

長基線ニュートリノ振動実験における物質密度変化の影響

首都大学東京理工学研究科物理学専攻
福澤篤充

平成 21 年 2 月 20 日

要旨

本論文では、次世代の長基線ニュートリノ振動実験において、地球の物質密度不定性が測定に与える影響を評価する。ニュートリノは物質中を伝播する際、MSW 効果と呼ばれる物質中の電子との相互作用をおこなうことが知られており、この寄与は数千 km の基線長をもつ長基線ニュートリノ振動実験において特に大きくなる。これまでの研究では、地球物理学で知られている標準的な地球の構造モデル (PREM) から得られる物質密度分布の特徴を用いて解析が行われてきた。長基線ニュートリノ振動実験における未定のパラメータの測定や未知の物理現象の検出には、より高い精度での解析が必要であり、この地球物質密度分布がもつ不定性を考慮に入れた解析が必要となると考えられる。

そこで本研究では、物質密度分布を考慮した数少ない先行研究に従って、ニュートリノ伝播経路での物質効果をフーリエ展開して、振動確率に重要な寄与をもたらす項のみ採り入ることにより、密度平均の不定性と密度分布形状の不定性が生み出す影響の大きさを議論した。

具体的には、ニュートリノファクトリーにおいて主目的となる $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ チャンネルの振動確率を、現在までに決定されたパラメータの情報を基に摂動で解析的に求めた。さらに、その摂動公式を用いて物質の平均密度・分布形状のそれぞれの不定性が振動確率にどのような影響を与えるかを数値計算によって定量的に見た。その結果、未定パラメータ θ_{13} が現在わかっている上限付近での値をもつ場合には、反ニュートリノチャンネル $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ において、物質密度の不定性が CP 非保存の位相 δ の決定に大きな影響を与えることを確認した。

目次

第 1 章 導入	3
第 2 章 ニュートリノ振動	5
2.1 ニュートリノの性質と MNS 行列	5
2.2 真空中でのニュートリノ振動	6
2.3 物質中でのニュートリノ振動	7
2.4 ニュートリノファクター	11
第 3 章 物質密度変化による CP 位相測定への影響	13
3.1 地球物質密度分布の不定性	13
3.2 摂動公式	14
3.2.1 Fourier 展開による方法	15
3.2.2 ニュートリノ振動確率の摂動公式: 小さい θ_{13} の場合	16
3.2.3 ニュートリノ振動確率の摂動公式: 大きい θ_{13} の場合	20
3.3 解析	22
3.4 密度形状不定性の平均密度不定性への繰り込み	24
第 4 章 結論	26
付録 A 摂動計算で求められた S 行列:–小さい θ_{13} の場合–	28
付録 B 摂動計算で求められた S 行列:–大きい θ_{13} の場合–	31

第1章 導入

1998年にSuper-Kamiokandeで発見された[1]ニュートリノ振動現象は、ニュートリノ質量と世代間の混合の存在を意味する。これはニュートリノの質量をゼロとする素粒子標準模型の枠組みを超える実験的事実であり、この質量生成のメカニズムと混合構造を明らかにすることは、より高エネルギーで成立する素粒子理論構築への貴重な足掛かりになると期待されている。現在までのところ、ニュートリノ振動のパラメータのうち、質量二乗差と混合角 θ_{12}, θ_{23} については太陽・大気ニュートリノ実験の観測からその値がほぼ決定している[2][3][4]。しかしながら、残る2つのパラメータについて、 θ_{13} は非常に小さい上限 $\theta_{13} \leq 13^\circ$ が与えられている[5]のみであり、CP非保存を記述するレプトン小林・益川位相 δ については全く未定という状態である。

こうした現状の中、これらの未定パラメータをより精密に測定するために計画されている実験の一つとして、ニュートリノファクトリーとよばれる長基線ニュートリノ振動実験が存在する[6]。この計画は、人工的に作り出した高エネルギーミュオンが崩壊する際に出る大量のニュートリノを使って大強度のニュートリノビームを作りだし、数千km離れた地点で検出しようとするものである。具体的には、3000kmから5000kmの検出器と7500km付近の検出器の2点を組み合わせて観測することで、未定のパラメータを効果的に測定できる考えられている[7]。

ニュートリノが物質中を伝播する際には、物質中の電子との相互作用によって有効なポテンシャルを受けることにより、真空中とは異なった振動確率で振動することが分かっている。特に、ニュートリノファクトリーのような数千kmの長基線振動実験においては、この物質効果が振動確率に非常に大きな寄与を及ぼすと考えられる。そのため、地球内部の物質密度を完全に把握していない場合、物質効果による影響を正確に見積もることが出来ず、未定パラメータ、特にCP位相の決定精度に影響を与えることになる。

現在、地球内部の物質密度については、PREM(Preliminary Reference Earth Model)と呼ばれる地球物理学の見地から推定された構造モデルを使って決定された値が標準的に参照されている。このモデルは隕石から得られた原始太陽系の化学組成に基づき、地震波の観測データから地球内部の層構造とその密度分布を決定するものである。ただし地球物質密度の値に関する誤差は、公的に引用された数字としては現在知られていない。実際に地球物理学においてはいくつかの構造モデルが存在し、モデルによって密度分布形状が異なることが知られている。さらにはPREMはその基本的条件として球対称性が仮定されているが、この球対称性からの逸脱の程度やこの不定性についても考慮しなければならないと考えられる。これまでの長基線ニュートリノ振動実験のシミュレーション研究において、伝搬経路での物質の平均密度の不定性にもなうCP位相測定感度への影響についてはよく議論されてきたが、この密度分布形状の不定性まで詳しく議論した研究はあまりない。

よって本研究では、物質効果の項を $a(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-ip_n x}$ ($p_n \equiv \frac{2\pi}{L}n$) のようにフーリエ展開を行うことで、密度分布形状を導入し、この不定性が CP 位相 δ 測定の際に与える影響について考察を行うことにする。

第2章 ニュートリノ振動

この章では、ニュートリノ振動の基礎についてまとめておく。まず、真空中での振動確率を導出した後、物質中での振動確率を定式化する。最後に、本論文で想定するような実験環境のニュートリノファクトリー実験について簡単に述べることにする。

2.1 ニュートリノの性質とMNS行列

ニュートリノは、 β 崩壊の際に放出される電子のエネルギースペクトルが連続的に分布することから1930年、Pauliによって存在が予言された粒子である。実験的には1956年、ReinesとCowanによって原子炉で生まれた反電子ニュートリノが観測されたのが最初である。ニュートリノは電氣的に中性のレプトンであり、弱い相互作用のみを行う。1957年Goldhaberらの実験によって、ニュートリノは左巻きであることが発見された。この事実や、 β 崩壊のスペクトルの測定からニュートリノは質量を持っているとしても極めて小さいだろうと考えられ、素粒子標準模型においてはゼロとして扱われてきた。しかし、1998年にSuper-Kamiokande(SK)が大気ニュートリノの観測からニュートリノ振動現象を発見したことにより、ニュートリノは非常に軽微ながらも質量を持つことが発見された。

この質量に関しては、実験的に直接測定しようという試みもなされているが、現在までのところ上限値のみが与えられている [8]。

$$\nu_e < 2 \text{ eV (95\%C.L)}$$

$$\nu_\mu < 0.19 \text{ MeV (90\%C.L)}$$

$$\nu_\tau < 18.2 \text{ MeV (95\%C.L)}$$

また、ニュートリノの質量生成のメカニズムはまだ理解されていないが、質量が存在すると考える場合、ニュートリノのフレーバー固有状態 $\nu_\alpha (\alpha = e, \mu, \tau)$ と質量固有状態 $\nu_i (i = 1, 2, 3)$ の関係は牧・中川・坂田 (MNS) 行列 [9] と呼ばれるユニタリーなフレーバー混合行列を用いて以下のように表される。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad (2.1)$$

MNS 行列は、標準的な表記法を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned}
U &= U_{23}U_{13}U_{12} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix} \quad (2.2)
\end{aligned}$$

ここで、 $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ 、 $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ としてあり、 θ_{ij} は混合角、 δ は CP 非保存の位相である。クォークセクターにおいても同様のフレーバー混合が存在することが知られていて、この場合の混合行列中の位相 δ は小林・益川位相と呼ばれている。

