどになると(第1世代の恒星を除いて) CNO cycle と呼ばれる反応が効くようになる。これは触媒反応のようなもので、 $10M_{\odot}$ の恒星では燃料切れによる寿命が数千万年程度しかない。一方で太陽中心における主反応は pp chain と呼ばれるもので、これによる寿命は100億年ほどになる。これで適切な太陽の寿命が得られたことになる。表(1.1)にSSMから得られる恒星の簡単な概要を記す。

表 1.1: 恒星の構成

質量	主反応	温度(密度)	寿命
$M \leq 0.8M_{\odot}$	なし	低い	長い
$M \cong M_{\odot}$	pp chain	^	^
$M \geq 10M_{\odot}$	CNO cycle	高い	短い

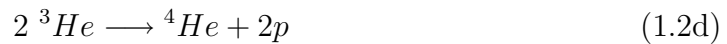
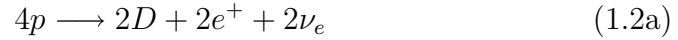
¹太陽中心の温度は1,000万 K 以上であり、この温度域では熱核融合反応が生じる。太陽の主成分は水素(陽子)であり、これが点火する。

太陽中心における熱核融合反応式は、



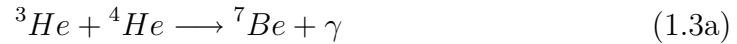
で表記される。これは陽子を燃料として、 α 線²が ν_e を付随して生成される過程と言える。主反応は pp chain であるが、その過程はさらに3枝に分類される。

その1つである ppI chain と呼ばれる反応は、



重水素を得る過程として式 (1.2b) もあるが、割合はとても小さい。式 (1.2d) で生じた陽子は、再び核融合の燃料になる。式 (1.2) をまとめると、式 (1.1) となる。

ppII chain の反応は式 (1.2c) から分岐し、



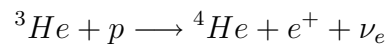
式 (1.3) も同様に、式 (1.1) に帰着できる。太陽中心での反応は、この2種の反応でほとんど占められている。

ppIII chain の反応は式 (1.3a) から分岐し、



式 (1.4) も同様に、式 (1.1) に帰着できる。スーパーカミオカンデ (SK) で見ている ν_e は、主にこの過程で生成されたものである。

pp chain の中間状態と言える ${}^3\text{He}$ を消費してしまう阻害反応として、



もあるが、割合はとても小さい。

太陽においても CNO cycle は作用するが、表 (1.1) で示唆したように割合はとて

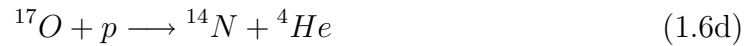
²これは原子核反応なので、 ${}^4\text{He}$ ではなく α 線を指す。

も小さい。CNO cycle は 4 枝に分岐する。CNO-1 cycle の反応は、



式 (1.5) も同様に、式 (1.1) に帰着できる。 ${}^{12}\text{C}$ は消費されず、陽子を燃焼する際の触媒として働く。この反応速度³は、pp chain の 10 倍以上である。

CNO-2 cycle の反応は式 (1.5e) から分岐し、



式 (1.6d) 以降は式 (1.5d) に接続し、円環は閉じる。式 (1.6) も同様に、式 (1.1) に帰着できる。

CNO-3 cycle の反応は式 (1.6c) から分岐し、



式 (1.7c) 以降は式 (1.6a) に接続し、円環は閉じる。式 (1.7) も同様に、式 (1.1) に帰着できる。

CNO-4 cycle の反応は式 (1.7b) から分岐し、



この分岐路内では、 ν_e は生成されない。式 (1.8b) 以降は式 (1.6b) に接続し、円環は閉じる。式 (1.8) も同様に、式 (1.1) に帰着できる。

³一連の過程の律速段階はもちろん、弱い相互作用によるものである。

以上が太陽中での反応過程である。崩壊反応⁴には ν_e の生成が付随する。pp chainについては分岐とその割合を図(1.1)に記した[1]。

ここで着目すべきは当然「 ν_e 」であり、その生成源となる各反応過程ごとに名称が付与されている。生成される ν_e のエネルギーは β^- 崩壊では幅のある分布を、ECでは電子軌道ごとの特性エネルギーピークをもつ。各反応名と ν_e のエネルギーは表(1.2)の通りである[2]。図(1.1)はJ.N.Bahcallらのシミュレーション⁵による予言である。放出される ν_e の流量についても計算されていて、図(1.2)の通りである[3]。以上が、SSMの概要である。

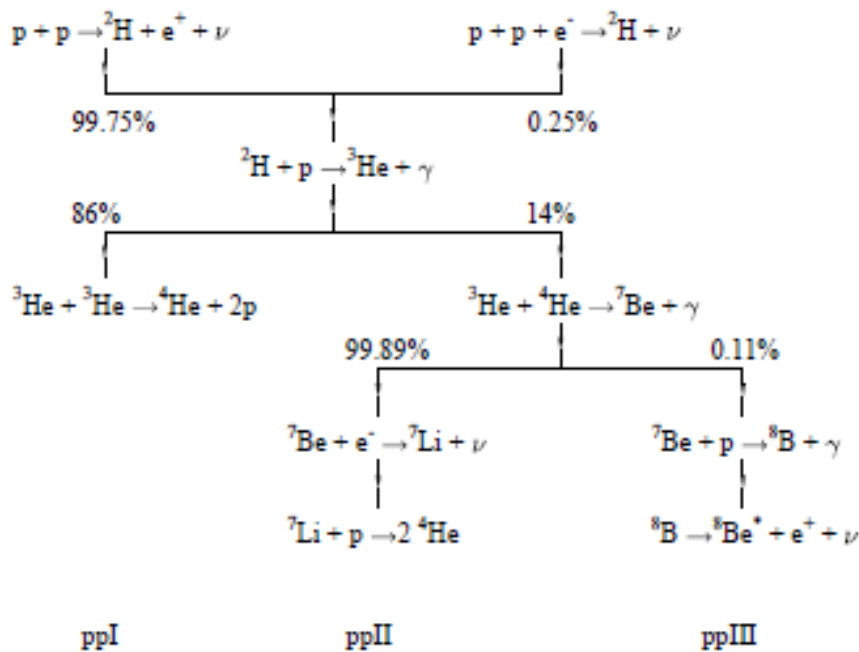


図 1.1: pp chain の分岐率

⁴ここでは、 β^- 崩壊と電子捕獲 (EC) がある。

⁵幾つか模型があり、それによる不定性はある。

表 1.2: 太陽ニュートリノの名称とエネルギー ($\langle E_\nu \rangle$ は平均エネルギー)

名称	反応式	エネルギー (MeV)
pp	(1.2a)	$\langle 0.26 \rangle$
${}^7\text{Be}$	(1.3b)	0.86 or 0.38
${}^8\text{B}$	(1.4b)	$\langle 7.2 \rangle$
pep	(1.2b)	1.44

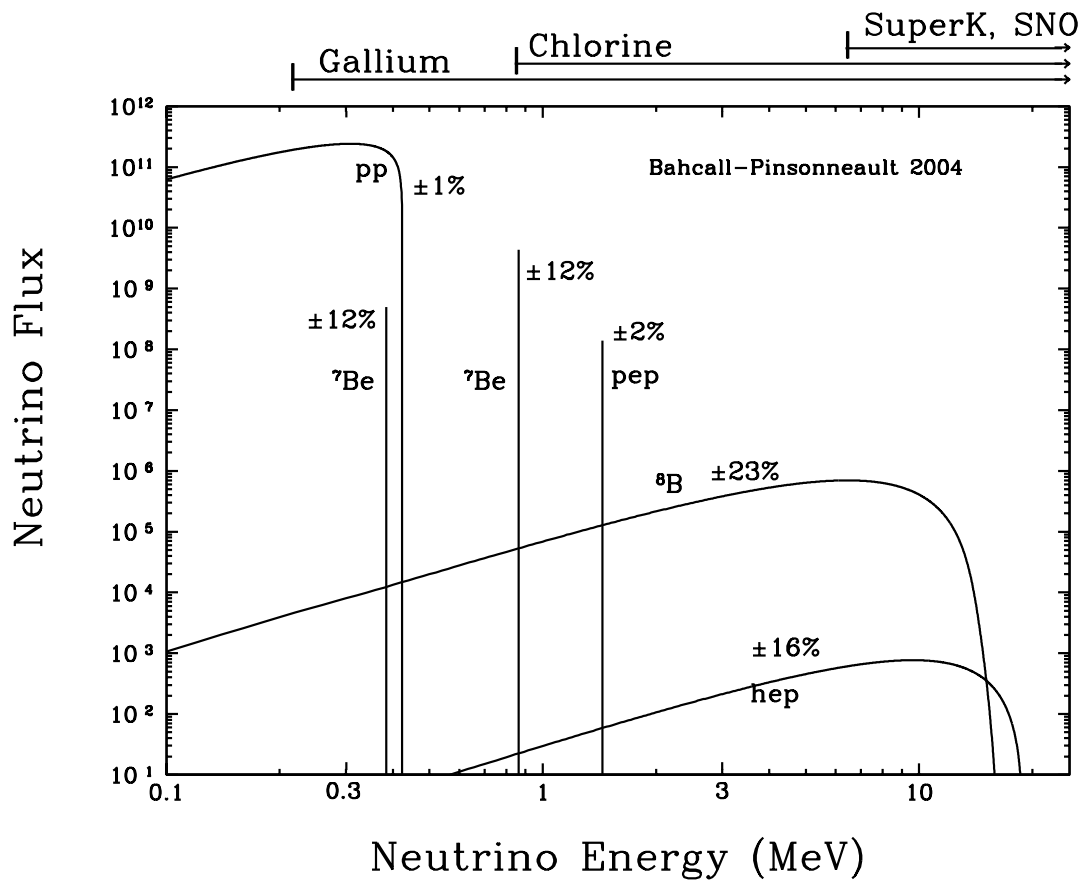


図 1.2: 太陽ニュートリノの流量

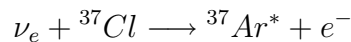
1.2 太陽ニュートリノ問題

太陽ニュートリノ問題とは、SSMにおける ν_e の予測量に対して観測量が明らかに少ないという問題である。ここでは3実験を例に挙げ、確かに ν_e が欠損している事実を記す。

1.2.1 塩素実験

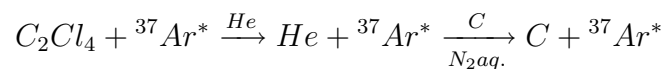
SSMの検証方法として用いられたことが、ニュートリノ実験の始まりであった。ニュートリノ検出器を用いたSSMの検証実験を立案したのはDavisであった[4]。1950年代から試験的に実験が始まり、1968年には検証結果が発表された。この実験の功績に対しては、後にノーベル物理学賞が与えられた。

Davisがニュートリノ捕獲に用いたのは、塩素(^{37}Cl)であった。利用した反応は、



で、 $E_\nu \geq 0.81\text{MeV}$ のニュートリノが捕獲できる⁶。対象となるのは、 ${}^7\text{Be}$, pep, hepそして ${}^8\text{B}$ ニュートリノである。 ${}^{37}\text{Ar}^*$ の半減期は35日で、ECにより ${}^{37}\text{Cl}$ に戻る。この際の特性X線⁷は、2.82keVである。 ν_e を観測しようという初の挑戦は、BNLやRHICを有するBrookhavenでまず試験的に行われた。ここでは、原子炉ニュートリノを CCl_4 で捕獲した⁸。その結果は1955年に発表されている。

太陽ニュートリノ観測実験は、South Dakota州のHomestake金鉱で行われた。試験的な実験では3.9tの CCl_4 を用いたが、本格的な実験では規模がさらに大きく地下1,600m(標高4,200m)地点で615tもの C_2Cl_4 をタンクに貯めた⁹。計測すべきは ${}^{37}\text{Ar}^*$ のECによる特性X線で、



の濾過により ${}^{37}\text{Ar}^*$ を含んだ活性炭を比例計数管に配置した。 ${}^{37}\text{Ar}^*$ の抽出はその生成と崩壊が釣り合う1か月ごとに行われた。

実験には雑音も多く存在し、その除去目的で比例計数管の補足パルス反応時間測定が導入された。X線による管内ガスのイオン化を測定する訳だが、2.82keVのX線によるパルスは管口径の3–5mmよりも十分短く0.1mm程度である。つまり、背景パルスに比べて電子励起時間が短い。これによって対象の選別が可能となる。さらに雑音宇宙線の主成分である μ 粒子を止めるために地中にタンクを配置し、

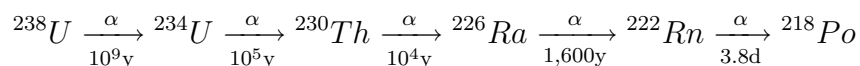
⁶もちろん、1つの ${}^{37}\text{Ar}^*$ につき1つの ν_e と勘定する。

⁷正確には、この特性X線がさらに原子周りの電子を外へ弾き出す。この電子は「Auger電子」と呼ばれ、実験ではこれを観測した。

⁸当時はドライクリーニング溶剤として用いられており、安価で大量入手が可能だった。

⁹これもドライクリーニング溶剤である。試験的な実験に用いた CCl_4 は後に発癌性を指摘された。

α 線を止めるためにタンクの周囲は水で覆われた。地中の α 線はほぼ ^{222}Rn に由来するもので、



の崩壊過程から生じる。一方 $^{37}\text{Ar}^*$ の抽出率も重要な値で、これは95%とされた¹⁰。1970–1994年の間に $^{37}\text{Ar}^*$ は、

$$2,200 \text{ 個} \xrightarrow{\text{抽出}} 1,997 \text{ 個} \xrightarrow{\text{勘定}} 875 \text{ 個} \rightarrow \begin{cases} 776 \text{ 個} & (\text{太陽ニュートリノ起源}) \\ 109 \text{ 個} & (\text{背景雑音}) \end{cases}$$

だけ測定された。ニュートリノ捕獲率は、

$$2.56 \pm 0.16 \pm 0.16 \text{ SNU}^{11}$$

と見積もられた。一方SSMでは、

$$9.3^{+1.2}_{-1.4} \text{ SNU}$$

を与える[5]。理論値よりも観測値の方が遥かに少なく、この決定的な差が「太陽ニュートリノ問題」の提起である。これは、SSMか素粒子標準模型(SM)に大きな変更を迫るものだった。図(1.3)に $^{37}\text{Ar}^*$ 生成の変遷を記す。データの平均値は0.4であるが、SSMでは1.4を予言していた[6]。

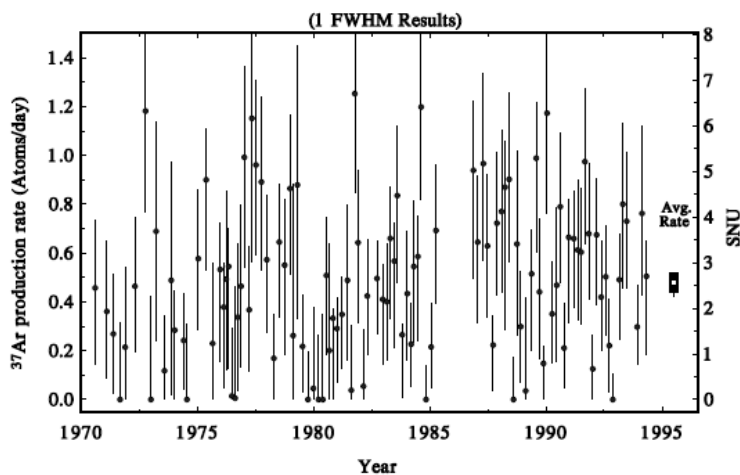


図 1.3: 1日当たりの $^{37}\text{Ar}^*$ 生成数

¹⁰特性 X 線ではなく、Auger 電子が放出される割合である。

¹¹Solar Neutrino Unit の略。1 SNU=1 capture/sec/ 10^{36} atoms で定義されている。

1.2.2 神岡実験

SMの拡張として、量子色力学(QCD)とGlashow-Weinberg-Salam(GWS)理論¹²を統合したGrand Unified Theory(GUT)¹³がある。この理論の下では陽子崩壊が予言される[7]。優勢な崩壊モードは、

$$p \longrightarrow \pi^0 + e^+$$

である¹⁴。陽子の寿命は、

$$\tau_p \doteq 4 \times 10^{29 \pm 0.7} \text{yr}$$

と計算された。 π^0 はさらに崩壊し、水中では2輪のチェレンコフ・リング¹⁵を生じさせる。カミオカンデの当初の目的は、この反応の観測であった。

試料として2,140tの水タンクを用意し、これを岐阜県神岡鉱山地下1,000m地点に埋めた。地中に埋めたことで、 μ 粒子による雑音は1/100,000にまで除去された。また高精度な光電子増倍管(PMT)¹⁶の開発にも着手し、これを大型化することでエネルギー閾値を $E_\nu \geq 30 \text{MeV}$ にまで下げ、宇宙線ニュートリノの観測器としても利用できるようにした。カミオカンデIに設置されたPMTは1,100個である。

1985年当時、陽子崩壊は未だ検出されていなかった¹⁷。そこで神岡グループは、カミオカンデを太陽ニュートリノ検出器へ転用することを決定した。ここでも問題となったのが雑音の除去で、 μ 粒子を識別するために外殻検出器を設置し、そこへ水を注入することで中性子、 γ 線の除去を行った。また、スチールによるタンクの気密化とバッファータンクの空気清浄により、試料へのRn混入を防いだ。さらに、試料の超純水化を行うことで水中のU、Raを除去した。

観測すべきは、

$$\nu_x + e^- \longrightarrow \nu_x + e^-$$

の弾性散乱(ES)によるチェレンコフ光である($x = e, \mu, \tau$)。これを大気ニュートリノによる、

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_e + p &\longrightarrow n + e^+ \\ \nu_e + {}^{16}\text{O} &\longrightarrow {}^{16}\text{F}^* + e^- \end{aligned}$$

¹²電弱統一理論のこと。

¹³大統一理論のこと。

¹⁴解放されるエネルギーはもちろん0.938GeVである。

¹⁵ $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の反応が主。

¹⁶チェレンコフ光観測装置のこと。

¹⁷実験結果から $\tau_p \geq 1.6 \times 10^{33} \text{yr}$ とされ、これを説明するにはSUSY-GUTへの拡張を要する。

などの反応と識別するために、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{いつ} \\ \text{どこから} \\ \text{どれだけのエネルギーで} \end{array} \right.$$

という情報¹⁸を記録する電子回路をPMTに接続した。これらの情報は塩素実験に代表される「放射化学実験」では得られなかったものである。太陽ニュートリノによる反応のデータ抽出はコンピュータ・プログラムで行い、誤差を見積もられるようにした。これらの巧みな技術によりエネルギー閾値は、 $E_\nu \geq 8\text{MeV}$ まで下がった。こうして新しく生まれ変わったカミオカンデIIは、1986年12月25日から稼働を再開した。

現在では、50,000tもの超純水と直径50cmもの大型PMTを11,146本用いたSKが稼働している。エネルギー閾値は、

$$E_\nu \geq 5\text{MeV}$$

まで下がり、2001年までにイベント数は22,000を超えている。観測値は、

$$N_\nu = 2.44 \pm 0.05(\text{stat})_{-0.07}^{+0.09}(\text{sys}) \times 10^6/\text{cm}^2/\text{s}$$

$$N(\text{ex})/N(\text{SSM}) = 0.474_{-0.009-0.014}^{+0.010+0.017}$$

であり、ここでも太陽ニュートリノ問題が再認できる [8]。図 (1.4) は2001年のものである [9]。

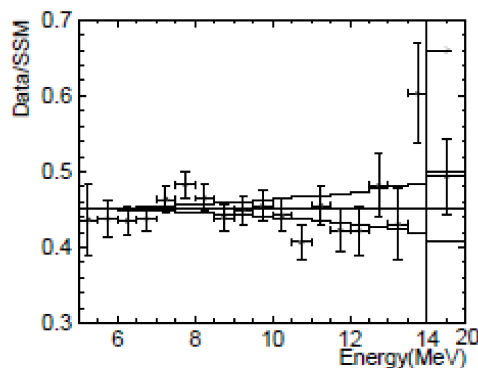


図 1.4: SK における太陽ニュートリノの流量 (SSM と観測データの比)

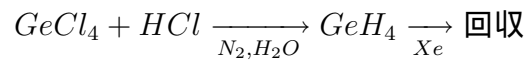
¹⁸チェレンコフ・リングから反応種類を、反跳電子方向からニュートリノ飛来方向を、光量からエネルギーを割り出すことができる。

1.2.3 ガリウム実験

^{37}Cl に対し ^{71}Ga は $E_\nu \geq 0.233\text{MeV}$ で反応するので、図 (1.2) における太陽の主反応である pp chain を測定できるという点で他の手法よりも優位である。この実験は塩素実験と同様の手法で利用する反応は、



である。また、励起状態の半減期は 11.43 日である。試料は、



によって回収した。 ^{71}Ge も EC によって ^{71}Ga に戻る。特性 X 線は K-ピークと L-ピークに分岐し、エネルギーはそれぞれ 10.4keV と 1.2keV である [10]。ロシアの SAGE では 50t の、イタリアの GALLEX (後に GNO と改名) では 30t の ^{71}Ga を用いて実験が行われた。3 実験の結果の平均は、

$$66.1 \pm 3.1 \text{ SNU}$$

となっている。図 (1.5) は SAGE のデータである [10]。SSM では、

$$126.08 \text{ SNU}$$

が予言されているので、ここでも実験結果が理論値を大きく下回っている [11]。

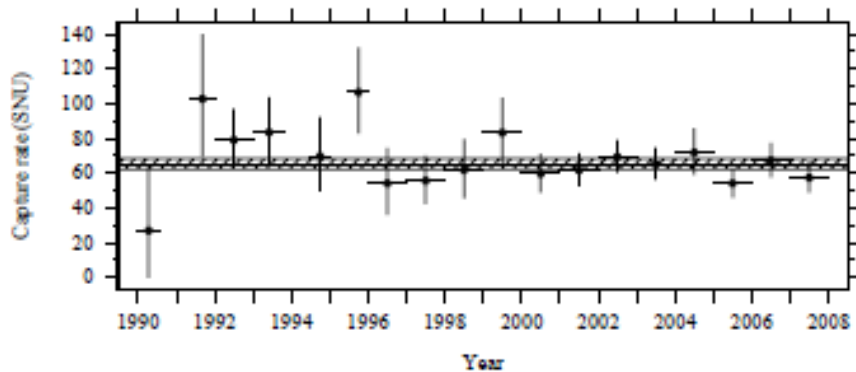


図 1.5: ^{71}Ge 生成の変遷

第2章 大気ニュートリノ

太陽ニュートリノと同じく、大気ニュートリノにも予言値に対する観測値の欠損が確認されている。本章では、この「大気ニュートリノ問題」と呼ばれる現象を簡単に紹介する。

高いエネルギーの陽子（1次宇宙線）が大気と反応すると中間子が生成される。以降は空気シャワーの発達と共に、大量の中間子が生成される。この中間子が崩壊すると ν_μ や ν_e が生成される。これが大気ニュートリノである。シャワー中の主たる中間子は π や K であり、 $E_\nu \leq 3\text{GeV}$ における大気ニュートリノの生成に関する崩壊反応は式 (2.1) の通りである [12]。

$$K^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) \quad (0.6354) \quad (2.1a)$$

$$K^\pm \longrightarrow \pi^\pm + \pi^0 \quad (0.2068) \quad (2.1b)$$

$$K_S^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (0.6920) \quad (2.1c)$$

$$K_L^0 \longrightarrow \pi^\pm + e^\mp + \bar{\nu}_e (\nu_e) \quad (0.4055) \quad (2.1d)$$

$$K_L^0 \longrightarrow \pi^\pm + \mu^\mp + \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu) \quad (0.2704) \quad (2.1e)$$

$$K_L^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad (0.1254) \quad (2.1f)$$

$$\pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) \quad (0.9998770) \quad (2.1g)$$

$$\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu) + \nu_e (\bar{\nu}_e) \quad (\simeq 1) \quad (2.1h)$$