ニュートリノ振動現象が発見されてから、いくつかの観測実験によってニュートリノ振動のパラメータが測定されてきた。現在までに観測で与えられている結果をまとめると以下のようになる [8]。

$$\begin{aligned}
\Delta m_{21}^2 &= (8.0 \pm 0.3) \times 10^{-5} eV^2 \\
|\Delta m_{31}^2| &= (1.9 - 3.0) \times 10^{-3} eV^2 \\
\sin^2 2\theta_{12} &= 0.86_{-0.04}^{+0.03} \\
\sin^2 2\theta_{23} &> 0.92 \\
\sin^2 2\theta_{13} &< 0.19 \\
\delta &: \textit{unknown} \quad (2.3)
\end{aligned}$$

値は全て 90%CL である。現在、これらのパラメータをより精密測定することに加え、mass hierarchy の問題や、未だ上限しか与えられていない混合角 θ_{13} と全く未定の CP 位相 δ に関する測定実験が計画されている。

2.2 真空中でのニュートリノ振動

次に、真空中を伝播するニュートリノ ν_α が ν_β に ($\alpha, \beta = e, \mu, \tau$) 変化する振動確率を定式化する。ニュートリノは、空間を伝播する際には質量固有状態を通して時間発展するが、反応や観測はフレーバー固有状態を通して行われる。そのため、ある地点で観測されたニュートリノが時間発展して離れた場所で観測されるときに確率を求めるためには、質量固有状態の発展方程式を混合行列を使ってフレーバー固有状態の発展方程式に書き換えてやらなければならない。

ニュートリノの質量固有状態 $|\nu_i\rangle$ は次のような発展方程式に従う。

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu_i(t)\rangle = H |\nu_i(t)\rangle \quad (2.4)$$

これを解いてやると

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i(0)\rangle \quad (2.5)$$

となる。ここで、 E_i はエネルギー固有値であり、ニュートリノの運動量 p と質量 m_i を用いて

$$\begin{aligned} E_i &= \sqrt{p^2 + m_i^2} \\ &\simeq p + \frac{m_i^2}{2p} \end{aligned} \quad (2.6)$$

のように表わされる。ただし、ニュートリノが非常に軽く、相対論的な運動をしていることから $p \gg m_i$ として近似した。また、フレーバー固有状態の発展方程式は、式 (2.4) に式 (2.1) を用いて

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} |\nu_\alpha(t)\rangle &= U H U^\dagger |\nu_\alpha(t)\rangle \\ &= H_{\text{vac}} |\nu_\alpha(t)\rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

と書ける。ただし、 $H_{\text{vac}} = U H U^\dagger$ とした。式 (2.5) を用いてやると、フレーバー固有状態 ν_α は

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i \sum_\beta e^{-iE_i t} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* |\nu_\beta(0)\rangle \quad (2.8)$$

のように解ける。つまり、発展方程式にしたがって伝播し、時刻 t に観測されるニュートリノは、3つのフレーバーの重ね合わせになっていることがわかる。これより、時間 t の間に距離 $L (= t)$ 伝播したニュートリノの ν_α から ν_β への振動確率を求めることができる

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) &= |\langle \nu_\beta(0) | \nu_\alpha(L) \rangle|^2 \\ &= \left| \sum_i e^{-iE_i L} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \right|^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} \text{Re}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) \pm 2 \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} J \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。ここで、 $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$ であり、 $p = E$ とおいた。また、cyclic 和は (i, j) について $(1,2), (2,3), (3,1)$ をとる。 J は Jarlskog 因子 [10] と呼ばれる不変量であり、 $J \equiv \text{Im} U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}$ として定義されていて (α, β) が (e, μ, τ) の (反) 巡回的な場合に係数の正 (負) の符号をとる。この結果からニュートリノが質量と混合を持つ際には、あるフレーバーのニュートリノが他のフレーバーのニュートリノに変化する確率が時間 (距離) とともに振動的に変化することがわかる。

2.3 物質中でのニュートリノ振動

ニュートリノが物質中を伝播する際には、真空中での運動に物質効果をポテンシャルとして加えた形になる。この物質効果は Wolfenstein によって定式化され、太陽ニュートリノ異常を説明するために Mikheyev-Smirnov らによって用いられたことから MSW 効果とよばれている [11]。この節ではまず、この MSW 効果について示したあと、物質中を伝播するニュートリノの振動確率を考える。

通常、物質中には電子、陽子、中性子またはこれらを構成要素とする原子核 (u クォーク、d クォーク) が存在する。従って、物質中を伝播するニュートリノの行う相互作用を考える際には、図 (2.1) の反応を全て考慮する必要がある。

ニュートリノは物質中の全ての粒子と中性カレント相互作用を行うが、この相互作用の強さはニュートリノのフレーバーによらないためハミルトニアンに加えられるポテンシャルは単位行列に比例した形となる。これは振幅の全体的な位相への寄与となり、振動確率には現れない。結局物質中のニュートリノ相互作用としてはニュートリノのフレーバーの転換を問題にする限り、電子と電子ニュートリノの荷電カレント反応のみを扱えばよいということになる。

電子・電子ニュートリノ荷電カレント散乱の不変散乱振幅は

$$\mathcal{M} = \left(-i\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL}) (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\nu e_L) \frac{-(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M_W^2)}{k^2 - M_W^2} \quad (2.10)$$

と書ける。ここで、 $k^2 \ll M_W^2$ より

$$\frac{-(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M_W^2)}{k^2 - M_W^2} \sim \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} \quad (2.11)$$

と近似できるから、式 (2.10) は

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\sim -\frac{g^2}{2M_W^2} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL}) (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\nu e_L) \\ &= -\frac{g^2}{8M_W^2} \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e \bar{\nu}_e \gamma^\nu (1 - \gamma^5) e \end{aligned} \quad (2.12)$$

と書き換えられる。これに Fiertz 変換を行うと、

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e \quad (2.13)$$

と書ける。ただし、 $G_F \equiv \frac{g^2}{4\sqrt{2}M_W^2}$ は Fermi 結合定数である。ニュートリノに対して物質中の電子は静止しているとみなすことができるから

$$\langle \bar{e} \gamma_\mu e \rangle = N_e \delta_{\mu 0}$$

のように期待値で置き換えることができる。ただし、 $N_e \equiv \langle \bar{e} \gamma_0 e \rangle$ は物質中の電子数密度である。これより $V_{\text{eff}} \equiv \sqrt{2} G_F N_e$ と定義すると、これを電子ニュートリノが感じる相互作用の有

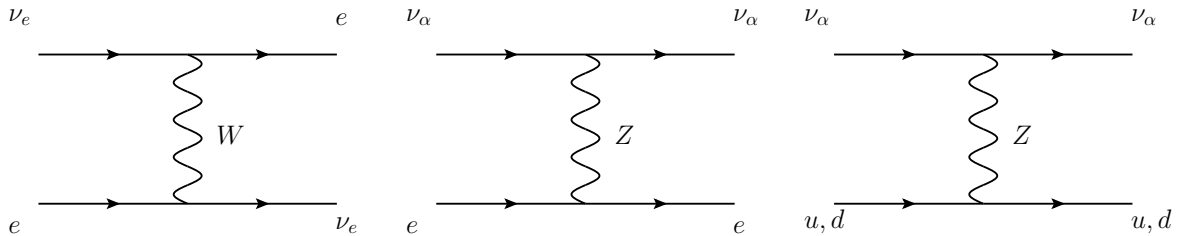


図 2.1: 物質中でのニュートリノの相互作用

効ポテンシャルと見なすことができる。したがって、物質中を伝播するニュートリノのフレーバー固有状態の発展方程式のハミルトニアンは、

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= H_{\text{vac}} + V_{\text{eff}} \\ &= H + \frac{1}{2E} \text{diag}(a, 0, 0)\end{aligned}\quad (2.14)$$

とあらわせる。ここで、 $a(x) \equiv 2\sqrt{2}G_F N_e(x)E$ と定義した。また、電子数密度は物質密度と関連づけることができ、

$$N_e = \frac{\rho}{m_N} Y_e \quad (2.15)$$

となる。ここで、 ρ は物質密度、 m_N は核子の質量、 Y_e は核子中での電子の割合である。地球内部を伝播するような場合には $Y_e = 1/2$ と仮定してほぼ正しい。以下では簡単のため、地球物質の化学組成およびこの不定性は議論しないことにする。

式 (2.14) の右辺を対角化するようなユニタリー行列 \tilde{U} を用いると

$$\tilde{H} \equiv \frac{1}{2E} \tilde{U} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \tilde{U}^\dagger \quad (2.16)$$

と書き換えられる。ただし、 λ_i と \tilde{U} はそれぞれ、物質中での有効質量と有効混合行列である。物質密度が一定の場合には、物質中の振動確率はこれらの有効パラメータを用いて真空中での振動確率と同様の形で表すことができ、

$$P_{\text{matt}}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} \text{Re}(\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* \tilde{U}_{\alpha j} \tilde{U}_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta_{ij} L}{4E} \right) + 2 \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} \tilde{J} \sin \left(\frac{\Delta_{ij} L}{2E} \right) \quad (2.17)$$

と表される。ここで、 $\Delta_{ij} \equiv \lambda_i - \lambda_j$ とおいてあり、 \tilde{J} は $\tilde{J} \equiv \text{Im} \tilde{U}_{e1} \tilde{U}_{\mu 1}^* \tilde{U}_{e2} \tilde{U}_{\mu 2}^*$ というように、真空中での混合行列を物質中での有効混合行列に置き換えた Jarlskog 因子である。

物質中での有効パラメータは式 (2.14) によって関係づけられていることから、真空中のパラメータで表すことができる。有効質量は式 (2.14) の固有方程式を解くことによって、次のように求められる。

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 3y} \left[z + \sqrt{3(1 - z^2)} \right] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 3y} \left[z - \sqrt{3(1 - z^2)} \right] \\ \lambda_3 &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 3y} \left[z + \sqrt{3(1 - z^2)} \right]\end{aligned}\quad (2.18)$$

ただし、 x, y, z をそれぞれ、次のように定義した。

$$\begin{aligned}x &\equiv \Delta m_{21}^2 + \Delta m_{31}^2 + a \\ y &\equiv \Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2 + a \left[\Delta m_{21}^2 (1 - s_{12}^2 c_{13}^2) + \Delta m_{31}^2 (1 - s_{13}^2) \right] \\ z &= \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{2x^3 - 9xy + 27a \Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2 c_{12}^2 c_{13}^2}{2(x^2 - 3y)^{3/2}} \right) \right]\end{aligned}\quad (2.19)$$

次に、木村・高村・横枕の方法 (KTY)[12] を用いて、有効混合行列の積 $\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^*$ を真空中のパラメータを用いて書き表す。まず、物質中のハミルトニアンを用いて、つぎのような \tilde{p}, \tilde{q} を定義する。

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{\alpha\beta} &\equiv 2E\tilde{H}_{\alpha\beta} \\ \tilde{q}_{\alpha\beta} &\equiv (2E)^2(\tilde{H}_{\gamma\beta}\tilde{H}_{\alpha\gamma} - \tilde{H}_{\alpha\beta}\tilde{H}_{\gamma\gamma})\end{aligned}\quad (2.20)$$

ここで、ギリシャ文字は $(\alpha\beta\gamma) = (e\mu\tau), (\mu\tau e), (\tau e\mu)$ のように巡回的にとる。 $\tilde{H}_{\alpha\beta}$ が次に示すように真空中のパラメータで表されていることから、 $\tilde{p}_{\alpha\beta}, \tilde{q}_{\alpha\beta}$ も真空中のパラメータを使って表されている。

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{\alpha\beta} &= H_{\alpha\beta} \quad (\alpha \text{ or } \beta \neq e) \\ \tilde{H}_{ee} &= H_{ee} + a\end{aligned}\quad (2.21)$$

ユニタリー行列の性質と、式 (2.20) の右辺から $\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^*$ について次のような 3 つの恒等式が得られる。

$$\sum_i \tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

$$\sum_i \lambda_i \tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* = \tilde{p}_{\alpha\beta} \quad (2.23)$$

$$\sum_{\text{cyclic}(i,j,k)} \lambda_j \lambda_k \tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* = \tilde{q}_{\alpha\beta} \quad (2.24)$$

ただし、最後の等式については $\tilde{H}_{\gamma\beta}\tilde{H}_{\alpha\gamma} - \tilde{H}_{\alpha\beta}\tilde{H}_{\gamma\gamma} = \tilde{H}^{-1} \det \tilde{H}$ という、余因子行列についての関係式を用いることで示される。これらの等式を $\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^*$ について解くと、

$$\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* = \frac{\tilde{p}_{\alpha\beta} \lambda_i + \tilde{q}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \lambda_i (\lambda_j + \lambda_k)}{\Delta_{ji} \Delta_{ki}} \quad (2.25)$$

と表される。これを用いることで振動確率中の有効混合行列は次のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned}\text{Re}(\tilde{U}_{ei} \tilde{U}_{\mu i}^* \tilde{U}_{ej} \tilde{U}_{\mu j}^*) &= \frac{|\tilde{p}_{\alpha\beta}|^2 \lambda_i \lambda_j + |\tilde{q}_{\alpha\beta}|^2 + \text{Re}(\tilde{p}_{\alpha\beta} \tilde{q}_{\alpha\beta}^*) (\lambda_i + \lambda_j)}{\Delta_{ij} \Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{31}} \\ \tilde{j} &= -\frac{\text{Im}(\tilde{p}_{\alpha\beta} \tilde{q}_{\alpha\beta}^*)}{\Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{31}}\end{aligned}\quad (2.26)$$

既に見たように、 $\tilde{p}, \tilde{q}, \lambda_i$ は真空中のパラメータを用いて表されている。これにより、物質中でのニュートリノの振動確率が真空中でのパラメータを用いて表されることが示された。具体的に各チャンネルの振動確率を求めるためには \tilde{p}, \tilde{q} を計算して式 (2.26) に代入すればよい。本章の目的はニュートリノの振動の基礎を概観することであり、また本論文の主目的と直接関係がないことから、全ての振動チャンネルについて求めることは行わない。

例として $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ の振動確率のみを計算しておく、

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \simeq A \cos \delta + B \sin \delta + C \quad (2.27)$$

ただし係数 A, B, C は次のようになる。

$$A = \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} A_{ij} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{ij} L}{4E} \right) \quad (2.28)$$

$$B = \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} B' \sin \left(\frac{\Delta_{ij} L}{2E} \right) \quad (2.29)$$

$$C = \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} C_{ij} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{ij} L}{4E} \right) \quad (2.30)$$

$$A_{ij} = -4 [2p_1 p_2 \lambda_i \lambda_j + 2q_1 q_2 + (p_1 q_2 + q_1 p_2)(\lambda_i + \lambda_j)] \times (\Delta_{ij} \Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{31})^{-1} \quad (2.31)$$

$$B' = \frac{2(p_1 q_2 - p_2 q_1)}{\Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{31}} \quad (2.32)$$

$$C_{ij} = -4 [(p_1^2 + p_2^2) \lambda_i \lambda_j + (q_1^2 + q_2^2) + (p_1 q_1 + q_2 p_2)(\lambda_i + \lambda_j)] \times (\Delta_{ij} \Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{31})^{-1} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= (\Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2 s_{12}^2) s_{23} s_{13} c_{13} \\ p_2 &= \Delta m_{21}^2 s_{12} c_{12} c_{23} c_{13} \\ q_1 &= -\Delta m_{31}^2 \Delta m_{21}^2 c_{12}^2 s_{23} s_{13} c_{13} \\ q_2 &= -\Delta m_{31}^2 \Delta m_{21}^2 s_{12} c_{12} c_{23} c_{13} \end{aligned} \quad (2.34)$$

この段階ではまだ厳密解である。これを小さいパラメータ $\theta_{13}, \Delta m_{21}^2 / \Delta m_{31}^2, \Delta m_{21}^2 / a$ で展開して摂動公式を導出してやると次のようになる。

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = X \sin^2 2\theta_{13} + Y \sin 2\theta_{13} \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} - \delta \right) + P_\odot \quad (2.35)$$

$$X = s_{23}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (2.36)$$

$$Y = \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a} \right) \sin \left(\frac{aL}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (2.37)$$

$$P_\odot = c_{23}^2 \sin^2 2\theta_{12} \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{aL}{4E} \right) \quad (2.38)$$

得られた近似公式 (2.35) は Cervera et.al [13] によって初めて求められた。

2.4 ニュートリノファクトリー

この節では、本研究が想定する長基線ニュートリノ振動実験のニュートリノファクトリーについて簡単に説明することにする。この実験の特徴は、大強度・高エネルギーのニュートリノ