括弧内の数字は分岐比である。 μ^\pm の地表到達量から1次宇宙線量を逆算し、ニュートリノ生成量も計算できる [13]。その誤差は30%にも及ぶが、

$$\Omega = (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu) / (\nu_e + \bar{\nu}_e)$$

については誤差が相殺され、10%以下に抑えられる。単純に式 (2.1g) と (2.1h) だけを見ると、

$$\Omega \simeq 2$$

である。

2.1 大気ニュートリノ問題

データとモンテカルロ計算との比を

$$R \equiv \Omega_{DAT}/\Omega_{MC}$$

とした観測結果は表 (2.1) の通りである [14]。大気ニュートリノにも太陽ニュートリノと同じく、予言量に対して観測量が下回るという問題が確認できる。

中でも、大気ニュートリノ観測実験への寄与が大きいのはSKである。SKではニュートリノの「飛来方向」の情報を持っているため、天頂角分布を明示することができる。このとき $E_\nu \geq 0.5\text{GeV}$ では地球磁場の影響を補正ないし無視でき、ニュートリノが磁極に集中することはないと言える。ニュートリノは地球に対して透明¹なので、1次宇宙線の飛来方向に依る大気層の厚さを考慮しても、大気ニュートリノの観測量は上下対称となるはずである。観測結果は図 (2.1)、(2.2) の通りである [15]。 ν_μ の事象が非対称分布となっており、地球の裏側から来る飛来距離の長いものほど理論値を下回っている。

表 2.1: 各実験の R 値

Experiment	Exposure ($kt \cdot \text{yr}$)	R
Kamiokande	6.18	$0.60 \pm 0.06 \pm 0.05$ (rings)
		0.61 ± 0.07 (decays)
IMB	7.7	$0.54 \pm 0.05 \pm 0.12$ (rings)
		0.65 ± 0.05 (decays)
Fréjus	1.56	0.87 ± 0.21
NUSEX	0.40	0.99 ± 0.40
Soudan 2	1	$0.69 \pm 0.19 \pm 0.09^*)$

¹ニュートリノの散乱断面積はとても小さい。水中を通してニュートリノ流量を半分にするためには、40 光年の厚さの水が必要なほど。

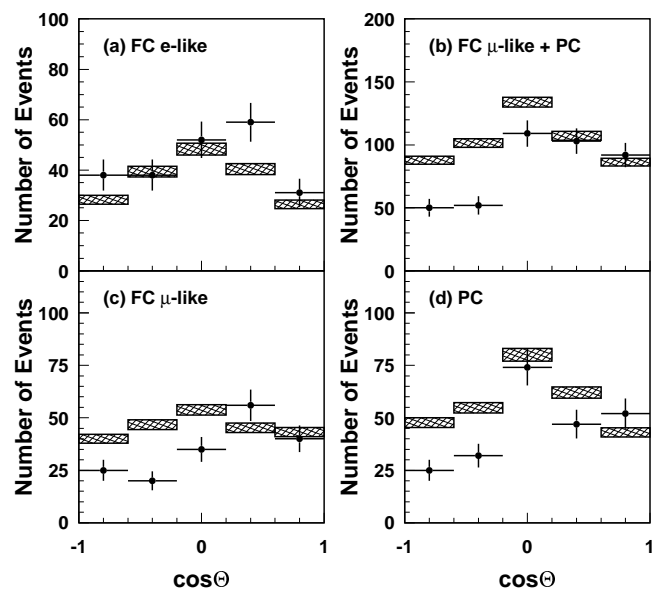


図 2.1: ν_μ の天頂角分布 (各事象のイベント数)

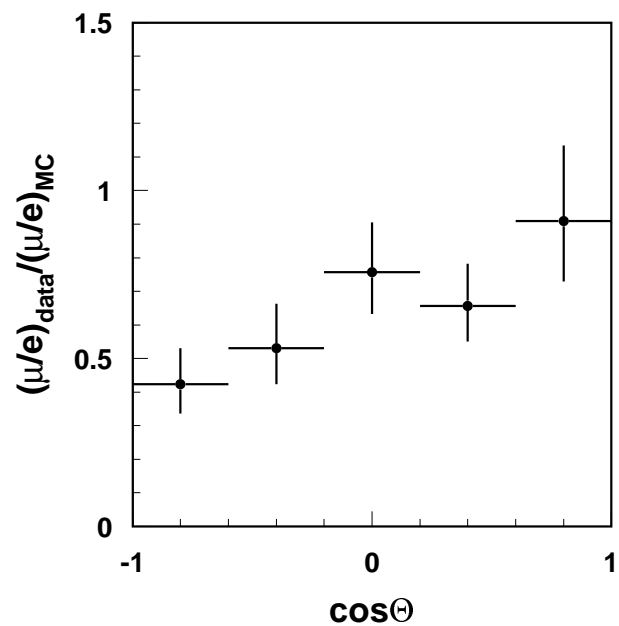


図 2.2: 大気ニュートリノの天頂角分布 (R 値)

第3章 ニュートリノ振動

ニュートリノ振動論の創世期を述べるには、SK稼働期よりも少し歴史を遡る必要がある。始まりは1987年2月23日、曙光が差した地は神岡であった。運命を司る自然の女神の力も働いたのか、この偉業が達成されたのは「ニュートリノ望遠鏡」としての機能が追加されたカミオカンデⅡが稼働を再開して、僅か2か月後であった。ここで得られた観測結果の功績から、ノーベル物理学賞が与えられた。

本章では、まず神岡における歴史的発見¹を述べる。次にニュートリノ振動の定式化を完遂させ、太陽・大気ニュートリノ問題がニュートリノ振動によって見事に解決された過程を記す。

3.1 ニュートリノの質量

1987年2月25日、Bludmanから神岡グループ宛てに1通のFAXが届いた。それは同23日、大マゼラン星雲に超新星SN1987Aが出現したという内容だった。神岡グループは直ちに、データ解析²に取り掛かった。

$$\begin{aligned}\langle E_{\nu_e} \rangle &\simeq 10 \text{ MeV} \\ \langle E_{\bar{\nu}_e} \rangle &\simeq 15 \text{ MeV} \\ \langle E_x \rangle &\simeq 20 \text{ MeV} \quad (x \neq \nu_e, \bar{\nu}_e)\end{aligned}$$

とされる超新星ニュートリノ³には、太陽ニュートリノのために組まれたシステムをそのまま流用した。そのエネルギーの高さと測定時間の短さから、背景雑音は大幅に軽減できた。

観測に有利な反応は、

$$\sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n) = 9.77 \times 10^{-42} (E_\nu/10\text{MeV})^2 \text{ cm}^2 \quad (3.1a)$$

$$\sigma(\nu_e n \rightarrow e^- p) = 2.2 \times 10^{-42} (E_\nu/10\text{MeV})^2 \text{ cm}^2 \quad (3.1b)$$

$$\sigma(\nu_e e \rightarrow \nu_e e) = 0.933 \times 10^{-43} (E_\nu/10\text{MeV})^2 \text{ cm}^2 \quad (3.1c)$$

である [16]。式 (3.1b) の反応は水タンクであるカミオカンデでは観測できない。式 (3.1c) の反応量は少ないものの、飛来方向が特定できる点で優位である。式 (3.1a) の反応では飛来方向の情報が失われるが、太陽ニュートリノとの区別は容易である。

¹ $m_\nu \neq 0$ の可能性のこと。

²当時は磁気テープにデータが記録されていた。

³定性的な超新星ニュートリノ生成理論はあるが、ここでは割愛する。

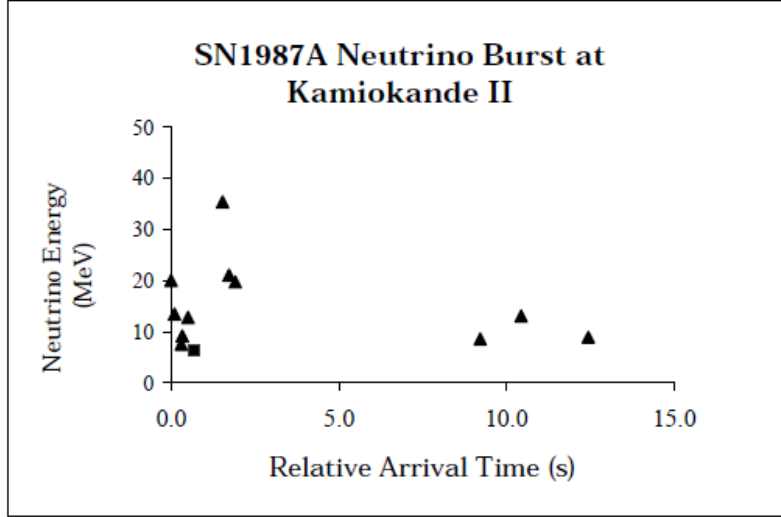


図 3.1: SN1987A のデータ

観測データを図 (3.1) に記す [17]。図中の 11 例が超新星ニュートリノによるものである。SN1987A の観測は、肉眼観測と並行してニュートリノが観測できたという点で画期的な現象である。これにより、幾つかの太陽ニュートリノ模型は除外された。まず超新星ニュートリノを観測したこと自体から、ニュートリノの寿命に制限がつく。

$$\tau_\nu \left(\frac{E_\nu}{10\text{MeV}} \right) \geq 5 \times 10^5 \text{sec} \left(\frac{m_\nu}{1\text{eV}} \right)$$

となり、太陽ニュートリノ崩壊モデルは除外される [2]。また、ニュートリノの電荷にも制限がつく。 $Q_\nu \times e$ のニュートリノは銀河磁場⁴($B \sim 10^{-6}\text{G}$) によって曲げられ、地球への到達時間が遅れる。観測結果から、

$$Q_\nu < 3 \times 10^{-17} \left(\frac{10^{-6}\text{G}}{B} \right) \left(\frac{\text{kpc}}{L} \right)$$

となり、ニュートリノ電荷による太陽ニュートリノ欠損モデルは除外される [18]。さらに、ニュートリノの磁気能率にも制限がつく。 $\kappa\mu_B$ の磁気相互作用があると、超新星内で 100–200MeV の ν_R が生成される。これがほぼ相互作用をせずにエネルギーを持ち出してしまうため、 ν_L のルミノシティが小さくなる。さらにこれが銀河磁場との相互作用で ν_L に戻るので、100–200MeV の超新星ニュートリノが観測されるはずである。これは観測されていないので、

$$|\kappa| < 10^{-12}$$

となる [19]。この制限から、ニュートリノ磁気能率による太陽ニュートリノ欠損モデルは除外される。

⁴ちなみに地球地場は $B_E \sim 0.24\text{--}0.66\text{ G}$ である。

最大の功績となったのは、ニュートリノ質量の観測である。 $m_\nu \neq 0$ ならば速度が、

$$v_\nu \doteq 1 - \frac{m_\nu^2}{2E_\nu^2}$$

と最高速度（光速）よりも遅くなる。つまりニュートリノ観測時刻が超新星爆発の観測時刻よりも、

$$\Delta t = 2.57 \text{ sec} \times \left(\frac{L}{50 \text{ kpc}} \right) \left(\frac{10 \text{ MeV}}{E_\nu} \right)^2 \left(\frac{m_\nu}{10 \text{ eV}} \right) \quad (3.2)$$

だけ遅くなる。但しカミオカンデにおいては時刻に1分ほどの不定性があり⁵、式(3.2)からの制限は掛けにくい。計るべきは E_1, E_2 間の時間差であり、

$$\Delta t_{12} = 2.57 \text{ sec} \times \left(\frac{L}{50 \text{ kpc}} \right) \left(\frac{m_\nu}{10 \text{ eV}} \right) \left[\left(\frac{10 \text{ MeV}}{E_1} \right)^2 - \left(\frac{10 \text{ MeV}}{E_2} \right)^2 \right]$$

から与えられる。観測結果から、

$$m_\nu < 25 \text{ eV}$$

と見積もられた [20]。

ちなみに現在では宇宙論からの制限が強く、WMAP や SDSS などの観測から、

$$\sum_i m_i < 1 \text{ eV}$$

と見積もられている [12]。

⁵観測目的が陽子崩壊にあったため、時刻の精度を求めていなかったことに起因する。

3.2 2世代ニュートリノ振動

SKによるニュートリノ質量の発見は、SSMではなくSMに変更を迫るものであった。 $m_\nu = 0$ が否定された以上、Dirac質量に対しては未だ観測されていない ν_R の導入が要請される。

$m \neq 0$ による振動現象の問題はストレンジネス振動に端を発し、Cabibbo回転で説明される [24]。Cabibboは弱い相互作用を行う際の粒子状態を示す相互作用固有状態が、質量固有状態の混合であると考えた。

Higgs機構により粒子は質量行列としての質量を獲得するが、これを対角化するには双ユニタリー変換を要する。つまり質量項は、

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}'_L M_f \Psi'_R &= (\bar{\Psi}'_L S)(S^\dagger M_f T)(T^\dagger \Psi'_R) \\ &= \bar{\Psi}'_L \text{diag}(m_i) \Psi_R\end{aligned}$$

荷電カレントは、

$$\begin{aligned}J_\mu^+ &= \bar{u}'_f \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d'_f \\ &= \bar{u}_f \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (S_u^\dagger S_d) d_f \\ &= \bar{u}_f \gamma_\mu (1 - \gamma_5) U_{\text{CKM}} d_f\end{aligned}$$

これより、

$$d''_f = U_{\text{CKM}} d_f$$

と書ける。(U_{CKM} は Cabibbo–Kobayashi–Maskawa 行列と呼ばれる [30]。)

n 世代の複素行列は $2n^2$ の実パラメータをもつが、 U_{CKM} のユニタリー条件からパラメータを n^2 に落とすことができる。さらに位相の吸収によって $2n - 1$ のパラメータを落とすことができる。つまり n 世代における複素行列の独立なパラメータの数は、

$$2n^2 - n^2 - (2n - 1) = n(n - 1)/2 + (n - 1)(n - 2)/2 \quad (3.3)$$

となる。式 (3.3) の右辺が残ったパラメータだが、第1項は回転角として表現できる因子で混合角と呼ばれる。第2項は回転角とは独立に残る複素位相⁶である。 $n = 2$ であれば「1 + 0」、 $n = 3$ であれば「3 + 1」となる。

これと同様のことがニュートリノにも適用でき、 $m_\nu \neq 0$ ならば混合角による振動を観測することができる。

⁶これがCP位相である。 K^0 での実験後は、よりCPの破れが顕著な B^0 を用いた実験がBelleなどで行われている。現在では、 B^0 と B^\pm でCPの破れに若干の差異があることも確認されている。

3.2.1 真空中での2世代ニュートリノ振動

ニュートリノの質量固有状態では $\nu_i(t) = \langle \nu_i(t) | \Psi(t) \rangle$ を用いて⁷、

$$i \frac{d}{dt} \nu_i(t) = H_i \nu_i(t) = E_i \nu_i(t) \quad (i = 1, 2) \quad (3.4)$$

H_i の表記は質量固有状態のハミルトニアンであることを意図している。もちろん超相対論的な運動なので、

$$\begin{aligned} E_i &= \sqrt{p^2 + m_i^2} \\ &\doteq p + m_i^2/2p \end{aligned} \quad (3.5)$$

である。式 (3.4) の時間発展は、

$$\nu_i(t) = e^{-iE_i t} \nu_i(0) \quad (3.6)$$

質量固有状態と相互作用固有状態は一致しないので、Hilbert 空間における基底変換を要する。

$$\nu_f(t) = U_{\text{MNS}} \nu_i(t) \quad (f = e, \mu) \quad (3.7)$$

ここで $\nu_f(t) = \langle \nu_f | \Psi(t) \rangle$ である。回転行列は、

$$U_{\text{MNS}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である ($U = U_{\text{MNS}}$ は Maki–Nakagawa–Sakata 行列と呼ばれる [31]。以降は $U = U_{\text{MNS}}$ と記述する)。すなわち混合が起こり、式 (3.3) よりパラメータは混合角 θ のただ1つである。式 (3.6)、式 (3.7) より、

$$\nu_f(t) = U \text{diag}(e^{-iE_i t}) U^\dagger \nu_f(0) \quad (3.8)$$

生存確率は $t = L$ 、 $p \sim E$ として式 (3.5) を用いると、

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e; L) &= |\nu_e(L)|^2 \\ &= (e^{iE_1 L} \cos^2 \theta + e^{iE_2 L} \sin^2 \theta)(e^{-iE_1 L} \cos^2 \theta + e^{-iE_2 L} \sin^2 \theta) \\ &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos(E_1 - E_2)L \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta E}{2} L \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E} L \quad (\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

これが、 $\Delta m^2 \neq 0$ のときに初めて生じるニュートリノ振動を記述する式である。 $\sin^2 2\theta$ の関数であることから、測定結果に対して θ は8つの解をもつ。通常は $0 \leq \theta \leq \pi/4$ の範囲で議論する。同様の理由から、 Δm^2 の符号も決定できない。

⁷基底と波動関数の関係を明示したのは、後述の非断熱遷移論のためである。

ここでは、振動位相となる物理量には質量次元を採用している。次元を整理すると、

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; L) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2(1.27 \cdot \Delta m^2 \cdot L/E) \left(\frac{\Delta m^2}{\text{eV}^2} \right) \left(\frac{L}{\text{m}} \right) \left(\frac{\text{eV}}{E} \right)$$

また振動が顕著となるのは、位相のオーダーが1のときである。つまり L, E の組み合わせ次第では、かなり小さい Δm^2 の探索が可能となる。探索可能領域を表 (3.1) に示す [2]。

表 3.1: Δm^2 の探索領域の目安

ニュートリノ源	エネルギー (MeV)	距離 (m)	Δm^2 (eV ²)
加速器	10^3 – 10^5	10^2 – 10^6	10^{-3} – 10^2
原子炉	1–2	~ 20	10^{-2} – 10^{-1}
		10^3	10^{-4} – 10^{-3}
		10^5	10^{-6} – 10^{-5}
宇宙線	$\sim 10^3$	$\sim 10^7$	$\sim 10^{-4}$
太陽	~ 1	$\sim 10^{11}$	$\sim 10^{-11}$

3.2.2 大気ニュートリノ実験

もちろん、大気ニュートリノ問題を解決したのはニュートリノ振動論である⁸。ニュートリノ振動を加味したSKのデータを図(3.2)に示す[1]。飛来方向が地球の裏側であるほどニュートリノが欠損して見えたのは、ニュートリノ振動に由来するものであった。詳細は後述に託すが、SKの精密な3世代解析や原子炉実験から $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ の振動チャンネルは否定されている[22]。すなわち大気ニュートリノの振動チャンネルは、 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ である。

さらに本小節で、振動パラメータを決定する上で大きな貢献を果たした2実験について加えて紹介しておく。

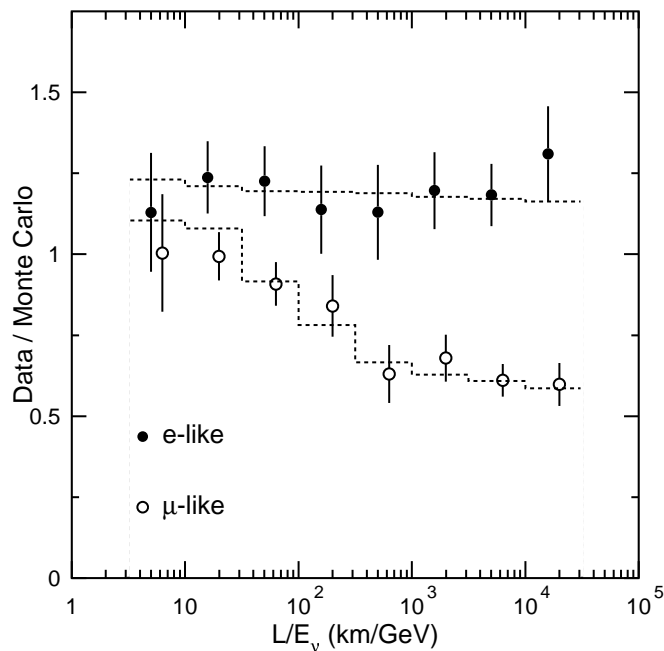


図 3.2: ニュートリノ振動を加味した大気ニュートリノの解析

⁸実は大気ニュートリノ問題発見の際、すでに理論体系が完成していた。問題となったのは振動チャンネルだけである。

K2K 実験

「the KEK to Kamioka long-baseline neutrino oscillation experiment」の略称であるこの実験は、高エネルギー加速器研究機構（KEK）の陽子シンクロトロンで人工的に生成した ν_μ のビーム⁹を約 250km 離れた SK で観測する「加速器ニュートリノ実験」である。

加速させた陽子をアルミニウムに衝突させ、生じた π^+ を集束させた上でその崩壊の際に生じる ν_μ ビームを SK へ送った。加速器を用いているので、仮想 1 次宇宙線となる陽子のエネルギーを固定できる ($E_p = 12\text{GeV}$) という利点がある。さらに ν_μ が作られた時刻、生成点から観測点までの距離も詳細に知ることができる。