が得られることに加え、バックグラウンドの少ない $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ チャンネルを観測できることにある。ニュートリノファクトリーは強力な陽子ビームから大量の π を作り、崩壊してできるミュオンを再び加速し貯蔵したものを崩壊させ、強力なニュートリノビームを得る計画である。ミュオンは

$$\begin{aligned}\mu^+ &\rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e \\ \mu^- &\rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e\end{aligned}$$

のように崩壊するため、得られるビームは $\nu_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$ の4種類である。

ニュートリノファクトリーのイベント検出には大型磁気カロリメータが用いられる。 μ^+ の崩壊から得られた電子ニュートリノの振動を考える。 ν_e からニュートリノ振動で作られた ν_μ を観測する際には

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + N'$$

という核子との反応から作られるミュオンを観測することになる。一方、もう一つのビーム $\bar{\nu}_\mu$ がフレーバーを変化させずにそのまま伝播した際にも

$$\bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \mu^+ + N'$$

のように大量のバックグラウンドミュオンを観測することになる。これらのミュオンは電荷が異なるため、磁場をかけてやることで区別することが可能である。また、電子とミュオンの区別は電子が電磁シャワーを起して拡がるのに対し、ミュオンは電磁相互作用でエネルギーを少し失うだけでほとんど反応しないため、綺麗な貫通飛跡を残すことから飛跡を観測してやることで可能となる。

現在までの計画ではミュオンの崩壊は $10^{21}/\text{year}$ 程度が想定されている。また、シミュレーションによる測定感度の最適化 [14] の結果から、CP 位相 δ の測定に適した 3000 ~ 5000 km と、CP 位相 δ の影響が消える魔法基線 7500 km の2ヶ所に検出器を設置することで、高い精度のパラメータ決定が可能になると考えられている。

ニュートリノファクトリーは本来混合角 θ_{13} と CP 位相 δ を前者が 1° 程度まで小さい場合でも精度よく測定することを目的とした将来計画である。一方、本論文との関連ではニュートリノファクトリーの測定によって地球の平均密度 (正確には平均電子密度) を精度よく測定できる可能性が指摘されている [15]。

第3章 物質密度変化によるCP位相測定への影響

この章では混合行列における未定のパラメータであるCP位相 δ の測定において、地球物質密度の不定性が与える影響について考察する。前章でみたように、ニュートリノが物質中を伝播する際には、物質中の電子密度の影響を受ける。特にニュートリノファクトリーのような数千kmの長基線実験を考える場合、物質効果は非常に大きくなる。一方、地球物理学において知られている地球の内部構造から推定される物質密度には、ある程度の不定性が存在すると考えられている。本章では、この地球物質密度の不定性が与えるCP位相測定への影響について考える。具体的には、はじめに地球の物質密度がもつ不定性に関して述べた後、密度分布を導入した振動確率の摂動公式を導出し、その影響を解析的に考える。最後に実際に数値計算を行うことで、不定性の影響を考察する。

3.1 地球物質密度分布の不定性

この節では地球内部の物質密度分布がもつ不定性について概観する。地球の内部構造は地震波の解析と地球の質量、慣性モーメント、自由振動の振動数などの地球の情報に球対称なモデルを仮定することで間接的に推定されている。このようにして求められ、現在、標準的に受け入れられているモデルにPREM(Preliminary Reference Earth Model)[16]がある。また、別の内部構造をもったモデルもいくつか考えられており、ak135-fと呼ばれるモデルとPREMの物質密度分布を比較したグラフが図(3.1)である。

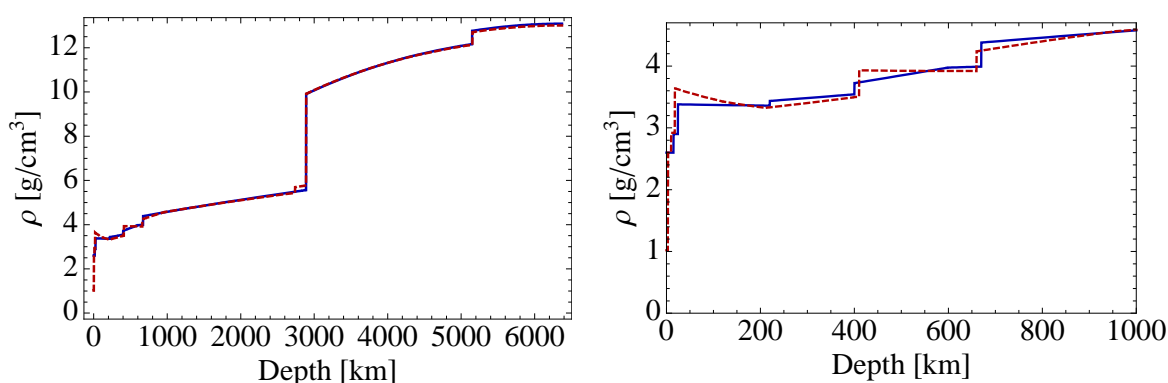


図 3.1: 地球の構造モデルによる物質密度の違い。実線が PREM、破線が ak135-f を表わす。

ニュートリノファクトリー実験が想定する数千 km の基線長では、深さ数百 km の上部マン

トル層を通過する。実際にこれらのモデルをもちいて、4000 km を伝播するニュートリノが感じる物質密度をあらわすと (図 3.2) のようになる。

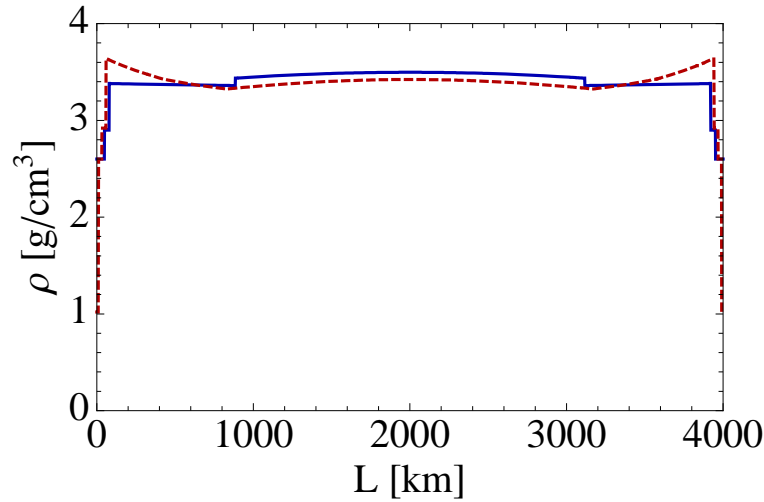


図 3.2: 基線距離 4000 km でニュートリノが感じる物質密度の違い。実線が PREM、破線が ak135-f を表わす。

このように地球の物質密度は現在までのところ、十分な精密測定は行われておらず、PREM による推定値はある程度不定性をもつと考えられている。具体的な誤差について原論文 [16][17] に記載はないが、数千 km の長基線ニュートリノ振動実験においては地球の平均密度に関して 5% 程度の不定性を考慮すればよいとされている [18]。ここでモデルの推定には球対称性が仮定されている点やモデル間での差異が存在することから、この物質密度の不定性は物質密度の平均値の不定性と密度形状に関する不定性とを別々に考慮すべきであると考えられる。よって本論文ではこの 5% の平均密度の不定性と密度分布の不定性を考慮した場合の影響を考えることになる。

3.2 摂動公式

この節では、前節でみた物質密度不定性の影響について考えるために、ニュートリノ振動の摂動公式を導出する。地球の物質密度は深さに依存しており、伝播するニュートリノが感じる物質密度は図 (3.2) のように距離の関数になっている。物質効果の項 $a(x) = \sqrt{2} \frac{G_F}{m_N} \rho(x) E$ に、そのままの形で不定性を導入するためには、全ての位置で適当な大きさの不定性を導入する必要がある。そこで、密度分布の不定性を導入するために先行研究 [19] [20] を参考に Fourier 展開の方法を用いる。この方法では後述するように、Fourier 係数の少数のモードだけを使ってよい近似で地球の密度を表現することが可能であるという利点がある。

次に摂動のパラメータに関して議論する。現在までに、決定されているニュートリノ振動のパラメータの大きさ (2.3) から小さい展開パラメータの一つは $\epsilon \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \simeq 0.03$ ととることが自然である。ここで、 θ_{13} の大きさに関しては Chooz 実験による 3σ の信頼度での上限 $\sin^2 2\theta_{13} < 0.19$

が与えられているのみである。これは他の混合角に比べると小さいと言えるが、展開のパラメータ $\epsilon \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \simeq 0.03$ と比べると、上限付近での値 $\sin^2 2\theta_{13} = 0.15$ では、 $s_{13} \simeq 0.2$ となり ϵ より十分大きな値をもつことになる。よって以下では、(i) $s_{13} \sim O(\epsilon)$ の小さな場合と (ii) $s_{13} \sim O(1)$ の大きい場合でそれぞれの摂動公式を求めることにする。その他の展開パラメータとしては、以下で述べるように物質密度の密度形状を記述するパラメータをとる。

3.2.1 Fourier 展開による方法

次に、物質密度項を以下のように Fourier 展開する。

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-ip_n x} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{-ip_n x} + a_n^* e^{ip_n x}) \\ &= a_0 + \delta a(x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \delta a(x) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{-ip_n x} + a_n^* e^{ip_n x}) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{Re}(a_n) \cos(p_n x) + \operatorname{Im}(a_n) \sin(p_n x)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

ただし、 a_n は Fourier 係数であり、 $p_n \equiv \frac{2\pi}{L}n$ と定義してある。また、1 行目から 2 行目に移る際、 $\delta a(x)$ が実数であることから $a_n = a_{-n}^*$ を用いた。このような表示をとることで、Fourier 係数の第 0 モードが平均密度を表し、 $n \geq 1$ の高次のモードが密度分布形状の効果を表すことになる。また、 δa の $x \rightarrow -x$ とすれば明らかなように $\operatorname{Re}(a_n)$ が物質密度分布の対称成分、 $\operatorname{Im}(a_n)$ が物質密度の非対称成分を表す。ここで、非対称成分とは、地球が球対称でないときにでてくる量である。これにより、物質密度分布が振動確率に与える影響をみることができようになる。標準的な地球構造モデルである PREM と ak135-f の物質密度を用いて Fourier 展開したものが図 (3.3) である。ただし、 $a_n = \sqrt{2} \frac{G_E}{m_N} \rho_n E$ とする。

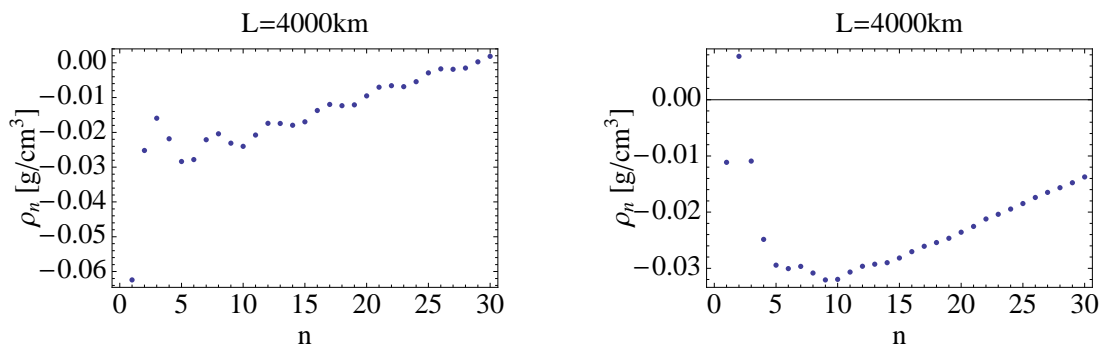


図 3.3: 物質密度の Fourier 係数 ρ_n のプロット ($n \geq 1$)。左図:PREM 右図:ak135-f を表わす。

このように Fourier 展開による方法を用いると、密度分布の非平坦性を表す高次のモードの Fourier 係数が地球構造モデルごとに特に大きく異なる。このことからやはり不定性を考える際

には、地球の構造モデルが持つ平均密度の不定性に加え、物質密度分布形状に関する不定性についても考慮する必要があると考えられる。

ここで、PREM モデルをとって、密度展開の高次の Fourier 係数の様子を調べてみることにする。このことをみるために実際に、振動確率全体に対する密度の Fourier 展開の第 n モードに依存する項の振動確率への寄与の割合を図 (3.4) 示す。

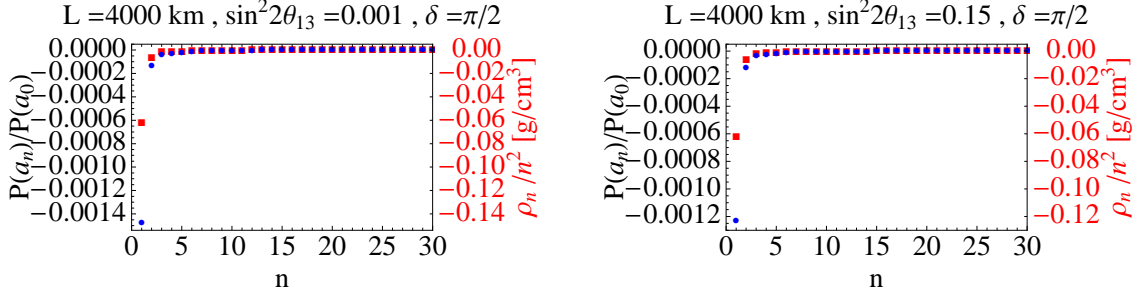


図 3.4: 平均密度で計算された振動確率に対する第 n モードの振動確率への寄与の比が青丸で示されている (左側の目盛)。赤い四角は ρ_n/n^2 をスケールを合わせてプロットしたものである (右目盛)。左図が θ_{13} が小さい場合、右図が θ_{13} が大きい場合

図 (3.4) から、高次の Fourier 係数の振動確率への影響は 0.1% 程度の大きさの a_1 を除いて 0.01% 程度と極めて小さいことがわかる [19][20]。この理由の一つは、後で求める摂動公式からわかることだが、第 n モードの項は $1/n^2$ (非対称成分では $1/n$) で抑えられているため、高次の項の寄与は n が大きくなるにつれて小さくなることにある。結論として、振動確率に有意な影響を与えるのはフーリエ係数の第 1 モードまでということがわかった。

3.2.2 ニュートリノ振動確率の摂動公式: 小さい θ_{13} の場合

これより振動確率の摂動公式を導出する。はじめに θ_{13} が小さいとして摂動パラメータを $\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \sim \frac{a_n}{\Delta m_{31}^2} (n \neq 0) \sim s_{13} \sim O(\epsilon)$ のようにとって振動確率を求める。 $\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}, \frac{a_0}{\Delta m_{31}^2}$ については $O(1)$ と考える。物質中でのニュートリノの発展方程式は (2.14) より以下のように書ける。

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu_\alpha(t)\rangle = \tilde{H}_{\alpha\beta} |\nu_\beta(t)\rangle \quad (\alpha, \beta = e, \mu, \tau). \quad (3.3)$$

このときのハミルトニアンは以下のように書けている。

$$\tilde{H}(x) = \frac{1}{2E} \left\{ U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{bmatrix} U^\dagger + a(x) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.4)$$

ただし、ハミルトニアンの単位行列に比例する量は振動確率に効いてこないため、(2.14) 式から m_1^2 を引いてある。この発展方程式に従って距離 L 進んだ時の解は

$$\begin{aligned} \nu_\alpha(L) &= S_{\alpha\beta} \nu_\beta(0) \\ S(L) &= T \exp \left[-i \int_0^L dx \tilde{H}(x) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。ただし、 T は時間順序演算子である。ここから振動確率は

$$P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha; L) = |S_{\alpha\beta}(L)|^2 \quad (3.6)$$

のように導かれる。

摂動展開を行うためにハミルトニアンを ϵ の 0 次項と 1 次以上の項に分解する。このとき摂動論の計算を簡単にするために、以下で定義された基底に移行する。

$$\tilde{H}(x) = U_{23}U_{13}H_S U_{13}^\dagger U_{23}^\dagger = U_{23}U_{13}(H_{S0} + H_{S1})U_{13}^\dagger U_{23}^\dagger \quad (3.7)$$