陽子標的の下流 300m の位置には、1,000t の純水を蓄えた小型 SK 検出器やシンチレーションファイバー飛跡検出器、鉛ガラスカロリメータ、さらには鉄-ドリフトチェンバーサンドイッチ型ミュオン飛跡検出器を組み合わせた検出器（Near Detector、略称は ND）が設置された。これを用いてビームの方向や安定性を監視し、振動前におけるニュートリノの流量やエネルギー分布¹⁰を観測した。

つまり K2K 実験では人工的にビームを制御することで、従来の大気ニュートリノ実験で欠点となっていたニュートリノ源に対する不定性を排除することに成功したのである。

ビーム生成機構の概略を図 (3.3) に示す [42]。

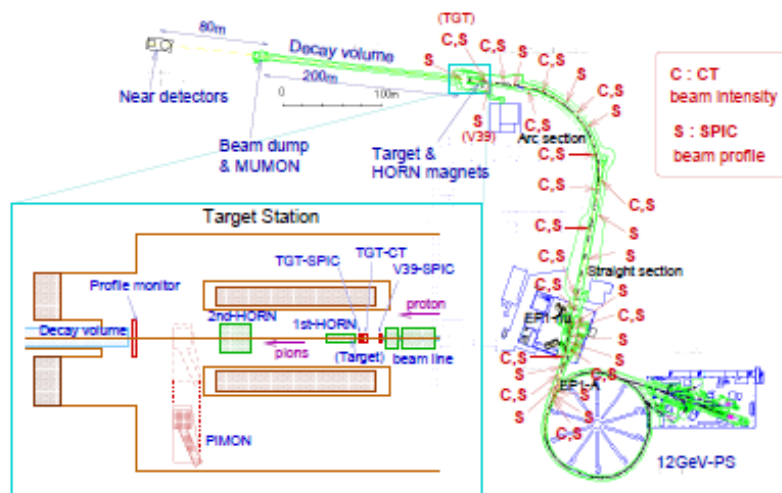


図 3.3: ビーム生成機構の概略図

⁹極めて純粋な ν_μ のビームが作られる。

¹⁰ π^+ の集束させる運動量を指定することで、ニュートリノのエネルギーを調整することができる。

MINOS 実験

「Main Injector Neutrino Oscillation Search experiment」の略称であるこの実験は、フェルミ国立加速器研究所 (Fermi National Accelerator Laboratory、略称はFNAL) で生成した ν_μ のビームを約 740km 離れた Minnesota 州の Soudan 鉱に設置された MINOS 検出器で観測する加速器ニュートリノ実験である [43]。

これは K2K 実験と同様の実験であり、 $E_p = 120\text{GeV}$ に固定している。ND は標的の下流 1km 地点に設置された。MINOS 検出器は、厚さ 2.5cm の鉄板と厚さ 1cm のプラスチックシンチレータが幾層にも重なり合ったサンドイッチ構造から成る。さらに幅 4cm のプラスチックシンチレータ板を層に対して直交に配置することで、3次元空間における軌跡の再構成を可能とした。鉄板には約 1.8T の磁場を掛けているので、 ν_μ から生成された μ 粒子の電荷を識別することもできる。また、ND も同様の構造である。

各実験のデータ解析から、振動パラメーターも確定している。許容領域を図 (3.4) に記す。その値は、

$$\begin{aligned} \sin^2 2\theta_{23} &> 0.92 \\ \Delta m_{23}^2 &= 2.43 \pm 0.13 \times 10^{-3} \text{eV}^2 \end{aligned}$$

とされている [12]。

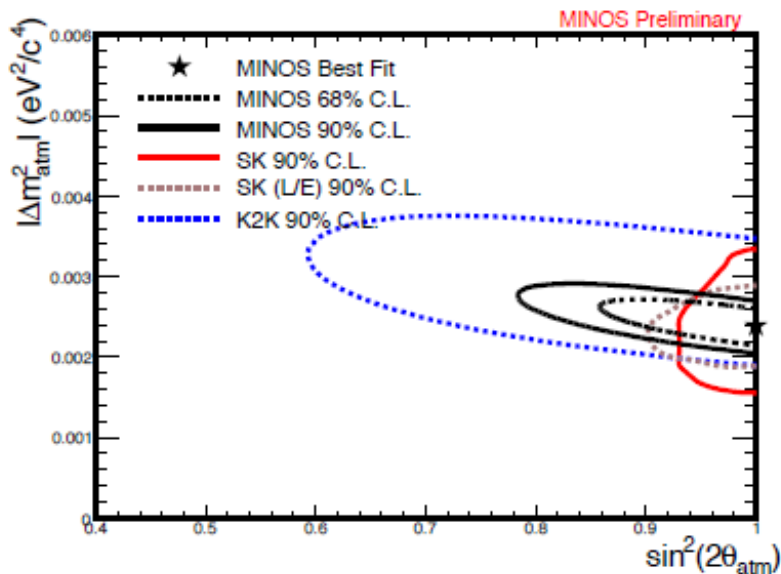


図 3.4: 大気ニュートリノにおける振動パラメーター許容領域

3.2.3 物質中での2世代ニュートリノ振動

ニュートリノ振動の定式化が始まった当初は、CKM行列との類推を考えると大混合角の真空振動による太陽ニュートリノの欠損は考え難かった。

ところで太陽中では、高密度物質による散乱を加味する必要がある。この効果を加えると、微小混合角でも大混合が起こることが分かった。この物質効果はWolfensteinによって定式化され、太陽ニュートリノ問題を説明するためにMikheyev-Smirnovによって用いられた。この物質効果による共鳴振動現象は、「MSW効果」と呼ばれている[23]。

物質中には電子や陽子、中性子(つまりuクォークやdクォーク)が存在する。従って、物質中を伝播するニュートリノを考える際には、図(3.5)の相互作用を全て考慮する必要がある。

式(3.9)より、中性カレント(NC)による効果は質量行列を変えるが Δm^2 を変えることはない。つまり考慮すべきは荷電カレント(CC)のみである。これに相当する不変散乱振幅は、

$$-i\mathcal{M} = \bar{e}_L \left(-i \frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \right) \nu_{eL} \left(-i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_w^2}{k^2 - m_w^2} \right) \bar{\nu}_{eL} \left(-i \frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\nu \right) e_L \quad (3.10)$$

と書ける。ここで $k^2 \ll m_w^2$ より、

$$\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_w^2}{k^2 - m_w^2} \sim -\frac{g_{\mu\nu}}{m_w^2}$$

と近似できる。従って式(3.10)に相当するラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{CC}} \sim -\frac{g_w^2}{2m_w^2} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu e_L \quad (3.11)$$

と書き換えられる。

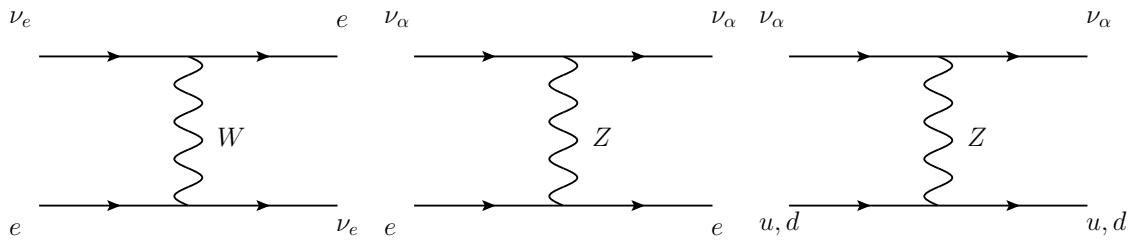


図 3.5: 物質中でのニュートリノの相互作用

式 (3.11) で Fermi 結合定数を、

$$G_F \equiv \frac{g_w^2}{4\sqrt{2}m_w^2}$$

とおくと、

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{CC}} = -2\sqrt{2}G_F \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu e_L \quad (3.12)$$

と点接触型の Fermi 相互作用に帰着できる。式 (3.12) に Fiertz 変換を行うと、

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{CC}} = -2\sqrt{2}G_F \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu \nu_{eL}$$

と書ける。さらに古典的極限では電子のカレントを電子の海として外場に置き換えて、

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{CC}} = -2\sqrt{2}G_F \langle \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \rangle \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu \nu_{eL} \quad (3.13)$$

と書ける¹¹。ニュートリノに対して物質中の電子は静止していると近似できる、もしくは電子のカレントにおける平均値が 0 でない第 0 成分だけを取り出すという観点から、

$$J^\mu(\mathbf{x}, t) \rightarrow \delta_0^\mu J^0(t) \equiv \frac{\delta_0^\mu}{V} \int_V d^3x J^0(\mathbf{x}, t)$$

の置き換えを施すと、

$$\begin{aligned} J_e^\mu &\rightarrow \frac{\delta_0^\mu}{V} \int_V d^3x \langle e_L^\dagger e_L \rangle(\mathbf{x}, t) \\ &= \delta_0^\mu n_{eL}(t) \\ &= \frac{1}{2} \delta_0^\mu n_e(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる。式 (3.14) を式 (3.13) に代入すると、

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{CC}} = -\sqrt{2}G_F n_e (\nu_{eL}^\dagger \nu_{eL})$$

つまり ν_{eL} は、 $A \equiv \sqrt{2}G_F n_e$ による外場 V_{ee} を感じることになる。この効果を加えた相互作用固有状態でのハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} \tilde{H}_f &= U H_i U^\dagger + V_{ee} \\ &= \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} \frac{4E}{\Delta m^2} \sqrt{2}G_F n_e & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2 \cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

¹¹ここでは Hartree-Fock 近似の Hartree 項だけを取ったことになる。

物質密度が一定のとき

$n_e = \text{const.}$ のときは $U_m = \text{const.}$ ($\theta_m = \text{const.}$) の対角化行列でハミルトニアンが対角化できて、

$$U_m^{-1} \tilde{H}_f U_m = \text{diag} \left(\tilde{E}_i \right)$$

と書ける。時間発展方程式は、

$$i \frac{d}{dt} \tilde{\nu}_i(t) = \tilde{E}_i \tilde{\nu}_i(t)$$

となり、以降は真空中と同様に解ける。

ここで H_i の非対角項が 0 であるという条件は、

$$0 = \frac{2\sqrt{2}G_F n_e E}{\Delta m^2} \sin 2\theta_m + \cos^2 \theta_m \sin 2\theta - \sin^2 \theta_m \sin 2\theta - \sin 2\theta_m \cos 2\theta$$

である。これから、

$$\tan 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - \frac{2E}{\Delta m^2} \sqrt{2}G_F n_e} \quad (3.16)$$

を得る。エネルギー固有値の差は、

$$\Delta \tilde{E} = \sqrt{2}G_F n_e \cos 2\theta_m - \frac{\Delta m^2}{2E} (\sin 2\theta_m \sin 2\theta + \cos 2\theta_m \cos 2\theta) \quad (3.17)$$

式 (3.9) より振動位相は式 (3.17) の半分で、

$$\frac{\Delta \tilde{E}}{2} = \frac{\Delta m^2}{4E} \sqrt{\left(\cos 2\theta - \frac{2E}{\Delta m^2} \sqrt{2}G_F n_e \right)^2 + \sin^2 2\theta} \quad (3.18)$$

式 (3.9) を式 (3.16) や式 (3.18) で置き換えると、

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e; L) &= 1 - \sin^2 2\theta_m \sin^2 \frac{\Delta \tilde{E}}{2} L \\ &= 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{\left(\cos 2\theta - \frac{2E}{\Delta m^2} \sqrt{2}G_F n_e \right)^2 + \sin^2 2\theta} \\ &\quad \times \sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E} L \sqrt{\left(\cos 2\theta - \frac{2E}{\Delta m^2} \sqrt{2}G_F n_e \right)^2 + \sin^2 2\theta} \end{aligned} \quad (3.19)$$

式 (3.19) は $\cos 2\theta$ の関数なので、 θ の縮退は 4 つに落ちる。またどんな微小混合角でも、大混合 ($\sin^2 2\theta_m = 1$) を実現する共鳴点 ($n_e = n_{\text{res}}$) が存在することになる。

物質密度が時間（距離）に依存するとき

$n_e = n_e(x) \neq \text{const.}$ のときは $n_e(x) = n_e(t)$ による時間依存性を考慮する必要がある。このとき $\theta_m = \theta_m(x) \neq \text{const.}$ となるので、

$$\begin{aligned}
i \frac{d}{dt} \tilde{\nu}_f(t) &= \tilde{H}_f \tilde{\nu}_f(t) \\
i \frac{d}{dt} (U_m(t) \tilde{\nu}_i(t)) &= \tilde{H}_f U_m(t) \tilde{\nu}_i(t) \\
i \frac{dU_m}{dt} \tilde{\nu}_i(t) + i U_m \frac{d}{dt} \tilde{\nu}_i(t) &= \tilde{H}_f U_m \tilde{\nu}_i(t) \\
i \frac{d}{dt} \tilde{\nu}_i(t) &= U_m^{-1} \tilde{H}_f U_m \tilde{\nu}_i(t) - i U_m^{-1} \frac{dU_m}{dt} \tilde{\nu}_i(t) \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$s_m \equiv \sin \theta_m$ 、 $c_m \equiv \cos \theta_m$ を用いて式 (3.20) の成分を露わに書くと、

$$\begin{aligned}
& i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(t) \\ \tilde{\nu}_2(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(t) \\ \tilde{\nu}_2(t) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} c_m & -s_m \\ s_m & c_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s_m \dot{\theta}_m & c_m \dot{\theta}_m \\ -c_m \dot{\theta}_m & -s_m \dot{\theta}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(t) \\ \tilde{\nu}_2(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(t) \\ \tilde{\nu}_2(t) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta}_m \\ -\dot{\theta}_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(t) \\ \tilde{\nu}_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.21}
\end{aligned}$$

ここで三角関数の微分量を計算すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \tan 2\theta_m &= \frac{2}{\cos^2 2\theta_m} \dot{\theta}_m \\
&= \frac{\dot{A} \sin 2\theta}{\left(\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta - A \right)^2}
\end{aligned}$$

$\dot{\theta}_m$ が露わに現れるので、

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_m &= \frac{\Delta m^2}{4E} \frac{\dot{A} \sin 2\theta \cos^2 2\theta_m}{\left(\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta - A \right)^2} \\
&= \frac{E \dot{A} \sin^2 2\theta_m}{\Delta m^2 \sin 2\theta}
\end{aligned}$$

を得る。これが振動位相である $\Delta \tilde{E}/2$ に比べて十分小さいことを断熱条件とすると、

$$\left| \dot{\theta}_m \right| \ll \left| \Delta \tilde{E}/2 \right|$$

$\Delta\tilde{E}$ を共鳴点で評価すると¹²、

$$\begin{aligned} |\dot{\theta}_m| &\ll \frac{\Delta m^2}{2E} \sin 2\theta \\ \left| \left(\frac{\Delta m^2}{2E} \right)^2 \frac{\sin^2 2\theta}{\sqrt{2}G_F n_e} \right| &\gg 1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$\Delta\tilde{E}$ が共鳴点である条件¹³は、

$$\sqrt{2}G_F n_e = \frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta$$

これを式 (3.22) に代入すると、

$$\gamma_m \equiv \left| \frac{\Delta m^2}{2E} \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta (n_e/n_e)_{\text{res}}} \right| \gg 1 \quad (3.23)$$

これが断熱条件を表す式である。断熱近似が有効なときは非対角項を無視して、

$$\begin{aligned} \nu_f(t) &= U_m(t) \tilde{\nu}_i(t) \\ &= U_m(t) \text{diag} \left(e^{-i \int_0^t \tilde{E}_i dt} \right) U_m^{-1}(0) \nu_f(0) \end{aligned}$$

結果は式 (3.19) と大きく異なり、

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e; L) &= \cos^2 \theta_m(t) \cos^2 \theta_m(0) + \sin^2 \theta_m(t) \sin^2 \theta_m(0) \\ &\quad + 2 \cos \theta_m(t) \cos \theta_m(0) \sin \theta_m(t) \sin \theta_m(0) \cos \int_0^t \Delta\tilde{E} dt \\ &= \cos^2 (\theta_m(t) - \theta_m(0)) - \sin \frac{\theta_m(t)}{2} \sin \frac{\theta_m(0)}{2} \sin^2 \int_0^t \frac{\Delta\tilde{E}}{2} dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

これが時間依存する物質密度中を伝播するニュートリノの振動を記述する式である。式 (3.24) の第 1 項は時間変化する振動軸を、第 2 項は軸周りの振動と時間変化する振幅を表す。

¹²但し一般的に、共鳴点と PMVA (the Point of Maximal Violation of Adiabaticity) は異なることには留意が必要である [25]。

¹³逆に言うと、 $n_e(0)$ が小さい地球内部などでは共鳴すら起きない。

太陽ニュートリノでは、

$$n_{e\odot}(x) = n_0 e^{-10.54x/R_\odot} \quad (3.25a)$$

$$n_0 = 245 N_A \text{ cm}^{-3} \quad (3.25b)$$

$$R_\odot = 6.96 \times 10^5 \text{ km} \quad (3.25c)$$

と近似される [26]。式 (3.25) を式 (3.23) に代入すると、

$$\frac{\Delta m^2}{2E} \sin 2\theta \tan 2\theta \gg 3 \times 10^{-7} \left(\frac{\text{eV}^2}{\text{MeV}} \right) \quad (3.26)$$

これが太陽ニュートリノにおける断熱条件である。

地球での観測は $L \gg 1$ として振動項を潰すことができる。さらに $U_m \rightarrow U$ に接続していることを考慮すると、

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e; L) &= \cos^2 \theta \cos^2 \theta_m(0) + \sin^2 \theta \sin^2 \theta_m(0) \\ &= \cos^2 \theta - \cos 2\theta \sin^2 \theta_m(0) \end{aligned}$$

これが太陽ニュートリノの振動を記述する式である。式 (3.16) より太陽中心では $\theta_m \sim \pi/2$ であり、 $\tilde{\nu}_e \sim \tilde{\nu}_2$ である。これが真空中に向かって滑らかに $\nu_e \sim \nu_1$ へと接続する。概略を図 (3.6) に記す [1]。図中の点線は質量行列における $m_{ee}, m_{\mu\mu}$ を、実線は \tilde{E}_1, \tilde{E}_2 を表す。

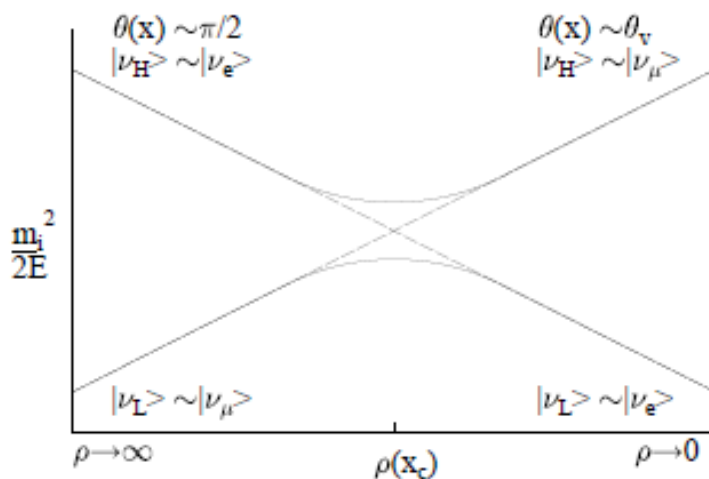


図 3.6: 太陽ニュートリノにおけるエネルギー固有値の概略図

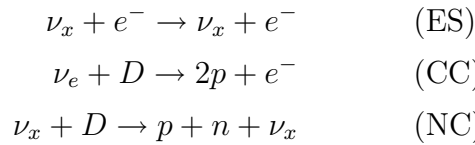
3.2.4 太陽ニュートリノ実験

やはり太陽ニュートリノ問題も、物質効果を加味したニュートリノ振動論によって解決された。その振動パラメータ決定に大きく貢献した3つの実験について、本小節で触れておく。

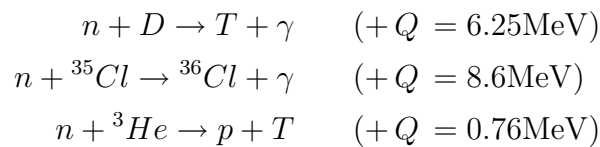
SNO 実験

「Sudbury Neutrino Observatory」の略称であるこの実験は、消失実験と出現実験を併せた画期的な実験であった。つまり ν_e の消失量を観測すると共に、消失した ν_e が ν_μ や ν_τ へ変換された様子をも追い掛けて観測したのである。これによってニュートリノ振動という現象の存在が決定的なものとなった。

カナダの Sudbury に建造された SNO 測定器では第1段階として1,000t もの重水を用いて、



の反応を測定した [39]。第2段階では $NaCl$ を、第3段階では 3He を用いて同様の測定を行った。原理はSKと同じであるが、 ν_e から変換された ν_μ や ν_τ を観測するために中性カレントの効果を測定する必要がある。重水などを用いたのはこのためで、



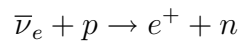
の反応を利用して副次的に中性カレントを測定した。 $NaCl$ と 3He は中性子捕獲の頻度を上げるために用いられた。

ES,CC,NC 反応の全てを観測できるので、本来の目的であったSSMの検証も可能となった。

KamLAND 実験

「Kamioka Liquid scintillator Anti-Neutrino Detector experiment」の略称であるこの実験は太陽ニュートリノ実験であるが、利用したのは検出器から 180km ほどの距離にある原子炉由来の $\bar{\nu}_e$ である [40]。「原子炉ニュートリノ実験」では SSM による不定性の影響を受けない上、流量やエネルギーなどを人の手で制御できるという利点を持つ。名称にある通り、検出器には初期のカミオカンデを大幅に改良したものが用いられた。

試料には超純化を行い、ドデカン (80%、dodecane) + プソイドクメン (20%、1,2,4-trimethylbenzene) + PPO (1.5g/1'000cm³、発光剤ダイフェニルオキサゾール、2,5-Diphenyloxazole の略) で構成される液体シンチレータが計 1,000t 用いられた。利用する反応は、



の逆 β 崩壊である。これによって生じた陽電子が電子と消滅する際に放出される 1.022MeV の γ 線を先発信号¹⁴とし、同様に生じた中性子が陽子に捕獲される際に放出される 2.22MeV の γ 線を後発信号とし、それぞれを検出することで高精度の反応種識別を可能とした。