ただし $H_S \equiv H_{S0} + H_{S1}$ とした。ここに、 H_{S0} は ϵ のゼロ次項を H_{S1} は 1 次以上の項を表わす。 H_{S0}, H_{S1} は次のように書き表わされる。

$$\begin{aligned} H_{S0} &= \frac{1}{2E} \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{bmatrix} \\ H_{S1}(x) &= \frac{1}{2E} \left\{ \Delta m_{21}^2 \begin{bmatrix} s_{12}^2 & c_{12}s_{12} & 0 \\ c_{12}s_{12} & c_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} -s_{13}^2 & 0 & c_{13}s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{13}s_{13}e^{i\delta} & 0 & s_{13}^2 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \delta a(x) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \delta a(x) \begin{bmatrix} -s_{13}^2 & 0 & c_{13}s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{13}s_{13}e^{i\delta} & 0 & s_{13}^2 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

このようにハミルトニアンを置き換えれば、(3.5) 式の S 行列が

$$\begin{aligned} S(L) &= U_{23}U_{13}\tilde{S}_S U_{13}^\dagger U_{23}^\dagger \\ \tilde{S}_S(L) &= T \exp \left[-i \int_0^L dx H_S(x) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

と書き換えられる。ところで、

$$\Omega_S(x) \equiv e^{iH_{S0}x} \tilde{S}_S(x) \quad (3.10)$$

という量を定義するとこれは

$$i \frac{d}{dx} \Omega_S(x) = e^{iH_{S0}x} H_{S1}(x) e^{-iH_{S0}x} \Omega_S(x) \quad (3.11)$$

という関係式を満たす。これを摂動的に解くと Ω_S は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \Omega_S(x) &= T \exp \left[-i \int_0^x dx' \tilde{H}_{S1}(x') \right] \\ \tilde{H}_{S1}(x) &\equiv e^{iH_{S0}x} H_{S1}(x) e^{-iH_{S0}x} \end{aligned} \quad (3.12)$$

これと (3.9)(3.10) から S 行列は最終的に以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} S(L) &= U_{23}U_{13}e^{-iH_{S0}L} \Omega_S(L) U_{13}^\dagger U_{23}^\dagger \\ &= e^{-iH_{S0}L} U_{23}U_{13} \left[1 + (-i) \int_0^L dx \tilde{H}_{S1}(x) + (-i)^2 \int_0^L dx \tilde{H}_{S1}(x) \int_0^x dx' \tilde{H}_{S1}(x') \right] U_{13}^\dagger U_{23}^\dagger + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (3.13)$$

各チャネルの S 行列の導出は付録 A に譲る。

ここから、ニュートリノファクトリー実験の主要なチャネルである $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ についての振動確率を密度分布項 a_n が現れる次数まで計算すると以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
P_{e\mu}(L) = & 4 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right)^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \sin^2 \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) \\
& + 8c_{12}c_{23}s_{12}s_{13}s_{23} \frac{\Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2}{a_0(\Delta m_{31}^2 - a_0)} \sin \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} - \delta \right) \\
& + 4 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right)^2 c_{12}^2 c_{23}^2 s_{12}^2 \sin^2 \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \\
& + 8s_{12}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \sin \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) \\
& \times \left[\left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right)^2 \sin \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) - \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \cos \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) \right] \\
& + 4c_{12}^2 c_{23}^2 s_{12}^2 (c_{12}^2 - s_{12}^2) \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right)^3 \left[2\sin^2 \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) - \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) \right] \\
& + 4c_{12}c_{23}s_{12}s_{13}s_{23} \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right)^2 \\
& \times \left[\left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \left\{ (c_{12}^2 - s_{12}^2) \sin \left(\frac{a_0 L}{2E} - \delta \right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + s_{12}^2 \sin \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{2E} - \delta \right) - c_{12}^2 \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} - \delta \right) \right\} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + 2 \left\{ s_{12}^2 \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right)^2 + (c_{12}^2 - s_{12}^2) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \right\} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \times \sin \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} - \delta \right) \right] \\
& - 16a_0 c_{12}^2 c_{23}^2 s_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Re}(a_n)}{a_0^2 - (2Ep_n)^2} \\
& + 16\Delta m_{31}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \sin^2 \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Re}(a_n)}{(\Delta m_{31}^2 - a_0)^2 - (2Ep_n)^2} \\
& + 16c_{12}c_{23}s_{12}s_{13}s_{23} \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \sin \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)}{(\Delta m_{31}^2 - a_0)^2 - (2Ep_n)^2} - \frac{a_0}{a_0^2 - (2Ep_n)^2} \right\} \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} - \delta \right) \text{Re}(a_n) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + p_n \left\{ \frac{1}{(\Delta m_{31}^2 - a_0)^2 - (2Ep_n)^2} - \frac{1}{a_0^2 - (2Ep_n)^2} \right\} \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} - \delta \right) \text{Im}(a_n) \right] \\
& + O(\epsilon^4)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

この結果からわかるように、 θ_{13} が小さい場合には、CP 位相 δ の効果と物質密度分布 a_n の効果について以下のようにまとめられる。

(i) CP 位相 δ の効果は $O(\epsilon^2)$ 、またはそれ以上の次数の項に現れる

(ii) 物質密度分布 a_n の影響は $O(\epsilon^3)$ の項に現れる

このことから、 θ_{13} が小さい場合には、物質密度分布 a_n の不定性が CP 位相 δ の測定に与える影響は小さいであろうことがわかる。また a_n の項の係数に注目すると、ニュートリノファクトリー実験が想定するニュートリノエネルギー $E_\nu \sim O(10) \text{ GeV}$ と基線長 4000 km では

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{Ep_n} &\simeq \frac{0.83}{n} \left(\frac{L}{4000 \text{ km}} \right) \left(\frac{\rho_0}{3.4 \text{ g/cc}} \right) \\ \frac{a_0}{\Delta m_{31}^2} &\simeq 1.03 \left(\frac{E}{10 \text{ GeV}} \right) \left(\frac{\rho_0}{3.4 \text{ g/cc}} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

となって $\Delta m_{31}^2 \sim a_0 \sim Ep_n$ と見なせることから、 a_n を含む項は $1/p_n^2$ (非対称成分は $1/p_n$) に比例していることがわかる。すなわち、

(iii) 密度の非平坦性の効果は、対称成分 $\text{Re}(a_n)$ が $1/n^2$ 、非対称成分 $\text{Im}(a_n)$ は $1/n$ に比例して減少していく

また、(3.14) 式から T-violation を表わす $\Delta P_{e\mu}^T(L) \equiv P_{e\mu}(L) - P_{\mu e}(L)$ を計算してやると

$$\begin{aligned} \Delta P_{e\mu}^T(L) &= 8c_{12}c_{23}s_{12}s_{13}s_{23} \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \sin\delta \\ &\times \left[2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \sin \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \right. \\ &\quad - \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \left\{ (c_{12}^2 - s_{12}^2) \cos \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + s_{12}^2 \cos \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{2E} \right) - c_{12}^2 \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left\{ s_{12}^2 \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right)^2 + (c_{12}^2 - s_{12}^2) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \sin \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \right] \\ &+ 32c_{12}c_{23}s_{12}s_{13}s_{23} \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \sin \left(\frac{a_0 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)L}{4E} \right) \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{(\Delta m_{31}^2 - a_0)}{(\Delta m_{31}^2 - a_0)^2 - (2Ep_n)^2} - \frac{a_0}{a_0^2 - (2Ep_n)^2} \right\} \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \text{Re}(a_n) \sin\delta \right. \\ &\quad \left. + p_n \left\{ \frac{1}{(\Delta m_{31}^2 - a_0)^2 - (2Ep_n)^2} - \frac{1}{a_0^2 - (2Ep_n)^2} \right\} \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \text{Im}(a_n) \cos\delta \right] \\ &+ O(\epsilon^4) \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる。ここで、地球が球対称である場合には、 $\text{Im}(a_n)=0$ であるから、 $\Delta P_{e\mu}^T(L)$ は $\sin\delta$ に比例する。すなわち、 $\Delta P_{e\mu}^T(L) \neq 0$ ならば、 $\delta \neq 0$ となって物質効果の存在の有無にかかわらず

に T 非保存、あるいは CP 対称性が破れていることを結論づけることができる。ところが非対称成分 $\text{Im}(a_n)$ がある場合、 $\delta = 0$ としても $\Delta P_{e\mu}^T(L) = 0$ とはならない。つまり、実験的に T 非保存の有無を判定する際に、物質密度の非対称成分が結果を混乱させる可能性がある。この意味でも、密度分布形状の効果は重要である。