この超純化した有機シンチレータによるシンチレーション光は、従来の実験で用いられていたチェレンコフ光より 100 倍も大きな光量を得られる。これにより高感度低エネルギーニュートリノ検出を可能とした。

最も大きい背景雑音は、地球内部の放射性元素の崩壊系列で生じる $\bar{\nu}_e$ である。現在の地球物理学においては、その量を見積もることが全く出来ていない。この雑音が効いてくる先発信号のエネルギー閾値は $E_\nu \leq 2.5\text{MeV}$ であり、このエネルギー領域の反応事象をデータ解析に加えるか否かで信頼水準が大きく異なる。

¹⁴放出された γ 線がシンチレーション剤を励起させ、これが基底状態に戻る際に発光する。これがシンチレーション光となる。

Borexino 実験

イタリアの Gran Sasso で実施された「Borexino 実験」も液体シンチレータを用いた実験である。プソイドクメン (1,2,4-trimethylbenzene) と PPO (2,5-diphenyloxazole) で構成される 300t のシンチレータを封入した検出器が、2,000t の水シールド中に設置された。主たる観測対象としたのは、 ${}^7\text{Be}$ ニュートリノである [41]。

これは2つの特性エネルギーピークをもつニュートリノであったが、これを含むエネルギー領域は共鳴条件のエネルギー領域と重なる。従ってエネルギー変化に伴い、大きな ν_e 流量の変化を見ることができる。

第1世代実験と呼ばれる塩素-神岡-ガリウム実験と、第2世代実験と呼ばれる SK-SNO-KamLAND-Borexino 実験のデータを統合して振動パラメーターが与えられている。その許容領域を図 (3.7) に記す。現在承認されている値は、

$$\begin{aligned}\sin^2 2\theta_{12} &= 0.87 \pm 0.03 \\ \Delta m_{12}^2 &= 7.59_{-0.21}^{+0.19} \times 10^{-5} \text{ eV}^2\end{aligned}$$

となっている [12]。

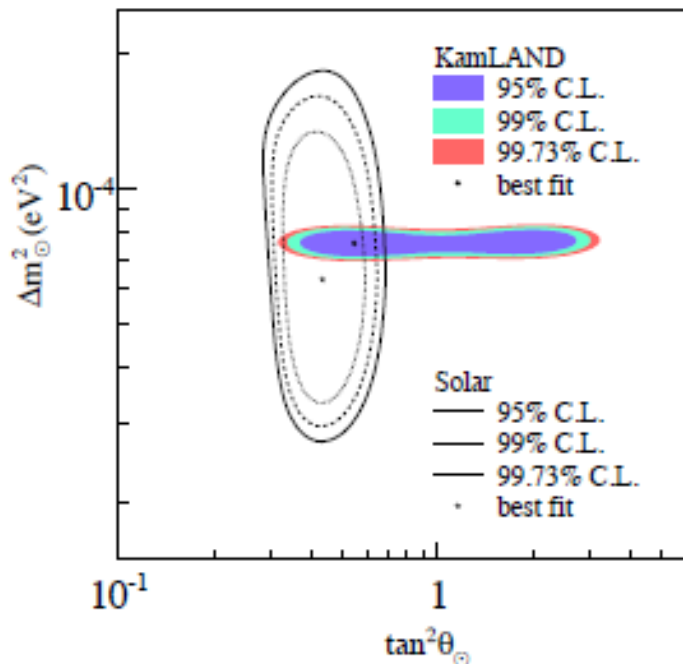


図 3.7: 太陽ニュートリノにおけるパラメータ許容領域 (SNO + KamLAND)

3.3 2世代ニュートリノにおける非断熱遷移

図 (3.7) で示したパラメータ領域は、大混合角 (LMA) と呼ばれる領域に属する。しかし塩素-神岡-ガリウム実験が主要実験であった当初は、許容領域をここまで強く制限できなかった。3実験から得られる許容領域の1つがSMAの領域で、図 (3.8) 中における三角帯の左下辺にある共通領域に相当する。この領域では断熱条件が破れ、通常物質効果にさらなる変更を要する。もちろん現在では排除されている領域であるが、後学の為に有益な対象なので本節でこれを述べておく。

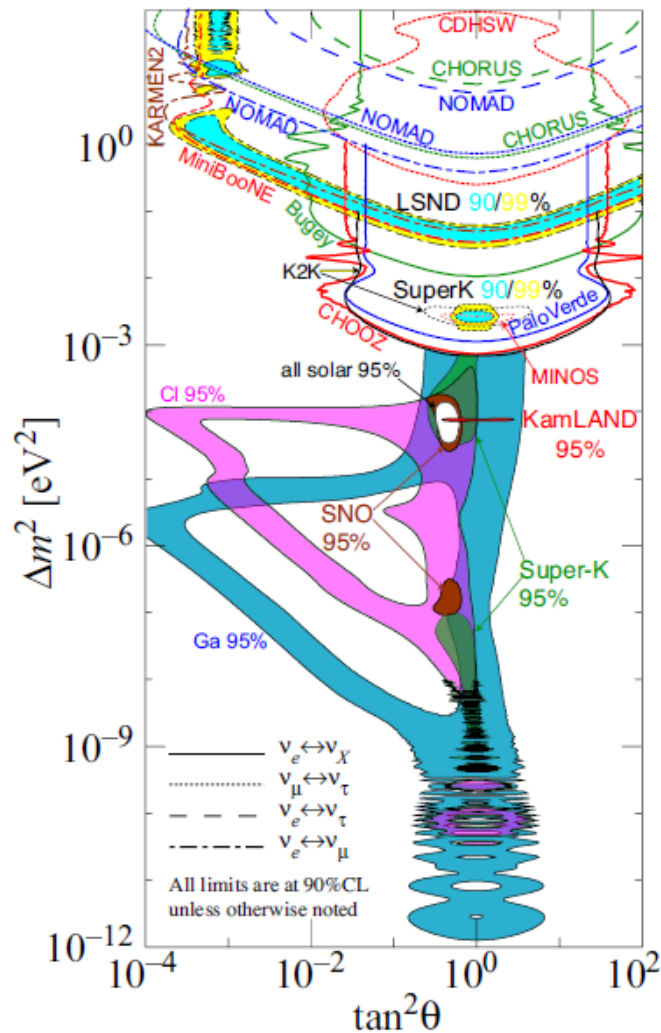


図 3.8: 太陽ニュートリノにおけるパラメータ許容領域 (global map)

3.3.1 Zener 近似

式 (3.21) から明らかなように式 (3.26) の条件が破れるとき、「固有値」という概念は破綻する。対角化できないのであれば、時間依存する基底 $|\tilde{\nu}_i(t)\rangle$ を用いるよりも外場の時間応答が明確な $|\nu_x\rangle$ を用いた方が便利である。

この手法が提唱されたのは1932年、C.Zenerによってである [27]。その際は、スピンにおける線形変化磁場への応答が例として挙げられた。つまりニュートリノの非断熱遷移に Zener の手法を適用するということは、「線形近似」を行うということである。

$n_e(t)$ を線形近似すると、

$$\begin{aligned}
 n_e(t) &\doteq n_0 e^{-10t/R_\odot} \\
 &\sim n_e(t_{\text{res}}) + (t - t_{\text{res}}) \dot{n}_e \Big|_{\text{res}} \\
 &= n_e(t_{\text{res}}) - t_{\text{res}} \dot{n}_e \Big|_{\text{res}} + t n_e(t_{\text{res}}) \dot{n}_e \Big|_{\text{res}} \\
 &\equiv n_0 - nt
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

ここで表記の簡便性のために、

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \frac{G_{\text{F}} n_0}{\sqrt{2}} - \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta \\
 \alpha &= \frac{G_{\text{F}} n}{\sqrt{2}} \\
 \beta &= \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

とおくと相互作用固有状態でのハミルトニアンは、

$$\tilde{H}_f = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \alpha t & \beta \\ \beta & -\alpha_0 + \alpha t \end{pmatrix}$$

連立微分方程式を露わに書くと、

$$i\dot{\nu}_e = (\alpha_0 - \alpha t)\nu_e + \beta\nu_\mu \tag{3.28a}$$

$$i\dot{\nu}_\mu = \beta\nu_e - (\alpha_0 - \alpha t)\nu_\mu \tag{3.28b}$$

式 (3.28a) を微分して式 (3.28b) を代入すると、

$$i\ddot{\nu}_e = -(\alpha + i\beta^2)\nu_e + (\alpha_0 - \alpha t)\dot{\nu}_e + i(\alpha_0 - \alpha t)\beta\nu_\mu$$

式 (3.28a) を用いて $\beta\nu_\mu$ を消去すると、

$$\ddot{\nu}_e = [i\alpha - \beta^2 - (\alpha_0 - \alpha t)^2] \nu_e \tag{3.29}$$

となる¹⁵。ここで、

$$z = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e^{i\pi/4} (\alpha_0 - \alpha t) \equiv \lambda e^{i\pi/4} \quad (3.30)$$

の変数変換より微分演算子は、

$$\frac{d^2}{dt^2} = (\dot{z})^2 \frac{d^2}{dz^2} = -2i\alpha \frac{d^2}{dz^2} \quad (3.31)$$

式 (3.30)、式 (3.31) らを式 (3.29) に代入すると、

$$\frac{d^2 \nu_e}{dz^2} + \left(\frac{i\beta^2}{2\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) \nu_e = 0$$

さらに $m = i\beta^2/2\alpha$ とおくと、

$$\frac{d^2 \nu_e}{dz^2} + \left(m + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) \nu_e = 0 \quad (3.32)$$

式 (3.32) は Weber の微分方程式と呼ばれる。この微分方程式の一般解は Weber 関数 $D_m(z)$ を用いて、

$$\nu_e(z) = c_1 D_m(-z) + c_2 D_{-m-1}(-iz)$$

と書ける。便宜上 $|\nu_e(t \rightarrow \infty)|^2 = 0$ の初期条件を課すと¹⁶、

$$\begin{aligned} D_m(-z) &\rightarrow 0 \\ D_{-m-1}(-iz) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

従って条件に合う解は、

$$\begin{aligned} \nu_e(t) &= c_2 D_{-m-1}(-iz) \\ &= \begin{cases} c_2 \left(e^{-i(m+1)\pi/4} e^{-i|\lambda|^2/4} |\lambda|^{-m-1} \right) & (\lambda \rightarrow -\infty) \\ c_2 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(m+1)} e^{im\pi/4} e^{i|\lambda|^2/4} |\lambda|^m \right) & (\lambda \rightarrow \infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.33)$$

ここで ν_e における λ の依存性を見ると、

$$i\dot{\nu}_e = i\lambda \frac{d\nu_e}{d\lambda} = -i\sqrt{2\alpha} \frac{d\nu_e}{d\lambda}$$

¹⁵これは変数変換により、Hermite の微分方程式に帰着できる。

¹⁶これらの背景設定は太陽の記述と掛け離れたものになるが、遷移が十分 PMVA 付近で生じるという近似と遷移確率の時間対称性がそれを支えている。

これに式 (3.33) の $\lambda \rightarrow -\infty$ における漸近形を代入すると、

$$\begin{aligned}
i\dot{\nu}_e &= -ic_2\sqrt{2\alpha} \frac{d}{d\lambda} \left(e^{-i(m+1)\pi/4} e^{-i|\lambda|^2/4} |\lambda|^{-m-1} \right) \\
&= -ic_2 e^{-i(m+1)\pi/4} \sqrt{2\alpha} \left[-i \frac{\lambda}{2} e^{-i|\lambda|^2/4} |\lambda|^{-m-1} - (m+1) e^{-i|\lambda|^2/4} |\lambda|^{-m-2} \right] \\
&= c_2 e^{-i(m+1)\pi/4} e^{-i|\lambda|^2/4} \sqrt{2\alpha} |\lambda|^{-m-1} \left(i \frac{m+1}{|\lambda|} - \frac{|\lambda|}{2} \right) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

一方で式 (3.28a) より、

$$\begin{aligned}
i\dot{\nu}_e &= \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \lambda \nu_e + \beta \nu_\mu \\
&= c_2 \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \lambda \left(e^{-i(m+1)\pi/4} e^{-i|\lambda|^2/4} |\lambda|^{-m-1} \right) + \beta \nu_\mu \quad (3.35)
\end{aligned}$$

式 (3.34) と式 (3.35) から、

$$\beta \nu_\mu = c_2 e^{-i(m+1)\pi/4} e^{-i|\lambda|^2/4} \sqrt{2\alpha} |\lambda|^{-m-1} \left(i \frac{m+1}{|\lambda|} - |\lambda| \right)$$

このとき $|\nu_\mu(t \rightarrow \infty)|^2 = 1$ なので、

$$\begin{aligned}
|\beta \nu_\mu|^2 &= |c_2|^2 e^{\beta^2\pi/4\alpha} |\lambda|^{-2} \sqrt{2\alpha} \left(i \frac{m+1}{|\lambda|} - |\lambda| \right)^* \left(i \frac{m+1}{|\lambda|} - |\lambda| \right) \\
&\rightarrow |c_2|^2 e^{\beta^2\pi/4\alpha} \sqrt{2\alpha}
\end{aligned}$$

これで係数 c_2 が決定して、

$$c_2 = \frac{\beta}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\beta^2\pi/8\alpha} \quad (3.36)$$

式 (3.36) を式 (3.33) の $\lambda \rightarrow \infty$ における漸近形に代入すると遷移確率は、

$$\begin{aligned}
|\nu_e|^2 &\rightarrow \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\beta^2\pi/2\alpha} \frac{2\pi}{\Gamma(m^*+1)\Gamma(m+1)} \\
&= \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\beta^2\pi/2\alpha} \frac{2\pi}{\Gamma(-i\beta^2/2\alpha+1)\Gamma(i\beta^2/2\alpha+1)}
\end{aligned}$$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ なので、

$$|\nu_e|^2 = e^{-\beta^2\pi/2\alpha} \frac{2\pi}{i\Gamma(i\beta^2/2\alpha)\Gamma(1-i\beta^2/2\alpha)}$$

相反公式を用いて、

$$\begin{aligned}
|\nu_e|^2 &= 2i^{-1} e^{-\beta^2\pi/2\alpha} \sin \frac{i\beta^2}{2\alpha} \pi \\
&= 2 e^{-\beta^2\pi/2\alpha} \sinh \frac{\beta^2\pi}{2\alpha} \\
&= 1 - e^{-\beta^2\pi/\alpha} \\
&= 1 - \exp \left[- \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \right)^2 \sin^2 2\theta \frac{\sqrt{2}\pi}{G_{\text{F}} n} \right] \quad (3.37)
\end{aligned}$$

ここで $G_F/\sqrt{2}$ を共鳴点で評価して式 (3.27) を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{G_F n}{\sqrt{2}} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} n_e(t_{\text{res}}) \dot{n}_e \Big|_{\text{res}} \\ &\sim -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta \frac{\dot{n}_e}{n_e} \Big|_{\text{res}}\end{aligned}$$

これを式 (3.37) に代入すると、

$$\begin{aligned}1 - P_{\text{jump}} &= 1 - \exp\left(\pi \frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{4E} \frac{n_e}{\cos 2\theta} \frac{\dot{n}_e}{n_e} \Big|_{\text{res}}\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{2} \gamma_m\right)\end{aligned}\tag{3.38}$$

γ_m は式 (3.23) で定義したものである。

これが Zener 近似における遷移確率である。つまり非断熱遷移では急激な外場変化 ($\gamma_m \sim 1$) があるため断熱遷移で要請される、

$$|\nu_e|^2 = 1$$

よりも P_{jump} だけ遅れを取ることになる。

3.3.2 Landau 近似

Zener 近似では相互作用固有基底¹⁷を用いたが、Landau 近似では質量固有基底¹⁸を用いる。これは関数が多価になってしまう分岐点¹⁹を避けるように積分経路を複素平面へ拡張するという手法で、トンネル効果を議論する際に用いられている [28]。

$$\Delta_{12} = \frac{\Delta m_{12}^2}{2E}$$

を用いると式 (3.21) より質量固有状態でのハミルトニアンは、

$$\tilde{H}_i = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{(A(t) - \Delta_{12} \cos 2\theta)^2 + (\Delta_{12} \sin 2\theta)^2} & -i\dot{\theta}_m \\ i\dot{\theta}_m & \frac{1}{2}\sqrt{(A(t) - \Delta_{12} \cos 2\theta)^2 + (\Delta_{12} \sin 2\theta)^2} \end{pmatrix}$$

但し単位行列に比例する項は後に相殺されるので、この時点で無視した。この関数は2価なので、2葉リーマン面を考えることで1価関数に直すことができる。被積分関数 $\tilde{E}(t)$ を複素平面に拡張して因数分解すると、

$$\sqrt{(A(t) - \Delta_{12} \cos 2\theta)^2 + (\Delta_{12} \sin 2\theta)^2} \rightarrow \sqrt{(A(t) - \Delta_{12} e^{i2\theta})(A(t) - \Delta_{12} e^{-i2\theta})}$$

従って、 $A(t) = \Delta_{12} e^{i2\theta}, \Delta_{12} e^{-i2\theta}$ が分岐点となる。この2点が結ぶ切断を横断する際、他方のリーマン面への移動が起こる。

ここでは、この分岐点と切断を避けるように積分経路を取る。積分は切断と分岐点を避けながら実軸に沿って行い、最後に円弧を描いて1周させることで積分経路を閉じる。 $C \in t$ において偏角は、 $0 \leq \arg(t) < 2\pi$ である。このとき遷移振幅は、

$$A_c = \exp \left[\frac{i}{2} \oint_C dt \sqrt{(A(t) - \Delta_{12} \cos 2\theta)^2 + (\Delta_{12} \sin 2\theta)^2} \right]$$

ここで積分経路上の分岐点前における偏角を、 $\arg(\tilde{E}) = 0$ とする。このとき分岐点後の偏角は、 $\arg(\tilde{E}) = \pi$ である。これは分岐点の前後で、質量固有状態が変化したことを意味する。

実軸上の時間発展を除くと、切断に沿った経路のみ²⁰が残る。これがトンネル

¹⁷これは非断熱遷移論における透熱基底に相当する。

¹⁸これは非断熱遷移論における断熱基底に相当する。

¹⁹この点は透熱基底で見たときの交叉点であり、断熱基底では擬交叉点と呼ばれる。交叉点では縮退により、基底が定義できなくなる。

²⁰円弧部と、分岐点を回る小円の積分経路による寄与は0である。

型非断熱遷移に相当する。従ってトンネル効果による遷移確率は、

$$\begin{aligned}
P_{12} &= |A_c|^2 \\
&= \exp \left[-\Im \int_c dt (\tilde{H}_{22} - \tilde{H}_{11}) \right] \\
&= \exp \left[-\Im \int_c dt \sqrt{(A(t) - \Delta_{12} \cos 2\theta)^2 + (\Delta_{12} \sin 2\theta)^2} \right] \\
&= \exp \left[-2\Im \int_{A(t)=\Delta_{12} \cos 2\theta}^{A(t)=\Delta_{12} e^{i2\theta}} dt \sqrt{(A(t) - \Delta_{12} \cos 2\theta)^2 + (\Delta_{12} \sin 2\theta)^2} \right]
\end{aligned}$$

この積分を実行する際に $n_e(t)$ が指数関数であることを露わに利用すると、

$$\begin{aligned}
\ln P_{12} &= -2\Im \int \frac{dt}{dA} dA \sqrt{(A(t) - \Delta_{12} \cos 2\theta)^2 + (\Delta_{12} \sin 2\theta)^2} \\
&= -2 \frac{n_e}{\dot{n}_e} \Im \int dA \frac{\sqrt{(A(t) - \Delta_{12} \cos 2\theta)^2 + (\Delta_{12} \sin 2\theta)^2}}{A} \\
&= -2\Delta_{12} \frac{n_e}{\dot{n}_e} \Im \int_{\cos 2\theta}^{e^{i2\theta}} dx \frac{\sqrt{x^2 - 2x \cos 2\theta + 1}}{x} \\
&= -2\Delta_{12} \frac{n_e}{\dot{n}_e} \Im \left[\sqrt{x^2 - 2x \cos 2\theta + 1} - \ln 2 \left(\frac{1 - x \cos 2\theta + \sqrt{x^2 - 2x \cos 2\theta + 1}}{x} \right) \right. \\
&\quad \left. - \cos 2\theta \ln 2 \left(\sqrt{x^2 - 2x \cos 2\theta + 1} + x - \cos 2\theta \right) \right] \Big|_{\cos 2\theta}^{e^{i2\theta}} \\
&= -2\Delta_{12} \frac{n_e}{\dot{n}_e} \Im \left[-\sin 2\theta + \ln \left(\frac{1 + \sin 2\theta}{\cos 2\theta} \right) + i \frac{\pi}{2} (1 - \cos 2\theta) \right] \\
&= -\pi \Delta_{12} \frac{n_e}{\dot{n}_e} (1 - \cos 2\theta) \\
&= -\frac{\pi}{2} \gamma_m (1 - \tan^2 \theta)
\end{aligned}$$

これが Landau 近似における遷移確率である。線形近似を行わなかった分、

$$F[n_e] = 1 - \tan^2 \theta$$

の変更を受ける。ここで $F[n_e]$ は n_e が指数関数であるときに $1 - \tan^2 \theta$ の形を取る変更汎関数で、他の関数である場合は $F[n_e]$ の形も異なる [29]。もちろん $n_e \propto t$ であるときは、 $F[n_e] = 1$ である。

3.3.3 高密度近似（厳密解）

まずは連立微分方程式を一切の近似無しに、合流型超幾何関数を用いて露わに解く。但し漸近形は利用するので、この点は Zener 近似と同様の手法である。式 (3.28) に相当する式は、

$$i\dot{\nu}_e = \left(-\frac{\Delta_{12}}{2} \cos 2\theta + A(t) \right) \nu_e + \frac{\Delta_{12}}{2} \sin 2\theta \nu_\mu \quad (3.39a)$$

$$i\dot{\nu}_\mu = \frac{\Delta_{12}}{2} \sin 2\theta \nu_e + \frac{\Delta_{12}}{2} \cos 2\theta \nu_\mu \quad (3.39b)$$

2 階の微分方程式は、

$$\ddot{\nu}_e + iA\dot{\nu}_e + \left[i\dot{A} - \frac{\Delta_{12}}{2} A \cos 2\theta + \left(\frac{\Delta_{12}}{2} \right)^2 \right] \nu_e = 0$$

$A(t)$ が指数関数であることを露わに利用すると、

$$\ddot{\nu}_e + iA\dot{\nu}_e + \left[-i \frac{\dot{n}_e}{n_e} A - \frac{\Delta_{12}}{2} A \cos 2\theta + \left(\frac{\Delta_{12}}{2} \right)^2 \right] \nu_e = 0 \quad (3.40)$$