3.2.3 ニュートリノ振動確率の摂動公式: 大きい θ_{13} の場合

次に、 θ_{13} の値が $O(1)$ として摂動パラメータを $\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \sim \frac{a_n}{\Delta m_{31}^2} (n \neq 0) \sim O(\epsilon)$ のようにとって振動確率を求める。 θ_{13} が小さい場合と同様にハミルトニアンを 0 次項 H_{L0} と 1 次項 H_{L1} をわけてやると

$$\tilde{H} = U_{23}(H_{L0} + H_{L1})U_{23}^\dagger \quad (3.17)$$

$$H_{L0} = \frac{1}{2E} \begin{bmatrix} a_0 + s_{13}^2 \Delta m_{31}^2 & 0 & c_{13}s_{13}\Delta m_{31}^2 e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{13}s_{13}\Delta m_{31}^2 e^{i\delta} & 0 & c_{13}^2 \Delta m_{31}^2 \end{bmatrix}$$

$$H_{L1}(x) = \frac{1}{2E} \left\{ \Delta m_{21}^2 \begin{bmatrix} c_{13}^2 s_{12}^2 & c_{12}c_{13}s_{12} & -c_{13}s_{12}^2 s_{13} e^{-i\delta} \\ c_{12}c_{13}s_{12} & c_{12}^2 & -c_{12}s_{12}s_{13} e^{-i\delta} \\ -c_{13}s_{12}^2 s_{13} e^{i\delta} & -c_{12}s_{12}s_{13} e^{i\delta} & s_{12}^2 s_{13}^2 \end{bmatrix} + \delta a(x) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.18)$$

と書ける。上記の H_{L0} は対角化されていないために、そのままでは摂動計算をおこなう際に非常に見通しが悪い。そこで H_{L0} を対角化する基底 (ティルダ基底と呼ぶ) に移行する。摂動のためにユニタリ行列 $U_{\tilde{\theta}}$ を使って H_{L0} を対角化する。

$$\tilde{H}_{L0} \equiv U_{\tilde{\theta}}^\dagger H_{L0} U_{\tilde{\theta}} \quad (3.19)$$

\tilde{H}_{L0} は次のように求まる。

$$\tilde{H}_{L0} = \frac{1}{2E} \begin{bmatrix} \lambda_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_+ \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ (a_0 + \Delta m_{31}^2) \pm \sqrt{(a_0 + \Delta m_{31}^2)^2 - 4a_0 \Delta m_{31}^2 c_{13}^2} \right\} \quad (3.20)$$

また、ユニタリ行列は $s_{\tilde{\theta}} \equiv \sin \tilde{\theta}$, $c_{\tilde{\theta}} \equiv \cos \tilde{\theta}$ という略記号を導入すると次のように書ける。

$$U_{\tilde{\theta}} \equiv \begin{bmatrix} c_{\tilde{\theta}} & 0 & s_{\tilde{\theta}} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{\tilde{\theta}} e^{i\delta} & 0 & c_{\tilde{\theta}} \end{bmatrix}, \quad \tan 2\tilde{\theta} = \frac{2c_{13}s_{13}\Delta m_{31}^2}{(c_{13}^2 - s_{13}^2)\Delta m_{31}^2 - a_0} \quad (3.21)$$

このような基底を用いると、元のハミルトニアンは以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= U_{23} U_{\tilde{\theta}} (\tilde{H}_{L0} + \tilde{H}_{L1}) U_{\tilde{\theta}}^\dagger U_{23}^\dagger \\ &= U_{23} U_{\tilde{\theta}} \tilde{H}_L U_{\tilde{\theta}}^\dagger U_{23}^\dagger \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここで、 $\tilde{H}_{L1}(x) \equiv U_{\tilde{\theta}}^\dagger H_{L1} U_{\tilde{\theta}}$ と定義してあり、実際に計算すると、

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{L1}(x) = & \frac{1}{2E} \left\{ \delta a(x) \begin{bmatrix} c_{\tilde{\theta}}^2 & 0 & c_{\tilde{\theta}} s_{\tilde{\theta}} e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{\tilde{\theta}} s_{\tilde{\theta}} e^{i\delta} & 0 & s_{\tilde{\theta}}^2 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \Delta m_{21}^2 \begin{bmatrix} s_{12}^2 \cos^2(\tilde{\theta} - \theta_{13}) & c_{12} s_{12} \cos(\tilde{\theta} - \theta_{13}) & \frac{1}{2} s_{12}^2 \sin 2(\tilde{\theta} - \theta_{13}) e^{-i\delta} \\ c_{12} s_{12} \cos(\tilde{\theta} - \theta_{13}) & c_{12}^2 & c_{12} s_{12} \sin(\tilde{\theta} - \theta_{13}) e^{-i\delta} \\ \frac{1}{2} s_{12}^2 \sin 2(\tilde{\theta} - \theta_{13}) e^{i\delta} & c_{12} s_{12} \sin(\tilde{\theta} - \theta_{13}) e^{i\delta} & s_{12}^2 \sin^2(\tilde{\theta} - \theta_{13}) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

と書けている。ティルダ基底の S 行列はハミルトニアン \tilde{H}_L を用いて

$$\tilde{S}_L(L) = T \exp \left[-i \int_0^L dx \tilde{H}_L(x) \right] \quad (3.24)$$

と書け、これを用いて S 行列は

$$S(L) = U_{23} U_{\tilde{\theta}} \tilde{S}_L U_{\tilde{\theta}}^\dagger U_{23}^\dagger \quad (3.25)$$

と求まる。ここで、 $\Omega_L(x) \equiv e^{i\tilde{H}_{L0}x} \tilde{S}_L(x)$ という量を定義すれば、

$$i \frac{d}{dx} \Omega_L(x) = e^{i\tilde{H}_{L0}x} \tilde{H}_{L1}(x) e^{-i\tilde{H}_{L0}x} \Omega_L(x) \quad (3.26)$$

を満たす。これを解くと、

$$\begin{aligned} \Omega_L(x) &= T \exp \left[-i \int_0^x dx' \tilde{H}'_1(x') \right] \\ \tilde{H}'_{L1}(x) &\equiv e^{i\tilde{H}_{L0}x} \tilde{H}_{L1}(x) e^{-i\tilde{H}_{L0}x} \end{aligned} \quad (3.27)$$

と書ける。よって、 θ_{13} が大きい場合の S 行列は ϵ の 1 次のオーダーまでとると

$$\begin{aligned} S(L) &= U_{23} U_{\tilde{\theta}} e^{-i\tilde{H}_{L0}x} \Omega_L(x) U_{\tilde{\theta}}^\dagger U_{23}^\dagger \\ &= e^{-i\tilde{H}_{L0}x} U_{23} U_{\tilde{\theta}} \left[1 + (-i) \int_0^L dx H'_1(x) \right] U_{\tilde{\theta}}^\dagger U_{23}^\dagger + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

となる。 θ_{13} が小さい場合と同様に、各チャネルの S 行列の導出は付録 B に譲る。 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ についての振動確率を密度分布項 a_n が現れる次数まで計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
P_{e\mu}(L) = & 4c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{(\lambda_+ - \lambda_-)L}{4E} \right) \\
& + 2s_{12}^2 c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right)^2 \frac{\{a_0(c_{13}^2 - s_{13}^2) - \Delta m_{31}^2\}}{\lambda_+ - \lambda_-} \sin \left(\frac{(\lambda_+ - \lambda_-)L}{2E} \right) \\
& - 8a_0 s_{12}^2 c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 [a_0 - (c_{13}^2 - s_{13}^2)\Delta m_{31}^2] \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \frac{\Delta m_{31}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^3} \sin^2 \left(\frac{(\lambda_+ - \lambda_-)L}{4E} \right) \\
& + 4c_{12}s_{12}s_{13}c_{23}s_{23} \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \sin \left(\frac{(\lambda_+ - \lambda_-)L}{4E} \right) \left[2\sin \left(\frac{\lambda_- L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\lambda_+ L}{4E} \right) \sin \delta \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \sin \left(\frac{(\lambda_+ + \lambda_-)L}{4E} \right) + \frac{\{a_0(c_{13}^2 - s_{13}^2) - \Delta m_{31}^2\}}{\lambda_+ - \lambda_-} \sin \left(\frac{(\lambda_+ - \lambda_-)L}{4E} \right) \right\} \cos \delta \right] \\
& - 16c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{a_0 - (c_{13}^2 - s_{13}^2)\Delta m_{31}^2\} \operatorname{Re}(a_n)}{(\lambda_+ - \lambda_-)^2 - (2Ep_n)^2} \sin^2 \left(\frac{(\lambda_+ - \lambda_-)L}{4E} \right) \\
& + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