$z = e^{-10.54t/R_\odot} \equiv e^{-t/r_0}$ の変数変換より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= -\frac{z}{r_0} \frac{d}{dz} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{z}{r_0^2} \frac{d}{dz} + \left(\frac{z}{r_0^2} \right)^2 \frac{d^2}{dz^2} \end{aligned}$$

$A(t) \equiv A_0 e^{-t/r_0} = A_0 z$ とすると式 (3.40) は、

$$\frac{d^2 \nu_e}{dz^2} + \left(-ir_0 A_0 + \frac{d\nu_e}{dz} \right) + \left[\left(-ir_0 A_0 - \frac{\Delta_{12}}{2} r_0^2 A_0 \cos 2\theta \right) \frac{1}{z} + \left(\frac{\Delta_{12}}{2} r_0 \right)^2 \frac{1}{z^2} \right] \nu_e = 0$$

この微分方程式の解は Riemann 関数 $P(x)$ を用いて書くことができる。これを決める 6 つのパラメータの関係式は、

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= ir_0 A_0 \\ \kappa_1 + \kappa_2 &= 1 - (\sigma_1 + \sigma_2) = 1 \\ \rho_1 \rho_2 &= 0 \\ \sigma_1 \sigma_2 &= \left(\frac{\Delta_{12}}{2} r_0 \right)^2 \\ \kappa_1 \rho_2 + \kappa_2 \rho_1 &= ir_0 A_0 + \frac{\Delta_{12}}{2} r_0^2 A_0 \cos 2\theta \end{aligned}$$

さらに漸近条件による決定方程式は、

$$\sigma^2 + \left(\frac{\Delta_{12}}{2} r_0 \right)^2 = 0$$

$$\rho^2 - ir_0 A_0 \rho = 0$$

これらの式からパラメータが決定し、

$$\begin{aligned} & P \begin{pmatrix} \rho_1 & \kappa_1 & \sigma_1 \\ \rho_2 & \kappa_2 & \sigma_2 \end{pmatrix}, z \\ &= P \begin{pmatrix} ir_0 A_0 & i \frac{\Delta_{12}}{2} r_0 \cos 2\theta & i \frac{\Delta_{12}}{2} r_0 \\ 0 & 1 - i \frac{\Delta_{12}}{2} r_0 \cos 2\theta & -i \frac{\Delta_{12}}{2} r_0 \end{pmatrix}, z \\ &= e^{ir_0 A_0 z} z^{ir_0 \Delta_{12}/2} P \begin{pmatrix} 0 & i \frac{\Delta_{12}}{2} r_0 (1 + \cos 2\theta) & 0 \\ -ir_0 A_0 & 1 + i \frac{\Delta_{12}}{2} r_0 (1 - \cos 2\theta) & -i \Delta_{12} r_0 \end{pmatrix}, z \\ &= e^{ir_0 A_0 z} z^{ir_0 \Delta_{12}/2} P \begin{pmatrix} 0 & i \frac{\Delta_{12}}{2} r_0 (1 + \cos 2\theta) & 0 \\ -ir_0 A_0 & 1 + i \frac{\Delta_{12}}{2} r_0 (1 - \cos 2\theta) & -i \Delta_{12} r_0 \end{pmatrix}, -ir_0 A_0 z \end{aligned} \quad (3.41)$$

これを用いて一般解を構成できる。

ν_e, ν_μ は 2 階の微分方程式を成すので独立な解は 2 つあり、

$$\nu_e(t) = c_1 \nu_e^{(1)}(t) + c_2 \nu_e^{(2)}(t) \quad (3.42a)$$

$$\nu_\mu(t) = c_3 \nu_\mu^{(1)}(t) + c_4 \nu_\mu^{(2)}(t) \quad (3.42b)$$

と書ける。式 (3.41) を利用すると一般解は、

$$\begin{aligned} \nu_e(t) &= c_1 e^{-i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0 A_0 e^{-t/r_0}} F(i\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta, 1 + i\Delta_{12}r_0; -ir_0 A_0 e^{-t/r_0}) \\ &\quad + c_2 e^{i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0 A_0 e^{-t/r_0}} F(-i\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta, 1 - i\Delta_{12}r_0; -ir_0 A_0 e^{-t/r_0}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$F(\alpha, \gamma; x)$ は Kummer 関数である。 $t \rightarrow \infty$ の漸近解は、

$$\nu_e(t) \rightarrow c_1 e^{-i\Delta_{12}t/2} + c_2 e^{i\Delta_{12}t/2}$$

となるので生存確率は、

$$P_{ee} \rightarrow |c_1|^2 + |c_2|^2 \quad (3.44)$$

一方で $\nu_\mu(t)$ の一般解も同様にして、

$$\begin{aligned} \nu_\mu(t) &= c_3 e^{-i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} F(1 + i\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta, 1 + i\Delta_{12}r_0; -ir_0A_0e^{-t/r_0}) \\ &\quad + c_4 e^{i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} F(1 - i\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta, 1 - i\Delta_{12}r_0; -ir_0A_0e^{-t/r_0}) \end{aligned}$$

式 (3.43) を微分すると (但し Kummer 関数の引数は省略する)。

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_e(t) &= c_1 e^{-i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} \dot{x}F'(\alpha_1, \gamma_1; x) \\ &\quad + c_2 e^{i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} \dot{x}F'(\alpha_2, \gamma_2; x) \\ &\quad + c_1 \left(-i \frac{\Delta_{12}}{2} - iA_0e^{-t/r_0} \right) e^{-i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} F(\alpha_1, \gamma_1; x) \\ &\quad + c_2 \left(i \frac{\Delta_{12}}{2} - iA_0e^{-t/r_0} \right) e^{i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} F(\alpha_2, \gamma_2; x) \end{aligned}$$

ここで $\dot{x} = -x/r_0$ の性質と、

$$xF'(\alpha, \gamma; x) = \alpha [F(\alpha + 1, \gamma; x) - F(\alpha, \gamma; x)]$$

の漸化式を利用すれば、

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_e(t) &= -iA(t)\nu_e(t) \\ &\quad - c_1 i \frac{\Delta_{12}}{2} e^{-i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} F(\alpha_1, \gamma_1; x) \\ &\quad + c_2 i \frac{\Delta_{12}}{2} e^{i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} F(\alpha_2, \gamma_2; x) \\ &\quad - c_1 e^{-i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} i\Delta_{12} \cos^2 \theta [F(\alpha_1 + 1, \gamma_1; x) - F(\alpha_1, \gamma_1; x)] \\ &\quad + c_2 e^{i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} i\Delta_{12} \sin^2 \theta [F(\alpha_2 + 1, \gamma_2; x) - F(\alpha_2, \gamma_2; x)] \\ &= -iA(t)\nu_e(t) - i\Delta_{12} c_1 \cos^2 \theta \nu_\mu^{(1)}(t) + i\Delta_{12} c_2 \sin^2 \theta \nu_\mu^{(2)}(t) \\ &\quad + i \frac{\Delta_{12}}{2} (2 \cos^2 \theta - 1) c_1 e^{-i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} F(\alpha_1, \gamma_1; x) \\ &\quad + i \frac{\Delta_{12}}{2} (1 - 2 \sin^2 \theta) c_2 e^{i\Delta_{12}t/2} e^{ir_0A_0e^{-t/r_0}} F(\alpha_2, \gamma_2; x) \\ &= \left(i \frac{\Delta_{12}}{2} \cos 2\theta - iA(t) \right) \nu_e(t) - i\Delta_{12} [c_1 \cos^2 \theta \nu_\mu^{(1)}(t) - c_2 \sin^2 \theta \nu_\mu^{(2)}(t)] \end{aligned}$$

これを式 (3.39a) と比べると、

$$(2c_1 \cos^2 \theta - c_3 \sin 2\theta) \nu_\mu^{(1)}(t) - (2c_2 \sin^2 \theta + c_4 \sin 2\theta) \nu_\mu^{(2)}(t) = 0$$

が要請される。これが恒等的に 0 であるためには、

$$c_3 = c_1 \cot \theta \quad (3.45a)$$

$$c_4 = -c_2 \tan \theta \quad (3.45b)$$

ここで初期条件を、

$$\nu_e(t_0) = 1$$

$$\nu_\mu(t_0) = 0$$

として式 (3.42) の連立方程式を式 (3.45) を用いて解くと、

$$c_1 = \frac{\nu_\mu^{(2)}(t_0)}{\nu_e^{(1)}(t_0)\nu_\mu^{(2)}(t_0) + \cot^2 \theta \nu_e^{(2)}(t_0)\nu_\mu^{(1)}(t_0)}$$

$$c_2 = \frac{\nu_\mu^{(1)}(t_0)}{\nu_e^{(2)}(t_0)\nu_\mu^{(1)}(t_0) + \tan^2 \theta \nu_e^{(1)}(t_0)\nu_\mu^{(2)}(t_0)}$$

係数が決定したので式 (3.44) に代入すると、

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t \rightarrow \infty)$$

$$= \frac{\tan^2 \theta \left| \nu_\mu^{(2)}(t_0) \right|^2 + \cot^2 \theta \left| \nu_\mu^{(1)}(t_0) \right|^2}{\tan^2 \theta \left| \nu_e^{(1)}(t_0) \right|^2 \left| \nu_\mu^{(2)}(t_0) \right|^2 + \cot^2 \theta \left| \nu_e^{(2)}(t_0) \right|^2 \left| \nu_\mu^{(1)}(t_0) \right|^2 + 2\Re \left(\nu_e^{(1)} \nu_e^{(2)*} \nu_\mu^{(1)*} \nu_\mu^{(2)} \right) (t_0)} \quad (3.46)$$

一般に $x \rightarrow \infty$ の漸近形は、

$$F(\alpha, \gamma; x) \rightarrow \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} g_1(\alpha, \gamma; x) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} g_2(\alpha, \gamma; x)$$

$$g_1(\alpha, \gamma; x) \rightarrow (-x)^{-\alpha}$$

$$g_2(\alpha, \gamma; x) \rightarrow e^x x^{\alpha - \gamma}$$

となるので $t_0 \rightarrow -\infty$ において適当な解を採用すると、

$$\begin{aligned} \left| \nu_e^{(1)}(t_0) \right|^2 &\rightarrow \left| \frac{\Gamma(1 + i\Delta_{12}r_0)}{\Gamma(1 + i\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta)} (ir_0 A_0 e^{-t/r_0})^{-i\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta} \right|^2 \\ &= \frac{\sinh(\pi\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta \sinh(\pi\Delta_{12}r_0)} e^{\pi\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (3.47a)$$

$$\begin{aligned} \left| \nu_e^{(2)}(t_0) \right|^2 &\rightarrow \left| \frac{\Gamma(1 - i\Delta_{12}r_0)}{\Gamma(1 - i\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta)} (ir_0 A_0 e^{-t/r_0})^{i\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta} \right|^2 \\ &= \frac{\sinh(\pi\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta \sinh(\pi\Delta_{12}r_0)} e^{-\pi\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (3.47b)$$

他の値も同様にして、

$$|\nu_\mu^{(1)}(t_0)|^2 \rightarrow \frac{\sinh(\pi\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta \sinh(\pi\Delta_{12}r_0)} e^{-\pi\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta} \quad (3.47c)$$

$$|\nu_\mu^{(2)}(t_0)|^2 \rightarrow \frac{\sinh(\pi\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta \sinh(\pi\Delta_{12}r_0)} e^{\pi\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta} \quad (3.47d)$$

$$(\nu_e^{(1)} \nu_e^{(2)*} \nu_\mu^{(1)*} \nu_\mu^{(2)}) (t_0) \rightarrow \frac{\sinh(\pi\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta) \sinh(\pi\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta \sinh^2(\pi\Delta_{12}r_0)} e^{\pi\Delta_{12}r_0 \cos 2\theta} \quad (3.47e)$$

式 (3.47) を式 (3.46) に代入すると、

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t \rightarrow \infty)$$

$$= \frac{\sin^2 \theta \sinh(\pi\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta) e^{\pi\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \sinh(\pi\Delta_{12}r_0 \cos^2 \theta) e^{-\pi\Delta_{12}r_0 \sin^2 \theta}}{\sinh(\pi\Delta_{12}r_0)} \quad (3.48)$$

これが露わに解いた生存確率である。この表式には既にトンネル型非断熱遷移確率の効果も繰り込まれているので、この時点では P_{jump} を露わに得られた訳ではない。

ここからは P_{jump} の露わな表式を得るために、断熱基底による時間発展を利用する²¹。まず初期条件として、 $t_0 = 0$ (もしくは $t_0 \rightarrow -\infty$) で ν_e が生成されたとする。式 (3.7) と同様に、

$$\tilde{\nu}_f(t) = U_m(t)\tilde{\nu}_i(t)$$

ここで $t \rightarrow \infty$ を考え、状態は真空中に接続しているとする (つまり $U_m \rightarrow U$)。このとき、共鳴域の直前までは $\tilde{\nu}_i$ は断熱的であるとする。この区間では式 (3.6) と同様に時間発展させると、

$$\nu_f(t \rightarrow \infty) = U \text{diag} \left(e^{-i \int_{t_r+\epsilon}^{\infty} \tilde{E}_i dt} \right) \tilde{\nu}_i(t_r + \epsilon)$$

ここで共鳴域を経た前後で、

$$\tilde{\nu}_i(t_r + \epsilon) \rightarrow S \tilde{\nu}_i(t_r - \epsilon)$$

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$|\alpha|^2 = 1 - P_{\text{jump}}$$

$$|\beta|^2 = P_{\text{jump}}$$

と状態がトンネル効果により遷移するので、

$$\nu_f(t \rightarrow \infty) = U \text{diag} \left(e^{-i \int_{t_r+\epsilon}^{\infty} \tilde{E}_i dt} \right) S \tilde{\nu}_i(t_r - \epsilon)$$

以降も断熱的な時間発展だとすると、

$$\begin{aligned} \nu_f(t \rightarrow \infty) &= U \text{diag} \left(e^{-i \int_{t_r+\epsilon}^{\infty} \tilde{E}_i dt} \right) S \text{diag} \left(e^{-i \int_{t_0}^{t_r-\epsilon} \tilde{E}_i dt} \right) \tilde{\nu}_i(t_0) \\ &= U \text{diag} \left(e^{-i \int_{t_r+\epsilon}^{\infty} \tilde{E}_i dt} \right) S \text{diag} \left(e^{-i \int_{t_0}^{t_r-\epsilon} \tilde{E}_i dt} \right) U_m(t_0) \tilde{\nu}_f(t_0) \end{aligned} \quad (3.49)$$

式 (3.49) を計算すると生存確率は、

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t \rightarrow \infty) &= \cos^2 \theta \left[(1 - P_{\text{jump}}) \cos^2 \theta_m(t_0) + P_{\text{jump}} \sin^2 \theta_m(t_0) \right] \\ &\quad + \sin^2 \theta \left[P_{\text{jump}} \cos^2 \theta_m(t_0) + (1 - P_{\text{jump}}) \sin^2 \theta_m(t_0) \right] \\ &= \cos^2 \theta_m(t_0) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta_m(t_0) \sin^2 \theta - P_{\text{jump}} \cos 2\theta_m(t_0) \cos 2\theta \end{aligned}$$

²¹非断熱遷移は共鳴点の十分近傍で生じるという近似が有効なことが、この手法の有用性を支えている。

これが非断熱遷移を加味した生存確率の表式である。 P_{jump} の値には P_{Zener} や P_{Landau} を割り当てることもできる。ここで太陽中心では $\tilde{\nu}_e$ が十分重い (つまり $\theta_m(t_0) \rightarrow \pi/2$) と近似²²すると、

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t \rightarrow \infty) \rightarrow \sin^2 \theta + P_{\text{jump}} \cos 2\theta \quad (3.50)$$

さて、ここで式 (3.50) を式 (3.48) と比較してみる。両式に等号を課せば、

$$P_{\text{exact}} = \frac{\exp\left[-\frac{\pi}{2}\gamma_m(1 - \tan^2 \theta)\right] - \exp\left[-\frac{\pi}{2}\gamma_m\left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{\sin^2 \theta}\right)\right]}{1 - \exp\left[-\frac{\pi}{2}\gamma_m\left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{\sin^2 \theta}\right)\right]}$$

が要請される。ここでも $F[n_e] = 1 - \tan^2 \theta$ は変更汎関数である。この表式は厳密解を近似解に落としたものになる訳だが、3種の P_{jump} を記述する表式の中で最も精度が高い。

以上が非断熱遷移の表式である。図 (3.9) には生存確率を図示した [1]。MeV スケール ($\Delta m^2 \sim 10^{-5} \text{ eV}^2$) のニュートリノにおいて、LMA (ここでは $\sin^2 \theta = 0.6$) の領域では完全な遷移を起こす。一方 SMA (ここでは $\sin^2 \theta = 0.006$) の領域では、エネルギーが上がると断熱条件が破れて遷移の揺り戻しが生じる。但し前述の通り、SMA の領域は既に排除されている。

図 (3.10) には $P_{\text{Zener}}, P_{\text{exact}}$ の振る舞いを記した。混合角には LMA の値を用いた。Extreme Non Adiabatic Transition (ENAT) が生じたとき P_{Zener} は完全に $P_{\text{jump}} \rightarrow 1$ に揺り戻してしまいが、 P_{exact} では $P_{\text{jump}} \rightarrow 0.7$ ほどに留まる。変更汎関数などの表式から明らかに、SMA においては両者に差異は無くなる。つまり、

$$\begin{cases} \theta \text{ が大きい} \\ \gamma_m \text{ が小さい} \end{cases}$$

ほど近似の精度の問題が立ち上がってくるのである。

²²この近似が正当であることは、実際に太陽中心の値を代入して $\theta_m(t_0)$ を計算すれば明らか。

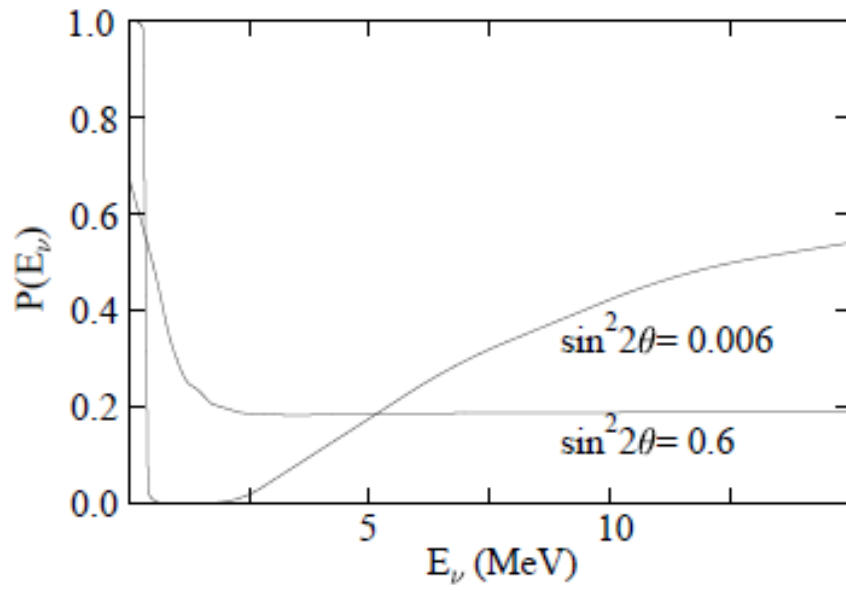


図 3.9: 太陽ニュートリノにおける生存確率

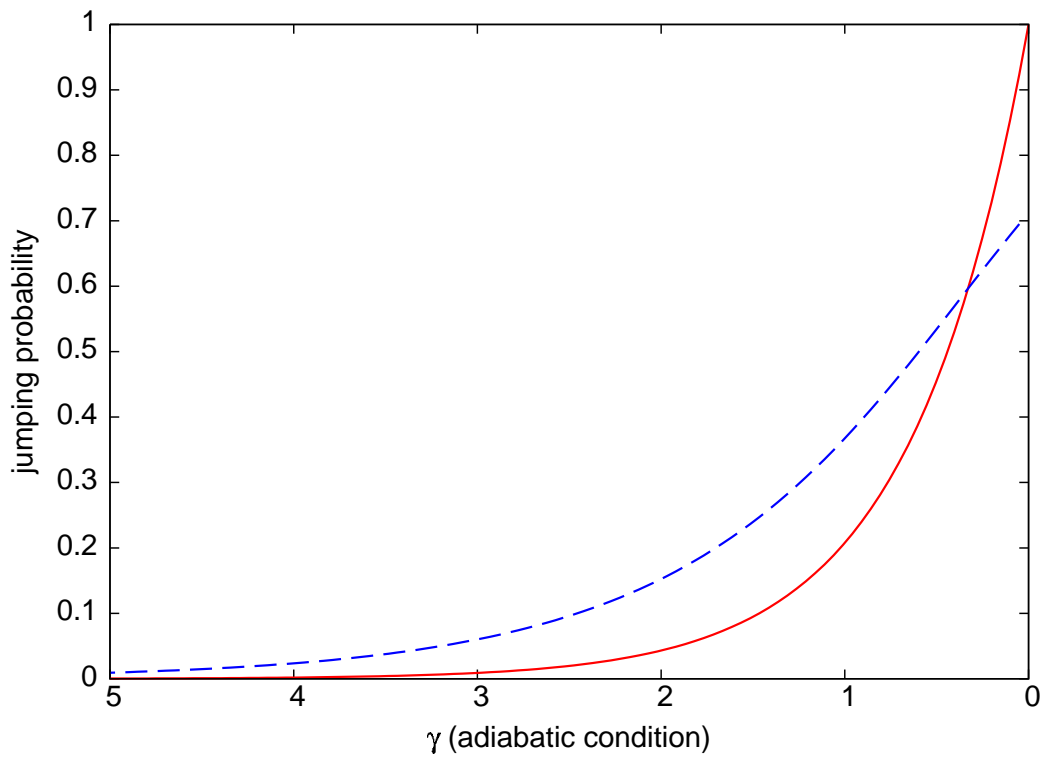


図 3.10: 各近似法による非断熱遷移確率の差異

3.4 3世代ニュートリノ振動

これまではニュートリノ振動を2世代近似により議論してきたが、本来ニュートリノは3世代で記述されるべきものである。本節では3世代ニュートリノの振動論を記述する。

3世代におけるMNS行列のパラメータは4つであり、

$$\begin{aligned}
 U &= U_{23}U_{13}U_{12} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

と記述されるのが標準である。以降は $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ 、 $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ とした略記を用いる。 θ_{ij} は混合角、 δ はCP非保存の位相である。これを用いて、

$$\nu_f = U_{fi}\nu_i$$

と書ける。以降は添え字の重複に縮約の意味を持たせる。

時間発展はユニタリー行列の性質を利用して、

$$\begin{aligned}
 \nu_\alpha(t) &= U_{\alpha i}(e^{-iEt})_{ij}\nu_j(0) \\
 &= U_{\alpha i}(e^{-iEt})_{ij}U_{j\beta}^*\nu_\beta(0)
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

$(e^{-iEt})_{ij}$ は $\text{diag}(e^{-iE_1t}, e^{-iE_2t}, e^{-iE_3t})$ の成分である。 $|\nu_\beta(0)|^2 = 1$ として、

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha\beta}(t) &= |U_{\alpha i}(e^{-iEt})_{ij}U_{j\beta}^*|^2 \\
 &= (U_{\alpha i}U_{i\beta}^*)(U_{\alpha j}U_{j\beta}^*)e^{-i\Delta_{ij}t} \\
 &= |U_{\alpha i}|^2|U_{i\beta}|^2 + \sum_{i \neq j} (U_{\alpha i}U_{i\beta}^*)(U_{\alpha j}U_{j\beta}^*)e^{-i\Delta_{ij}t}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

ここでユニタリー条件から、

$$\begin{aligned}
 |U_{\alpha i}U_{i\beta}|^2 &= \delta_{\alpha\beta} \\
 &= |U_{\alpha i}|^2|U_{i\beta}|^2 + \sum_{i \neq j} (U_{\alpha i}U_{i\beta}^*)(U_{\alpha j}U_{j\beta}^*)
 \end{aligned}$$

これを式 (3.52) に代入すると、

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(t) &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} (U_{\alpha i} U_{i\beta}^*) (U_{\alpha j} U_{j\beta}^*) (e^{-i\Delta_{ij}t} - 1) \\ &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} (U_{\alpha i} U_{i\beta}^*) (U_{\alpha j} U_{j\beta}^*) [\cos(\Delta_{ij}t) - i \sin(\Delta_{ij}t) - 1] \end{aligned}$$

半角の公式より、

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(t) &= \delta_{\alpha\beta} - 4\Re \sum_{i > j} (U_{\alpha i} U_{i\beta}^*) (U_{\alpha j} U_{j\beta}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta_{ij}t}{2} \right) \\ &\quad + 2\Im \sum_{i > j} (U_{\alpha i} U_{i\beta}^*) (U_{\alpha j} U_{j\beta}^*) \sin(\Delta_{ij}t) \quad (3.53) \end{aligned}$$

これが振動確率である。

3.4.1 3世代大気ニュートリノ

ここでは簡単化の目的のため、物質効果を加味しない。従って式 (3.53) を如何なる変更もせず使用する。例えば $P_{\mu e}$ の成分を露わにして書くと、

$$\begin{aligned} P_{\mu e} &= -4\Re \left[U_{\mu 1} U_{1e}^* U_{\mu 3}^* U_{3e} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{13}t}{2} \right) + U_{\mu 2} U_{2e}^* U_{\mu 3}^* U_{3e} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{23}t}{2} \right) \right] \\ &\quad + 2\Im \left[U_{\mu 1} U_{1e}^* U_{\mu 3}^* U_{3e} \sin(\Delta_{13}t) + U_{\mu 2} U_{2e}^* U_{\mu 3}^* U_{3e} \sin(\Delta_{23}t) \right] \end{aligned}$$

$\Delta_{13} \sim \Delta_{23}$ なので Δ_{23} の表記に統一すると、

$$\begin{aligned} P_{\mu e} &= 4\Re \left[s_{23}^2 s_{12}^2 c_{13}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta_{13}t}{2} \right) \right] - 2\Im \left[s_{23}^2 s_{13}^2 c_{13}^2 \sin(\Delta_{23}t) \right] \\ &= 4s_{23}^2 s_{12}^2 c_{13}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta_{13}t}{2} \right) \\ &= \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{23}t}{2} \right) \quad (3.54a) \end{aligned}$$

同様にして他の値は、

$$P_{e\mu} = P_{\mu e} \quad (3.54b)$$

$$P_{\tau e} = P_{\mu e} \quad (3.54c)$$

$$P_{\mu\tau} = \sin^2 2\theta_{23} \cos^4 \theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{23}t}{2} \right) \quad (3.54d)$$

大気ニュートリノでは $\nu_e : \nu_\mu \sim 1 : 2$ であったので、

$$P_{ex} = P_{ee} + 2P_{e\mu}$$

式 (3.54) を考慮して確率保存則から、

$$\begin{aligned}
P_{ex} &= 1 - P_{\mu e} - P_{\tau e} + 2P_{e\mu} \\
&= 1 - 2P_{\mu e} + 2P_{e\mu} \\
&= 1
\end{aligned}$$

精密な計算では $P_{ex} = 1$ から異なるかも知れないが、それでも $\theta_{13} \ll 1$ (つまり $P_{\mu e} \sim 0$) であることが分かっている。つまり2重の意味で ν_e の流出入は無く、大気ニュートリノの振動チャンネルは $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ であると言える。

$\theta_{13} \ll 1$ とすると、

$$P_{\mu\tau} = \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{23}t}{2} \right)$$

となり、2世代の式に帰着される。

3.4.2 3世代太陽ニュートリノ

ここでは太陽ニュートリノ理論の現状に則して、断熱条件を課した上で議論を進める。つまり行列が対角化可能であり、その固有値を導出することで時間発展を全て記述できる。固有値行列を \tilde{E} として、

$$\begin{aligned}
\tilde{E}\nu_i &= \left[\text{diag}(E) + U^{-1}\hat{A}U \right] \nu_i \\
\text{diag}(E) &\equiv \text{diag}(0, \Delta_{12}, \Delta_{13})
\end{aligned}$$

\hat{A} のハットは行列であることを強調する意図で用いた。固有値を求めるには、

$$0 = \det \left[\text{diag}(E) + U^{-1}\hat{A}U - \tilde{E} \right]$$

を計算すれば良い。これより固有値方程式は、

$$\begin{aligned}
0 = \tilde{E}^3 - (A + \Delta_{13} + \Delta_{12})\tilde{E}^2 \\
+ \left[\Delta_{12}\Delta_{13} + A\Delta_{13}c_{13}^2 + A\Delta_{12}(1 - s_{12}^2c_{13}^2) \right] \tilde{E} \\
- A\Delta_{12}\Delta_{13}c_{12}^2c_{13}^2 \quad (3.55)
\end{aligned}$$

$A, \Delta_{12} \ll 1$ による第0近似について式 (3.55) は、

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{E}^3 - \Delta_{13}\tilde{E}^2 \\
\therefore \tilde{E} &= 0, \Delta_{13} \quad (\tilde{E} = 0 \text{ は重解})
\end{aligned}$$

これらは3世代ニュートリノにおける高密度共鳴点 (higher resonance、図 (4.1) の左擬交叉点) と低密度共鳴点 (lower resonance、図 (4.1) の右擬交叉点) に相当する。つまり lower resonance は0に縮退してしまうほど小さい。

縮退を解くために、

$$\begin{aligned}\epsilon &= \Delta_{12}/\Delta_{13} \\ \eta &= A/\Delta_{13}\end{aligned}$$

とおくと式 (3.55) は $\lambda \equiv \tilde{E}/\Delta_{13}$ を用いて、

$$0 = \lambda^3 - (1 + \epsilon + \eta)\lambda^2 + [\epsilon + \eta c_{13}^2 + \epsilon\eta(1 - s_{12}^2 c_{13}^2)]\lambda - \epsilon\eta c_{12}^2 c_{13}^2 \quad (3.56)$$

と書ける。 $\lambda \sim \epsilon, \eta$ として 2 次まで採用すると、

$$\begin{aligned}0 &= \lambda^2 - (\epsilon + \eta c_{13}^2)\lambda + \epsilon\eta c_{12}^2 c_{13}^2 \\ \therefore \lambda &= \frac{1}{2} \left(\epsilon + \eta c_{13}^2 \pm \sqrt{(\epsilon + \eta c_{13}^2)^2 - 4\epsilon\eta c_{12}^2 c_{13}^2} \right) \quad (3.57)\end{aligned}$$

式 (3.57) を \tilde{E} に直すと、

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \frac{1}{2} \left(\Delta_{12} + A c_{13}^2 \pm \sqrt{(\Delta_{12} + A c_{13}^2)^2 - 4\Delta_{12} A c_{12}^2 c_{13}^2} \right) \\ \Delta \tilde{E}_{12} &= \sqrt{(\Delta_{12} + A c_{13}^2)^2 - 4\Delta_{12} A c_{12}^2 c_{13}^2} \\ &= \sqrt{(A c_{13}^2 - \Delta_{12} \cos 2\theta_{12})^2 + (\Delta_{12} \sin 2\theta_{12})^2}\end{aligned}$$

このとき物質中の混合角は、

$$\tan 2\theta_m = \frac{\Delta_{12} \sin 2\theta_{12}}{\Delta_{12} \cos 2\theta_{12} - A c_{13}^2}$$

となり、 $\theta_{13} \ll 1$ として式 (3.16) に帰着できる。

残った 1 つの固有値の導出を行う。 $\lambda = 1$ の周りに 1 次で展開すると、

$$\lambda = 1 + a\epsilon + b\eta \quad (3.58)$$

これを式 (3.56) に代入すると 1 次において、

$$\begin{aligned}0 &= 1 + 3(a\epsilon + b\eta) - (1 + \epsilon + \eta) - 2(a\epsilon + b\eta) + \epsilon + \eta c_{13}^2 \\ &= a\epsilon + b\eta - \eta + \eta c_{13}^2 \\ &= a\epsilon + b\eta - \eta s_{13}^2\end{aligned}$$

これを解くと、

$$a = 0 \quad (3.59a)$$

$$b = s_{13}^2 \quad (3.59b)$$

これで係数が決まったので式 (3.59) を式 (3.58) に代入すると、

$$\tilde{E}_3 = \Delta_{13} + A s_{13}^2$$

これで縮退のない全ての固有値が導出できた。

振動確率は $U_m(t) \equiv \tilde{U}$ が真空に接続することを考慮して、

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} \tilde{U}_{\alpha i} U_{i\beta}^* \left(e^{-i \int_0^t \Delta \tilde{E} dt} \right)_{ij} \tilde{U}_{\alpha j} U_{j\beta}^*$$

ここでも式 (3.51) と同様の略記を用いている。 $t \gg 1$ なので振動項を潰すと、

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} &= \sum_{i,j} \tilde{U}_{\alpha i} U_{i\beta}^* \delta_{ij} \tilde{U}_{\alpha j} U_{j\beta}^* \\ &= \tilde{U}_{\alpha i} U_{i\beta}^* \tilde{U}_{\alpha i} U_{i\beta}^* \end{aligned} \quad (3.60)$$

ここからは、Kimura–Takamura–Yokomakura (KTY) による双線形量の手法を活用する [32]。

$$X_i^{\alpha\beta} \equiv U_{\alpha i} U_{i\beta}^*$$

を定義すると式 (3.60) は、

$$P_{\alpha\beta} = \tilde{X}_i^{\alpha\alpha} X_i^{\beta\beta}$$

となる。特に、

$$\begin{aligned} P_{ee} &= \tilde{X}_1^{ee} X_1^{ee} + \tilde{X}_2^{ee} X_2^{ee} + \tilde{X}_3^{ee} X_3^{ee} \\ &= c_{13}^2 c_{12}^2 \tilde{X}_1^{ee} + c_{13}^2 s_{12}^2 \tilde{X}_2^{ee} + s_{13}^2 \tilde{X}_3^{ee} \end{aligned} \quad (3.61)$$

である。ここでユニタリー条件より、

$$\delta_{ee} = \tilde{X}_1^{ee} + \tilde{X}_2^{ee} + \tilde{X}_3^{ee} \quad (3.62a)$$

さらに有益な量として、

$$\begin{aligned} [U \text{diag}(E) U^{-1} + A]_{ee} &= \tilde{U}_{ei} \tilde{E}_{ij} \tilde{U}_{je}^* \\ &= \tilde{E}_1 \tilde{X}_1^{ee} + \tilde{E}_2 \tilde{X}_2^{ee} + \tilde{E}_3 \tilde{X}_3^{ee} \end{aligned} \quad (3.62b)$$

を与えておく。さらにこれを 2 乗した量として、

$$\begin{aligned} [U \text{diag}(E) U^{-1} + A]_{ee}^2 &= \tilde{U}_{ei} (\tilde{E})_{ij}^2 \tilde{U}_{je}^* \\ &= \tilde{E}_1^2 \tilde{X}_1^{ee} + \tilde{E}_2^2 \tilde{X}_2^{ee} + \tilde{E}_3^2 \tilde{X}_3^{ee} \end{aligned} \quad (3.62c)$$

を計算しておく。式 (3.62) をまとめると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_3 \\ \tilde{E}_1^2 & \tilde{E}_2^2 & \tilde{E}_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \end{bmatrix}_{ee} = \begin{bmatrix} 1 \\ U \text{diag}(E) U^{-1} + A \\ [U \text{diag}(E) U^{-1} + A]^2 \end{bmatrix}_{ee}$$

と書ける [33]。これには逆行列が存在して、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \end{bmatrix}_{ee} \\ &= \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{12}\Delta\tilde{E}_{23}\Delta\tilde{E}_{13}} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{E}_{23}\tilde{E}_2\tilde{E}_3 & -\Delta\tilde{E}_{23}(\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3) & \Delta\tilde{E}_{23} \\ \Delta\tilde{E}_{13}\tilde{E}_1\tilde{E}_3 & -\Delta\tilde{E}_{13}(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_3) & \Delta\tilde{E}_{13} \\ \Delta\tilde{E}_{12}\tilde{E}_1\tilde{E}_2 & -\Delta\tilde{E}_{12}(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2) & \Delta\tilde{E}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U\text{diag}(E)U^{-1} + A \\ [U\text{diag}(E)U^{-1} + A]^2 \end{bmatrix}_{ee} \end{aligned}$$

と書ける。ここで特に、

$$\begin{aligned} [U\text{diag}(E)U^{-1} + A]_{ee} &= E_i X_i^{ee} + A \\ [U\text{diag}(E)U^{-1} + A]_{ee}^2 &= E_i^2 X_i^{ee} + 2AE_i X_i^{ee} + A^2 \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3^{ee} &= \frac{\tilde{E}_1\tilde{E}_2}{\Delta\tilde{E}_{23}\Delta\tilde{E}_{13}} - \frac{(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)}{\Delta\tilde{E}_{23}\Delta\tilde{E}_{13}} (E_i X_i^{ee} + A) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{23}\Delta\tilde{E}_{13}} (E_i^2 X_i^{ee} + 2AE_i X_i^{ee} + A^2) \end{aligned}$$

ここで $\tilde{E}_1 \sim \Delta\tilde{E}_{23} \sim \Delta\tilde{E}_{13} \sim E_3$ が他より十分大きいとして第 0 近似を取ると、

$$\tilde{X}_3^{ee} \sim X_3^{ee} \quad (3.63a)$$

同様にすると、

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{ee} &\sim \frac{\tilde{E}_2}{\Delta\tilde{E}_{12}} (1 - X_3^{ee}) - \frac{\tilde{E}_3}{\Delta\tilde{E}_{12}\Delta\tilde{E}_{13}} (E_i X_i^{ee} + A) + \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{12}} (E_3^2 X_3^{ee} + 2AX_3^{ee}) \\ &\sim \frac{\tilde{E}_2}{\Delta\tilde{E}_{12}} (1 - X_3^{ee}) - \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{12}} (\Delta E_{12} X_2^{ee} + A s_{13}^2 X_3^{ee} + A - 2AX_3^{ee}) \end{aligned}$$

ここで極大項の差分については第 1 近似を採用した。さらに、

$$\tilde{E}_2 = \frac{1}{2}(\Delta E_{12} + A c_{13}^2 + \Delta\tilde{E}_{12})$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{ee} &= \frac{1}{2\Delta\tilde{E}_{12}} \left\{ (1 - X_3^{ee}) \Delta\tilde{E}_{12} + (1 - X_3^{ee} - 2X_2^{ee}) \Delta E_{12} + A c_{13}^2 (1 - X_3^{ee}) \right. \\ &\quad \left. - 2A [1 + (X_3^{ee})^2 - 2X_3^{ee}] \right\} \\ &= \frac{1 - X_3^{ee}}{2\Delta\tilde{E}_{12}} \left[\Delta\tilde{E}_{12} + (1 - 2s_{12}^2) \Delta E_{12} + A c_{13}^2 - 2A(1 - X_3^{ee}) \right] \\ &= \frac{1 - X_3^{ee}}{2\Delta\tilde{E}_{12}} \left[\Delta\tilde{E}_{12} + \Delta E_{12} \cos 2\theta_{12} - A(1 - X_3^{ee}) \right] \quad (3.63b) \end{aligned}$$

同様に \tilde{E}_1 を代入して、

$$\tilde{X}_2^{ee} = \frac{1 - X_3^{ee}}{2\Delta\tilde{E}_{12}} \left[\Delta\tilde{E}_{12} - \Delta E_{12} \cos 2\theta_{12} + A(1 - X_3^{ee}) \right] \quad (3.63c)$$

式 (3.61) に式 (3.63) を代入すると、

$$\begin{aligned} P_{ee} &= c_{13}^2 \left(c_{12}^2 \tilde{X}_1^{ee} + s_{12}^2 \tilde{X}_2^{ee} \right) + s_{13}^2 X_3^{ee} \\ &= s_{13}^2 + \frac{1}{2} c_{13}^2 (1 - X_3^{ee}) + c_{13}^2 \cos 2\theta_{12} \frac{1 - X_3^{ee}}{2\Delta\tilde{E}_{12}} [\Delta E_{12} \cos 2\theta_{12} - A(1 - X_3^{ee})] \\ &= s_{13}^2 + \frac{1}{2} c_{13}^2 \left(1 + \cos 2\theta_{12} \frac{\Delta E_{12} \cos 2\theta_{12} - A c_{13}^2}{\Delta\tilde{E}_{12}} \right) \end{aligned}$$

これも $\theta_{13} \ll 1$ として、2世代の式に帰着できる。

以上が3世代における振動確率の表式である。また θ_{13} は十分小さいことが分かっており、 $\theta_{13} \ll 1$ として2世代の表式に近似できることも確認できた。

3.4.3 混合角 θ_{13} の探索

現在ニュートリノ振動のパラメータにおいて未知となっているのは、 θ_{13} 、 δ の2つ²³のみである。

「CHOOZ 実験」ではフランスとベルギーの国境近くにある CHOOZ 原子炉の近くに液体シンチレータを用いた検出器を設置して、 θ_{13} によるニュートリノ振動を観測した。これは「原子炉ニュートリノ実験」であり、生成された $\bar{\nu}_e$ の減少を観測する消失実験である。従って実験原理は KamLAND 実験と同様であり、L/E の値を θ_{13} 探索用に調整したものである。この実験から、

$$\sin^2 2\theta_{13} \leq 0.1$$

の上限値が与えられた [44]。

²³パラメータ以外では、 $\text{sgn}(\Delta m_{13}^2)$ や混合角の縮退、ニュートリノ粒子自体の性質 (Majorana 粒子か Dirac 粒子か) も未解決問題である。

第4章 ICAの検証

本章からが本研究の主題になる。内容は3世代ニュートリノの非断熱遷移論である。現状では3準位における非断熱遷移確率の定式化は、特定の模型を除いて達成されていない。そこで用いられるのがICAと呼ばれる近似法である。これは図(4.1)で見られるように共鳴点が2つ以上あるとき、個々の点が十分離れていて独立であると近似する手法である。つまり個々の点は局所的に見て2準位であるので、それぞれに P_{jump} を割り当てたものを掛け合わせて値を得るのである。

ところが式(3.15)から分かるように、エネルギーが上がると擬交叉点も近づいていく。2点が(距離について)十分に離れていることを独立性の根拠とすると、その条件下でのICAの有効性は断言できない。これを検証することが本研究の目的である。そのために、まずはICAによって得られる形式解を挙げておく。ICA有効の是非の評価は、これを数値計算結果と比較して行った。

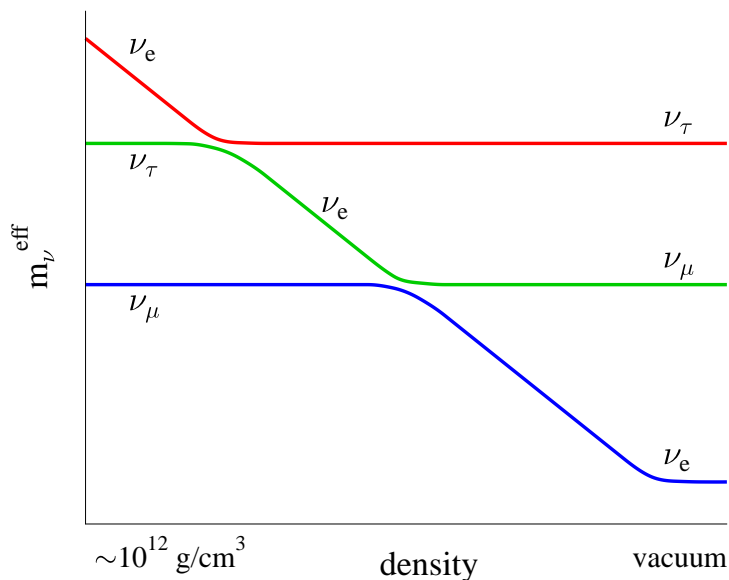


図 4.1: 3準位でのエネルギーダイアグラム [1]

4.1 解析の手法

ICA では $\tilde{\nu}_3 \rightarrow \tilde{\nu}_2 (\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$ 間の非断熱遷移に相当する \hat{P}_H と、 $\tilde{\nu}_2 \rightarrow \tilde{\nu}_1 (\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ 間の非断熱遷移に相当する \hat{P}_L の掛け合わせとなる。このとき式 (3.49) と同様の計算から、

$$\begin{aligned} P_{ee} &= (|U|^2)_{ei} (\hat{P}_{\text{jump}})_{ij} (|\tilde{U}|^2)_{je} \\ &= (|U|^2)_{ei} (\hat{P}_L \hat{P}_H)_{ij} (|\tilde{U}|^2)_{je} \end{aligned}$$

$$\hat{P}_L = \begin{pmatrix} 1 - P_L & P_L & 0 \\ P_L & 1 - P_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_H & P_H \\ 0 & P_H & 1 - P_H \end{pmatrix}$$

となる。 ν_e の生成点では $\tilde{\nu}_e$ が十分重たいとすると、

$$\begin{aligned} |\tilde{U}_{1e}|^2 &\sim 0 \\ |\tilde{U}_{2e}|^2 &\sim 0 \\ |\tilde{U}_{3e}|^2 &\sim 1 \end{aligned}$$

なので結局、

$$P_{ee} = |U_{e1}|^2 P_L P_H + |U_{e2}|^2 P_H (1 - P_L) + |U_{e3}|^2 (1 - P_H) \quad (4.1)$$

となる。これが ICA から要請される形式解である。

ニュートリノ振動論では通常、 P_L, P_H に 2 世代近似の表式を用いる。波動関数を再定義することにより lower resonance では、

$$\begin{aligned} H_L &= U_{12} \text{diag}(E) U_{12}^\dagger + U_{13}^\dagger U_{23}^\dagger \hat{A} U_{23} U_{13} \\ &= \begin{pmatrix} s_{12}^2 \Delta_{12} + A c_{13}^2 & \frac{\Delta_{12}}{2} \sin 2\theta_{12} & \frac{A}{2} \sin 2\theta_{13} \\ \frac{\Delta_{12}}{2} \sin 2\theta_{12} & c_{12}^2 \Delta_{12} & 0 \\ \frac{A}{2} \sin 2\theta_{13} & 0 & \Delta_{13} + A s_{13}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで $A \sin 2\theta_{13} \ll \Delta_{13}$ を条件として、2 世代の \tilde{H}_f の表式に帰着できる。

一方で higher resonance は、

$$\begin{aligned}
H_H &= U_{13}U_{12} \text{diag}(E)U_{12}^\dagger U_{13}^\dagger + U_{23}^\dagger \hat{A}U_{23} \\
&= \begin{pmatrix} s_{12}^2 \Delta_{12} \cos 2\theta_{13} + A & \frac{\Delta_{12}}{2} c_{13} \sin 2\theta_{12} & \frac{1}{2}(\Delta_{13} - s_{12}^2 \Delta_{12}) \sin 2\theta_{13} \\ \frac{\Delta_{12}}{2} c_{13} \sin 2\theta_{12} & c_{12}^2 \Delta_{12} - s_{13}^2 s_{12}^2 \Delta_{12} - s_{13}^2 \Delta_{13} & -\frac{\Delta_{12}}{2} s_{13} \sin 2\theta_{12} \\ \frac{1}{2}(\Delta_{13} - s_{12}^2 \Delta_{12}) \sin 2\theta_{13} & -\frac{\Delta_{12}}{2} s_{13} \sin 2\theta_{12} & \Delta_{13} \cos 2\theta_{13} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで $\Delta_{12} \sin 2\theta_{12} \ll \Delta_{13}$ を条件として、2世代の \tilde{H}_f の表式に帰着できる。

これらを受けて本研究では「ICA」と呼ばれる近似法に、

$$\begin{cases} \hat{P}_{\text{jump}} \text{の内訳における接続の有効性} \\ 2 \text{世代近似による } P_L, P_H \text{の表式の有効性} \end{cases}$$

という2つの意味を付与し、これらを念頭に置いて検証を行った。

計算の際に代入すべき各パラメータについては、まずは大気-太陽ニュートリノ実験から得られた値を踏襲した。決定されていないパラメータ θ_{13} には、 $\sin^2 2\theta_{13} = 1 \times 10^{-6}$ の値を付与した。この小さな値を選んだのは、人工的に断熱条件を破るためである。加えて、 P_{Zener} が有効であるという簡便性も意図している。

また、3世代解析なので CP 位相 (δ) の自由度も加味する必要がある。しかし一方で、 P_{ee} を評価する際に限り δ の効果は立ち現れない [34]。従って $\nu_e \rightarrow \nu_e$ のチャンネルのみを評価した。

各々の交叉点における P_{jump} の表式については、SMA になる higher resonance に $P_H = P_{\text{Zener}}$ を、LMA になる lower resonance に $P_L = P_{\text{exact}}$ を用いた。

さらに $n_e(t)$ には便宜上、

$$n_e = 100 \times n_{e\odot}$$

を用いた。これには $\tilde{\nu}_e(0) \sim \tilde{\nu}_3(0)$ の近似に対する根拠を確固たるものとし、 P_{jump} の表式を簡便化する意図がある。このとき、 $n_e/\dot{n}_e = \text{const.}$ となる。

4.2 数値計算結果

図 (4.2) は、 $E_\nu = 50 \text{ MeV}$ でのダイアグラムを図示したものである。 $n_e(t)$ は指数関数であるがこれが線形に見えてしまうほど、一見して交叉点が「近い」ように見える。このとき ICA では各点を独立と近似して、それぞれの点に個々の P_{jump} を割り当ててしまう訳である。この条件下での ICA の有効性は未だ確認されていない。本節では、式 (4.1) として得られる形式解を数値計算と比較した結果を記す。ここで数値計算の対象となる式は如何なる変換も要せず、

$$i \frac{d\tilde{\nu}_f}{dt} = \tilde{H}_f(t) \tilde{\nu}_f(t)$$

である。これを単純にルンゲクッタ法で解けば良い。

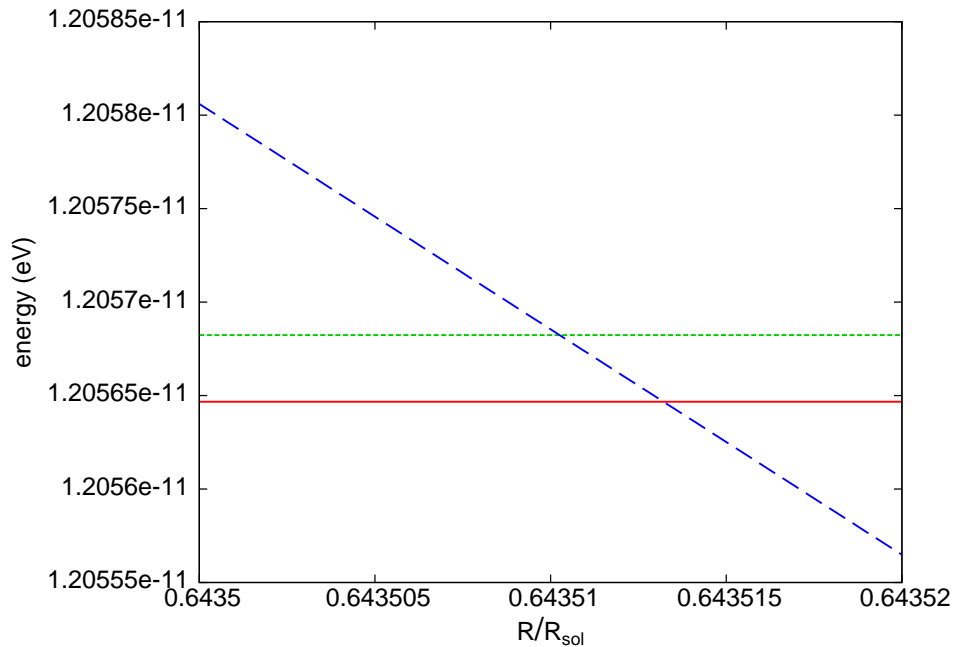


図 4.2: 3 準位におけるエネルギーダイアグラム

図 (4.3) は、数値計算結果と形式解を比較したものである。エネルギーが高いほど2点の交叉点は近づいていく訳だが、数値計算結果とICAに基づく形式解に差異は見受けられなかった。つまり一見して交叉点は近接しているが、各点を独立とするICAが有効であることが分かった。また、計算結果とずれている曲線は P_{Zener} のみを用いた形式解である。

次に $\sin^2 2\theta_{13} = 0.08$ に対する検証を行った。これを用いた結果が図 (4.4) である。この際もICAの有効性を尊重する結果となった。

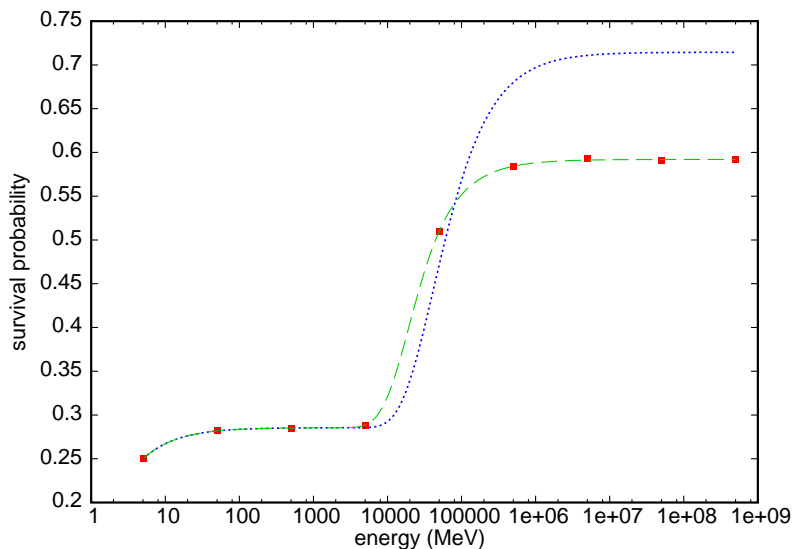


図 4.3: ICA から得る形式解と数値計算結果の比較

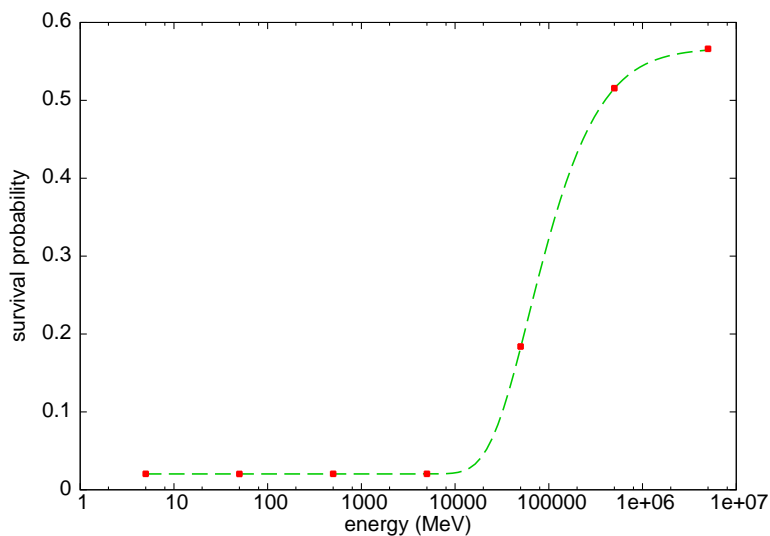


図 4.4: ICA から得る形式解と数値計算結果の比較 ($\sin^2 2\theta_{13} = 0.08$)

4.3 幾つかの考察過程

4.3.1 ニュートリノ-核子相互作用の効果

始めに検証したエネルギー領域は $5\text{MeV} \leq E_\nu \leq 500\text{TeV}$ であるが、エネルギーが上がるとニュートリノ反応における主たる機構も変化する。つまり従来の物質効果だけでは、ニュートリノ振動を正確に議論できなくなるのである。ここでは核子との相互作用による効果を考慮し、ニュートリノが物質に対して不透明になったことによる「吸収効果」を議論する。

単位入射粒子数当たりの反応数 (/sec) は、

$$\begin{aligned} N &= L \times \sigma(\nu N) \\ &= N_A \times \rho \times \sigma \times R \\ \sigma(\nu N) &= 0.68 \times 10^{-38} \times E \quad (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

ここで物質密度を $\rho = n_e(0) = \text{const.}$ として $N = 1$ となる飛程距離を見積もると、

$$\begin{aligned} R &\sim 2.5 \times 10^{-1} \text{ km (1PeV)} \\ &\sim 2.5 \times 10^2 \text{ km (1TeV)} \\ &\sim 2.5 \times 10^5 \text{ km (1GeV)} \end{aligned}$$

ニュートリノ-核子相互作用を考慮すると、少なくともエネルギーが TeV スケールのニュートリノは物質中で止まってしまう。従って $E_\nu > 1\text{TeV}$ のニュートリノは、本研究の対象外である。

4.3.2 ICA の破れと共鳴域の重複との関連性

図 (4.5) は $\sin^2 2\theta_m$ を、 $E_\nu = 700 \text{ MeV}$ について図示したものである。これは式 (3.16) と同じく共鳴効果 (MSW 効果) の挙動の指標となる、2 世代近似における振動振幅である。左のピークが higher resonance に、右のピークが lower resonance に相当する。これは近似的¹に、

$$\sin^2 2\tilde{\theta}_{ij} = \frac{(\Delta_{ij} \sin 2\theta_{ij})^2}{(\Delta_{ij} \cos 2\theta_{ij} - A)^2 + (\Delta_{ij} \sin 2\theta_{ij})^2} \quad (4.2)$$

として与えられる。ここで $y \equiv A/\Delta_{12}$, $\alpha \equiv \Delta_{13}/\Delta_{12}$ を定義すると、

$$\begin{aligned} \sin^2 2\tilde{\theta}_{12} &= \frac{\sin^2 2\theta_{12}}{(\cos 2\theta_{12} - y)^2 + \sin^2 2\theta_{12}} \\ \sin^2 2\tilde{\theta}_{13} &= \frac{(\alpha \sin 2\theta_{13})^2}{(\alpha \cos 2\theta_{13} - y)^2 + (\alpha \sin 2\theta_{13})^2} \end{aligned}$$

¹厳密には、 $\Delta_{13} \rightarrow \Delta_{13} - s_{12}^2 \Delta_{12}$ にする必要がある。現在のパラメータでは、 Δ_{12} を含む項を落としても問題ない。

と書き直すことができる。つまり交叉点はそれぞれ、

$$y_H = \alpha \cos 2\theta_{13}$$

$$y_L = \cos 2\theta_{12}$$

で離れたままエネルギーによらず一定である。一方で共鳴域の半値半幅も、

$$\Gamma_H = \alpha \sin 2\theta_{13}$$

$$\Gamma_L = \sin 2\theta_{12}$$

でエネルギーに依らず一定である。従ってエネルギーを上げて共鳴域が重なることはなく、この事実がICAの有効性を支えていると考えられる。現状では、この事実を根拠としたICAの有効性も主張されている。

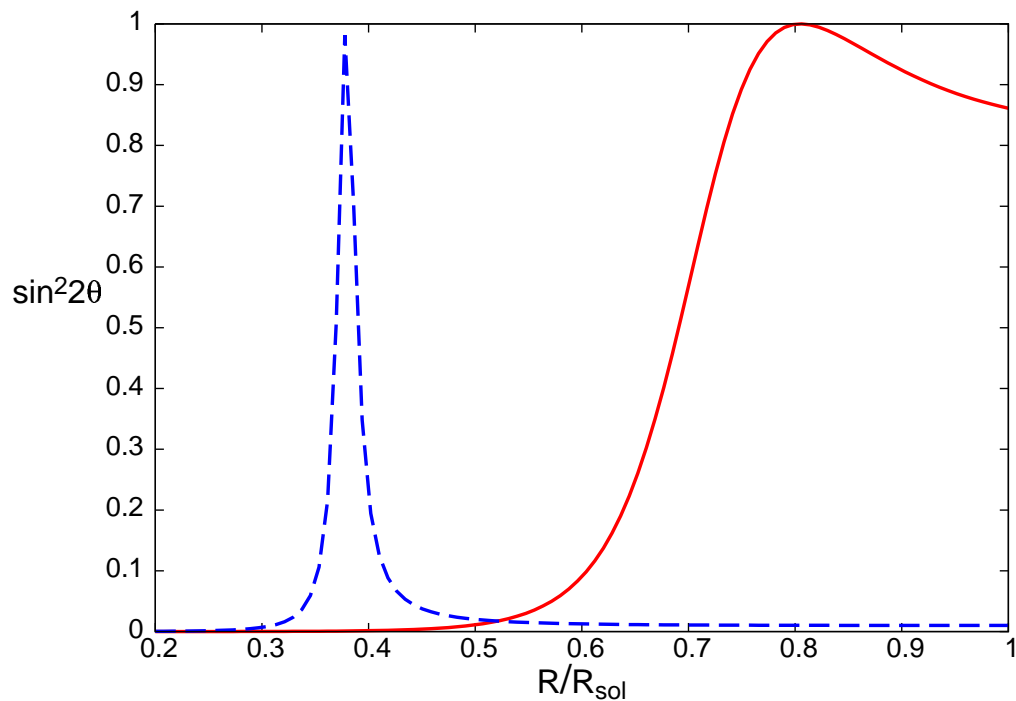


図 4.5: lower-higher resonance の振る舞い

そこで今度は、

$$\Delta'_{13} = 0.04 \times \Delta_{13} \sim \Delta_{12}$$

を用いて、図 (4.6) のように人工的に共鳴域を重ねた上で先と同様の計算比較を行った。その結果が図 (4.7) である。ここでも形式解と数値計算結果に差異は見られず、さらに ICA の有効性を尊重する結果となった。

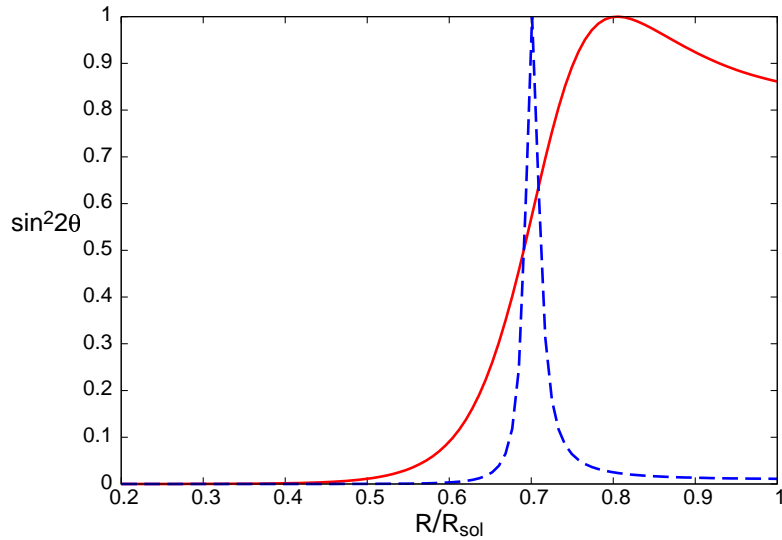


図 4.6: 変更を加えた lower-higher resonance の振る舞い

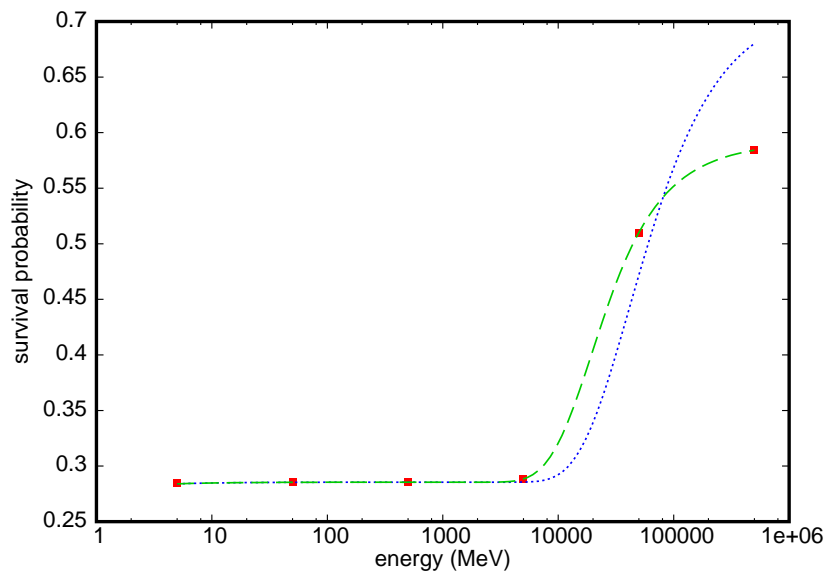


図 4.7: ICA から得る形式解と数値計算結果の比較 ($\Delta_{13} \rightarrow \Delta'_{13}$)

共鳴域の重複は、 θ_{13} を大きく取ることでも実現できる。

$$\theta_{13} = \pi/6$$

としたときの結果を図 (4.8) に示す。この際も、形式解と数値計算結果に差異は見られなかった。この結果により、ICA が共鳴域の重複とは直接的な関係が無い近似法であることが分かった。

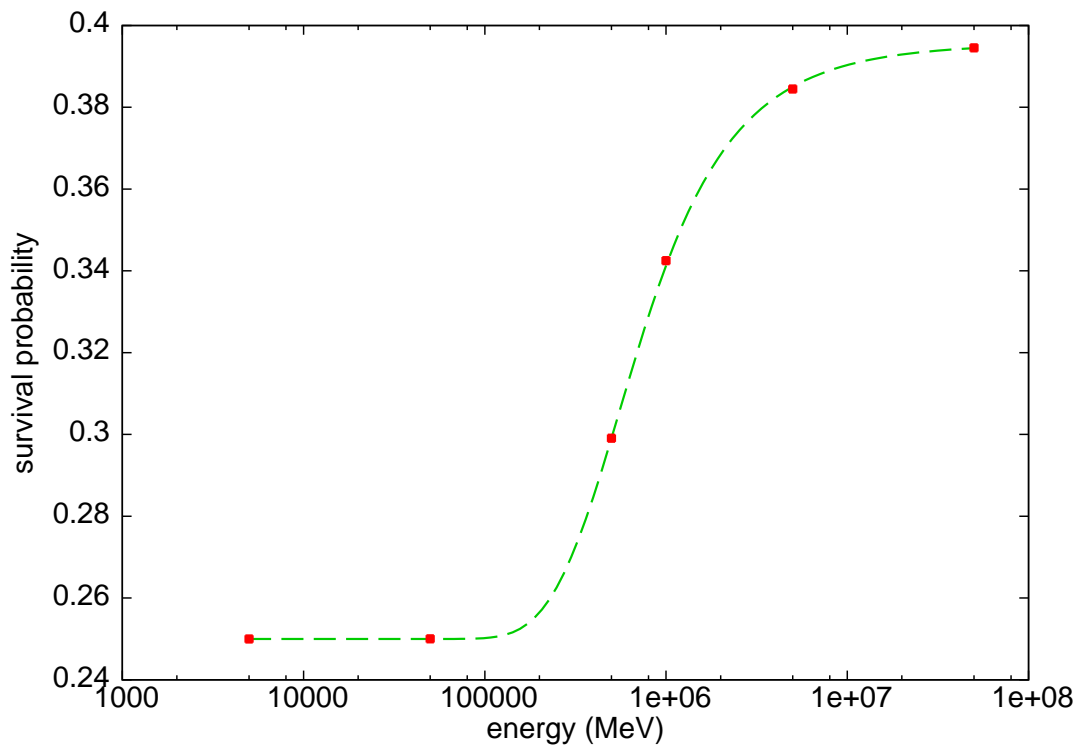


図 4.8: ICA から得る形式解と数値計算結果の比較 ($\theta_{13} = \pi/6$)

4.3.3 ICA の破れと $\theta_{13}, \Delta m_{13}^2$ との関連性

今回の研究で、式 (4.1) によって記述できない例があることを発見した。その一例を、図 (4.9) に示す。パラメータは、

$$\begin{aligned}\Delta'_{13} &= 0.04 \times \Delta_{13} \\ \sin^2 2\theta_{13} &= 0.08\end{aligned}$$

としたものである。

lower resonance での断熱条件が破れるのは、 $5 \times 10^3 \text{MeV}$ 以上のエネルギーにおいてである。一方で図 (4.9) は、 P_H の寄与しかないエネルギー領域においても従来の表式が適用できていないことを示している。これは「接続」に問題があったとするよりも、「2世代近似」が破れたことが原因だとする解釈の方が妥当である。

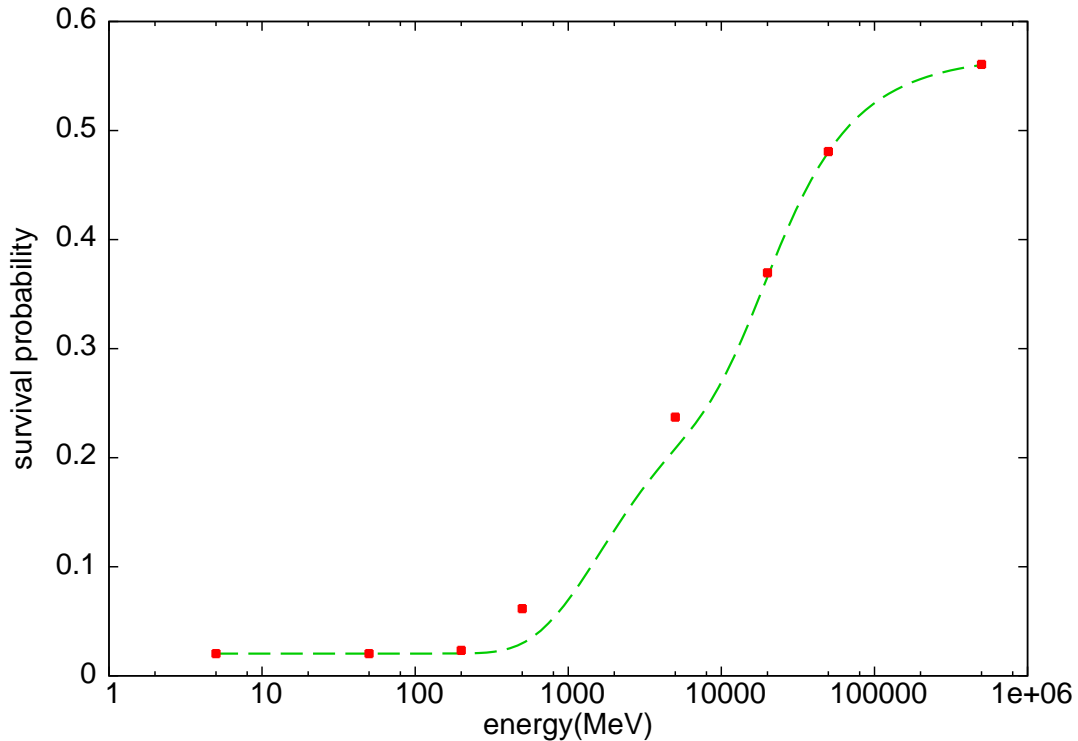


図 4.9: ICA の破れ ($\Delta'_{13} = 0.04 \times \Delta_{13}, \sin^2 2\theta_{13} = 0.08$)

表 (4.1) には、 $\alpha_{13} \equiv \Delta'_{13}/\Delta_{13}$ と $\sin^2 2\theta_{13}$ の各組み合わせにおける ICA 適用の是非を記した。生存確率における形式解と数値計算結果の差が 0.005 未満のもの

表 4.1: ICA による形式解と数値計算結果の差

α_{13}	0.04	0.1	0.5	1.0
$\sin^2 2\theta_{13}$				
0.75	0.006	0.000	0.000	0.000
0.08	0.048	0.000	—	0.000
10^{-6}	0.000	—	—	0.000

はその値を 0 とし、ICA が有効であるとした。

結果は Δm_{13}^2 が小さいとき、 $\sin^2 2\theta_{13}$ が大きいときに式 (4.1) が無効となることを示していた。これはもちろん、「2 世代近似」が破れる条件と対応している。

また、ICA の破れを次のように解釈することもできる。3 世代の場合について式 (3.20) に相当する表式は、

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(t) \\ \tilde{\nu}_2(t) \\ \tilde{\nu}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & -i\dot{\tilde{\theta}}_{12} & -i\tilde{c}_{12}\dot{\tilde{\theta}}_{13} \\ i\dot{\tilde{\theta}}_{12} & \tilde{E}_2 & i\tilde{s}_{12}\dot{\tilde{\theta}}_{13} \\ i\tilde{c}_{12}\dot{\tilde{\theta}}_{13} & -i\tilde{s}_{12}\dot{\tilde{\theta}}_{13} & \tilde{E}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(t) \\ \tilde{\nu}_2(t) \\ \tilde{\nu}_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

と考えることができる。 P_L, P_H はそれぞれ左上、右下の 2×2 行列における非断熱遷移を記述するものである。ICA 有効性の評価とは、対角項に対する $H_{13}(H_{31})$ の比だと解釈することができる。そこで ICA 有効性を評価する指標として、

$$\kappa_L \equiv \left(\frac{d\tilde{\theta}_{13}}{dt} / \frac{\Delta\tilde{E}_{12}}{2} \right)_L$$

というパラメータを新たに定義した。この評価は lower resonance における $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$ 間のトンネル型遷移が生じる際における、 $\nu_1 \leftrightarrow \nu_3$ 間の遷移に対応する寄与の評価を意味する。エネルギーを $\gamma_L = 1$ に固定した際の κ_L の評価を、図 (4.10) と図 (4.11) に示す。等高線は内側から順に、 $\kappa_L = 1.0, 0.5, 0.1$ を示す線である。 κ_L が大きいほど、2 世代間の非断熱遷移のみが寄与するという近似の破れが大きいことを意味する。この結果は、表 (4.1) による ICA の破れを再現した。

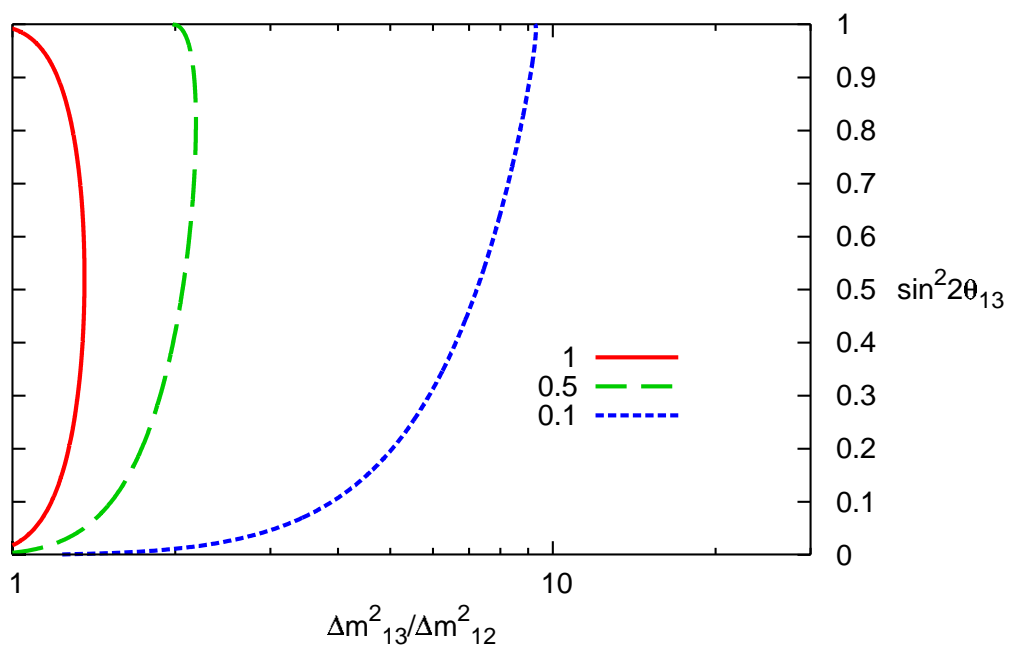


図 4.10: $\kappa_L = 1.0, 0.5, 0.1$ の等高線 (片対数プロット)

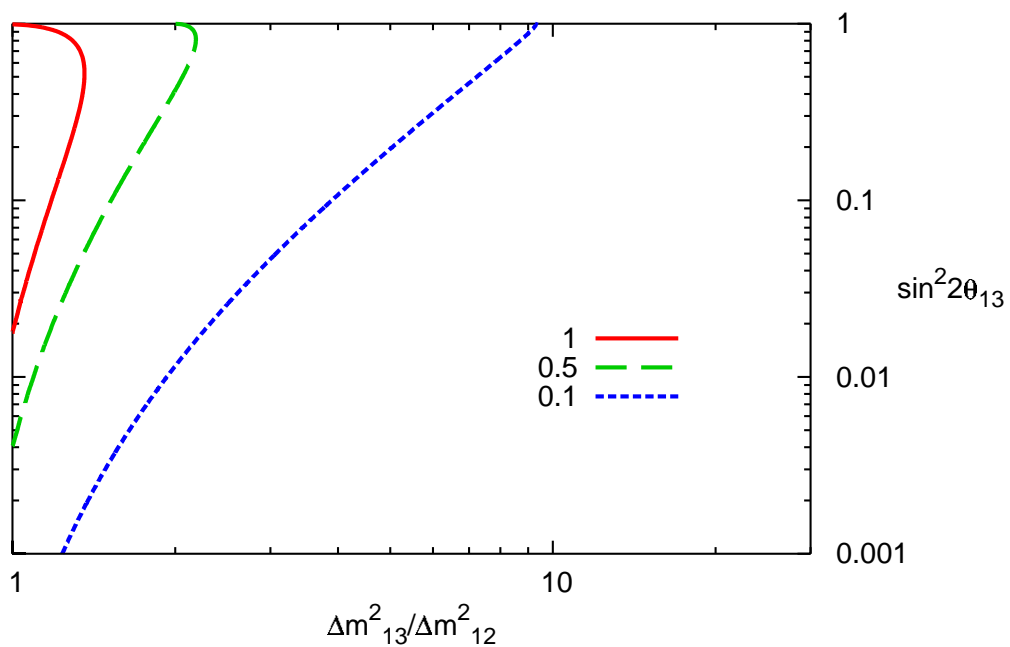


図 4.11: $\kappa_L = 1.0, 0.5, 0.1$ の等高線 (両対数プロット)

$\Delta \equiv \Delta_{13} - s_{12}^2 \Delta_{12}$ を用いて κ_L^{-1} を露わに書くと、

$$\begin{aligned}\kappa_L^{-1} &= \Delta_{12} \sin 2\theta_{12} \left/ \frac{\dot{A} \sin^2 2\tilde{\theta}_{13}}{\Delta \sin 2\theta_{13}} \right|_L \\ &= \Delta \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \left/ \frac{(\Delta \sin 2\theta_{13})^2 \cos 2\theta_{12}}{(\Delta \cos 2\theta_{13} - \Delta_{12} \cos 2\theta_{12})^2 + (\Delta \sin 2\theta_{13})^2} \left(\frac{\dot{n}_e}{n_e} \right)_L \right. \\ &= \frac{\Delta \sin 2\theta_{12}}{\cos 2\theta_{12} (\dot{n}_e/n_e)_L} \times \frac{(\cos 2\theta_{13} - (\Delta_{12}/\Delta) \cos 2\theta_{12})^2 + \sin^2 2\theta_{13}}{\sin 2\theta_{13}}\end{aligned}$$

エネルギーを $\gamma_L = 1$ に固定すると、

$$\kappa_L^{-1}(E; \gamma_L = 1) = \left(\frac{\Delta}{\Delta_{12}} \right) \frac{(\cos 2\theta_{13} - (\Delta_{12}/\Delta) \cos 2\theta_{12})^2 + \sin^2 2\theta_{13}}{\sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13}}$$

同様の評価を higher resonance においても考えることができる。 κ_L と同様にして $\kappa_H(E; \gamma_H = 1)$ を定義すると、

$$\kappa_H^{-1}(E; \gamma_H = 1) = \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta} \right) \frac{((\Delta/\Delta_{12}) \cos 2\theta_{13} - \cos 2\theta_{12})^2 + \sin^2 2\theta_{12}}{\sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13}}$$

となる。これらはポテンシャルの関数形によらず、「2世代近似」のパラメータに支配されていることが分かる。

つまり本研究で検証したICAの有効範囲は、共鳴域の非重複性ではなく単に「2世代近似の有効性」によって決まることが分かった。

4.3.4 ニュートリノ–ニュートリノ相互作用の効果

3準位交叉が生じるほどの高密度物質中ではニュートリノ自身の密度も十分大きいと考えられ、その際にはニュートリノ–ニュートリノ相互作用を加味する必要性が生じる [38]。この効果を考える場合は \tilde{H}_f の非対角項にも時間依存性が現れ、 n_e のみがある場合とは様相が大きく異なる。この効果を加味した上での非断熱遷移確率を与える表式は、2世代のものについてすら未だ確立していない。

しかしニュートリノ–ニュートリノ相互作用の効果を考える領域は10–100km オーダの範囲までであり、ICA の検証対象となる領域とは十分に離れている。この意味で両者は独立事象であり、本研究の結果を大きく揺るがすことはないと考えられる。

4.3.5 非線形物理学の観点による解釈

多準位交叉の問題は、非線形物理学分野において現在も研究され続けている事象である。また3準位交叉については、「完全 WKB 解析」と呼ばれる手法によって解析理論が完成されようとしている [35]。特にICA の是非を判断する指標として、「ストークス幾何」と呼ばれる概念が多用されている [36]。

この手法が完成すれば、「接続」と「2準位近似」のどちらに問題があったのか（もしくは両者が等価であるのか）が明らかになると思われる。

第5章 結論として

本研究の主たる目的は、高いエネルギーかつ高い電子密度という条件下で問題となる「ICA」と呼ばれる近似法の有効性の検証であった。超新星ニュートリノも、この問題に抵触する対象である。ICAの有効性は問題視され得る事象だが、これまで検証されていなかった。

そこで本研究では解析する上で簡易な系を考え、ICAから得る値と数値計算から得る値の差異を検証した。解析上の便宜を図ったのは、電子密度を指数関数型にした点である。この設定の下で検証した結果、制限内のパラメータにおいてICAは十二分に有効であることが分かった。

さらに Δ_{13}, θ_{13} の値を制限の枠を超えて人工的に操作することで、ICAの有効範囲を探索した。現在では、共鳴域の非重複性をICAが妥当であることの根拠とする主張もある。これを受けて、共鳴域の重複を実現させるパラメータを選択し、この条件下でのICA有効性を検証した。その結果はICAを破らず、ICAの有効性は共鳴域の重複とは無関係な問題であることも分かった。

検証結果はICA有効性が $\Delta m_{13}^2 \gg \Delta m_{12}^2, 1 \gg \sin 2\theta_{13}$ という2世代近似の条件によって支配されていることを示していた。本研究では共鳴域の重複性とは別途にパラメータ κ_L, κ_H を新たに定義し、これらを用いることでICAの有効性を評価できることを示した。 κ_L, κ_H も2世代近似の条件によって支配されており、本研究で検証したICAを保証するのは2世代近似の有効性であることが分かった。これは2世代近似が破れる際には2世代近似による \hat{P}_{jump} を用いた表式が使えないという当たり前の結果と言える。

現在のパラメータ制限内では固有値方程式に摂動論が使えるので、固有値を各々の共鳴点に対応するように分離できる。これは式(4.3)で H_{13} が十分に小さいことに対応する。この条件下では P_L, P_H の表式も、 P_{jump} の接続についてもICAを破ることは無かった。つまり制限内の如何なる混合角、エネルギーに対しても式(4.1)は有効なのである。従って超新星ニュートリノはもちろん、さらに高いエネルギーのニュートリノ振動論においても従来の手法を一切の問題もなく利用できる。

今回用いた系でICAが妥当であったのは、 ν_e のみが外力を受ける「Equal slope 模型」と呼ばれる系であった故であるとも考えられる。例えば強磁場中での系の振る舞いや、ニュートリノ-ニュートリノ相互作用の導入によってICAの破れが生じることが推量される。

最後に謝辞を添えて

本研究を終えて自身のこれまでの足跡を顧みると、実にたくさんの方々の助力があったことを改めて実感しました。本書は既に結論を迎えましたが、改めてこの場を借りて是非ともお世話になった皆様へ感謝申し上げたく思い、再び筆を手にいたしました。

本研究の遂行に当たり、温かい御指導を頂きました安田修先生。先生の的確なアドバイスに幾度も助けて頂きました。ありがとうございました。また拙い技術が故に研究が滞ったその度々に、婦木さん、生田目さんを始め素粒子理論研究室の皆様には様々な助力を頂きました。ありがとうございました。さらに本研究は非線形物理学¹における近年の進展・功績を多分に活用した内容でした。従って当然、研究には非線形物理学に対する教養を得ることが不可欠でした。これを学ぶ際に非線形物理研究室の皆様、加えて青木先生にも多大なご協力を頂きました。どうもありがとうございました。

¹正確には、その中の非断熱遷移という分野です。

参考文献

- [1] A. B. Balantekin and W. C. Haxton, arXiv:nucl-th/9903038.
- [2] 長島順清. 『高エネルギー物理学の発展』. 朝倉物理学大系 6. 2003, 朝倉書店
- [3] J. N. Bahcall, A. M. Serenelli and S. Basu, *Astrophys. J.* **621**, L85 (2005) [arXiv:astro-ph/0412440].
- [4] R. J. Davis, D. S. Harmer and K. C. Hoffman, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 1205 (1968).
- [5] J. N. Bahcall and R. K. Ulrich, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 297 (1988).
- [6] Bruce T. Cleveland *et al.*, *Astrophys. J.* **496**, 505 (1998)
- [7] P. Langacker, arXiv:hep-ph/9210238.
- [8] K. S. Hirata *et al.* [KAMIOKANDE-II Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1297 (1990).
- [9] S. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5651 (2001) [arXiv:hep-ex/0103032].
- [10] J. N. Abdurashitov *et al.* [SAGE Collaboration], arXiv:0901.2200 [nucl-ex].
- [11] J. N. Bahcall, A. M. Serenelli and S. Basu, *Astrophys. J. Suppl.* **165**, 400 (2006) [arXiv:astro-ph/0511337].
- [12] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], *Phys. Lett. B* **667**, 1 (2008)
- [13] G. Barr, T. K. Gaisser and T. Stanev, *Phys. Rev. D* **39**, 3532 (1989).
- [14] E. K. Akhmedov, arXiv:hep-ph/9402297.
- [15] Y. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], *Phys. Lett. B* **436**, 33 (1998) [arXiv:hep-ex/9805006].
- [16] J. Arafune, M. Fukugita, T. Yanagida and M. Yoshimura, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1864 (1987).

- [17] J. M. Williams, arXiv:physics/0007035.
- [18] G. Barbiellini and G. Cocconi, Nature **329** (1987) 21.
- [19] A. Goyal, S. Dutta and S. R. Choudhury, Phys. Lett. B **346**, 312 (1995).
- [20] K. Sato and H. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **58**, 2722 (1987).
- [21] T. Ota and J. Sato, Phys. Rev. D **67**, 053003 (2003) [arXiv:hep-ph/0211095].
- [22] M. Apollonio *et al.* [CHOOZ Collaboration], Phys. Lett. B **420**, 397 (1998) [arXiv:hep-ex/9711002].
- [23] S. P. Mikheyev and A. Y. Smirnov, Prog. Part. Nucl. Phys. **23**, 41 (1989).
- [24] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963).
- [25] M. Kachelriess, arXiv:hep-ph/0111241.
- [26] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault and S. Basu, Astrophys. J. **555**, 990 (2001) [arXiv:astro-ph/0010346].
- [27] C. Zener, Proc. Roy. Soc. Lond. A **137**, 696 (1932).
- [28] L.D.Landau, E.M.Lifshitz . 『量子力学 1』 . ランダウ=リフシッツ理論物理学教程. 1989, 東京図書
- [29] T. K. Kuo and J. T. Pantaleone, Phys. Rev. D **39**, 1930 (1989).
- [30] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [31] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [32] K. Kimura, A. Takamura and H. Yokomakura, Phys. Rev. D **66**, 073005 (2002) [arXiv:hep-ph/0205295].
- [33] O. Yasuda, arXiv:0704.1531 [hep-ph].
- [34] H. Yokomakura, K. Kimura and A. Takamura, Phys. Lett. B **544**, 286 (2002) [arXiv:hep-ph/0207174].
- [35] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei Asian Journal of Mathematics, **2**, 625-640 (1998)
- [36] T. Aoki, T. Kawai, S. Sasaki, A. Shudo and Y. Takei [arXiv:math-ph/0409005]. (2004)
- [37] Y. Kayanuma and S. Fukuchi J. Phys. B: At. Mol. Phys. **18**, 4089 (1985)

- [38] S. Samuel, Phys. Rev. D **48**, 1462 (1993).
- [39] R. Martin [SNO Collaboration], arXiv:0905.4907 [hep-ex].
- [40] Y. F. Wang [KamLAND Collaboration],
- [41] T. Lewke [Borexino Collaboration], arXiv:0905.2526 [hep-ex].
- [42] M. H. Ahn *et al.* [K2K Collaboration], Phys. Rev. D **74**, 072003 (2006) [arXiv:hep-ex/0606032].
- [43] M. Collaboration, arXiv:0909.4996 [hep-ex].
- [44] M. Apollonio *et al.* [CHOOZ Collaboration], Eur. Phys. J. C **27**, 331 (2003) [arXiv:hep-ex/0301017].