この結果からわかるように、 θ_{13} が大きい場合には、CP 位相 δ の効果と物質密度分布 a_n の効果について以下のようにまとめられる。

- (i) CP 位相 δ の効果は $O(\epsilon)$ の項に現れる
- (ii) 物質密度分布 a_n の影響についても $O(\epsilon)$ の項に現れる

つまり θ_{13} が大きい場合には、物質密度分布 a_n を含む項と CP 位相 δ が同じ次数で振動確率に効いてくることになる。これより物質密度分布の不定性が CP 位相 δ の測定に大きな影響を与える可能性がある。また a_n の項の係数については $O(\epsilon)$ まででは非対称成分は出てこない。すなわち、

- (iii) 密度分布 a_n の効果は 対称成分のみで $1/n^2$ に比例して減少していく

3.3 解析

この節では、CP 位相 δ 測定の際の地球物質密度不定性の影響を、前節で導出した振動公式の結果を使って半定量的に議論する。ニュートリノファクトリー実験の環境で、主要なチャネルである $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ を使って、地球物質密度不定性に起因する振動確率の変化の大きさと CP 位相を変化させた際の振動確率の変化の大きさを比較する。ここで、CP 位相の変化による振動確率の値の変化に対し、地球物質密度不定性の影響による誤差が充分小さければ、密度不定性の影響はほとんど無視できることになる。

そこで、以下のような量を定義し数値的に比較することで、パラメータ決定への影響を考察する。まず、物質密度不定性による振動確率の変化を表わす量を考える。物質密度の不定性については 3.1 節で考察を行ったように、間接測定による精度の不十分さに起因する平均的な物質密度の不定性と密度形状の不定性が存在する。この不定性の振動確率への影響は、それぞれ

別々に定義すると

$$\Delta P_{e\mu}(\Delta a_0) = P_{e\mu}(\delta_0, a_0 \pm \Delta a_0, a_1) - P_{e\mu}(\delta_0, a_0, a_1) \quad (3.30)$$

$$\Delta P_{e\mu}(\Delta a_1) = P_{e\mu}(\delta_0, a_0, a_1 \pm \Delta a_1) - P_{e\mu}(\delta_0, a_0, a_1) \quad (3.31)$$

のようになる。物質密度の不定性の大きさについては、既に述べたように平均密度の不定性を $\Delta a_0 = \pm 5\%$ とし、密度分布形状の不定性をモデル間の形状の相違から見積もることで Fourier 係数の第 1 モード a_1 においては $\Delta a_1 = \pm 200\%$ と考える。

次に CP 位相が変化した場合の、振動確率の変化を定義する。CP 位相については現在まで実験的に全く決まっていない。そこで、適当な値 δ_0 からのずらしたときに、どの程度振動確率に変化が起こるかということを見ると

$$\Delta P_{e\mu}(\delta) = P_{e\mu}(\delta, a_0, a_1) - P_{e\mu}(\delta_0, a_0, a_1) \quad (3.32)$$

のような量が定義される。ここで δ は $0 \leq \delta < 2\pi$ の値をとる。これらの量を実際にニュートリノ振動のパラメータ (2.3) と、ニュートリノファクトリー実験でのニュートリノのエネルギーと基線長を用いて表わす

まず、 θ_{13} が小さい場合についてプロットすると以下のようなになる。

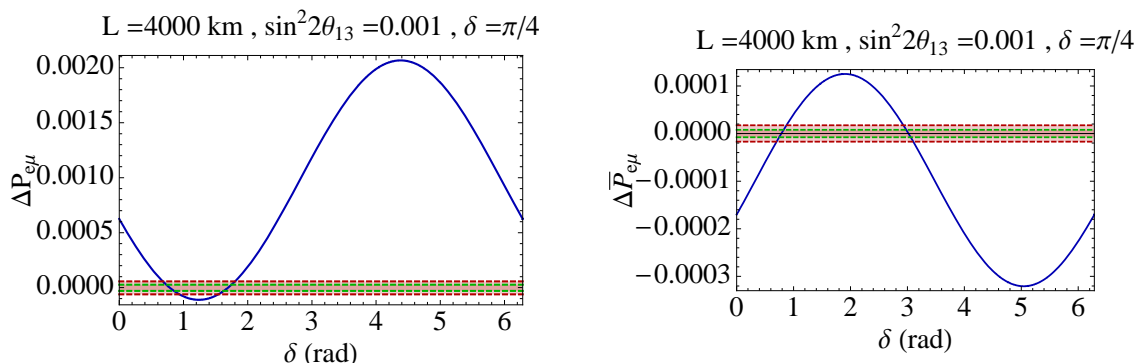


図 3.5: θ_{13} が小さい場合の振動確率の変化。実線が δ を変化させたときの振動確率の変化、破線で囲まれた薄い影の部分が a_0 の不定性によって生じる振動確率の不定性を、濃い影の部分が a_1 の不定性によって生じる振動確率の不定性を表わす。左図がニュートリノチャンネル右図が反ニュートリノチャンネルを表わす。

図から明らかなように、 θ_{13} が小さい場合においては密度分布不定性による振動確率の変化は δ の変化に対する振動確率の変化に対して十分小さいことがわかる。これは前節で求めた摂動公式から得られる理解と一致する。

次に、 θ_{13} が大きい場合について考える。図 (3.6) より、 θ_{13} が大きい場合には、反ニュートリノチャンネルにおいてもっとも顕著であるが、密度分布形状不定性による振動確率の変化は δ の変化に対する振動確率の変化に対して無視できない程度の大きさを持つことがわかる。特にこのときの不定性の影響はともに大きいため、平均密度 a_0 の影響だけではなく、密度形状 a_1 の不定性についても考慮する必要があることがわかる。これは、振動確率の摂動公式において

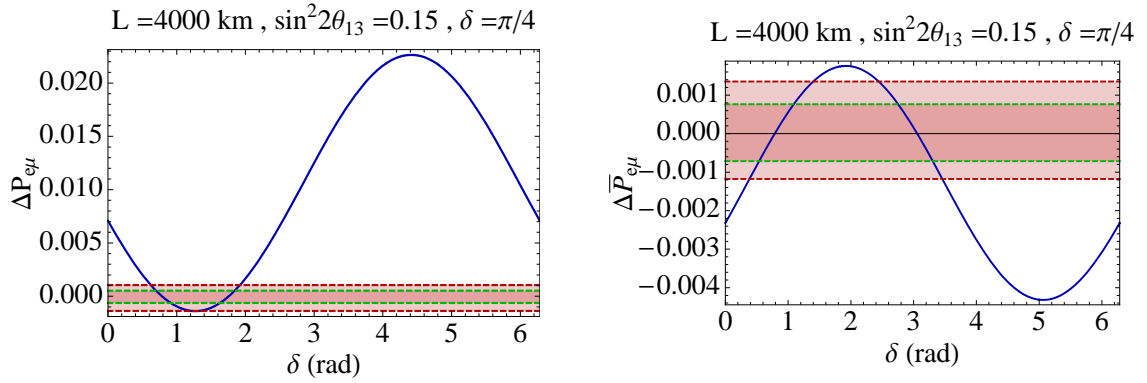


図 3.6: θ_{13} が大きい場合の振動確率の変化。実線が δ を変化させたときの振動確率の変化、破線で囲まれた薄い影の部分 a_0 の不定性によって生じる振動確率の不定性を、濃い影の部分 a_1 の不定性によって生じる振動確率の不定性を表わす。左図がニュートリノチャンネル右図が反ニュートリノチャンネルを表わす。

見たように、物質密度形状の効果と CP 位相の効果と同次で現れるためだと考えられる。よって、 θ_{13} が大きい場合においては、密度分布形状の不定性まで考慮にいれる必要があると考えられる。

3.4 密度形状不定性の平均密度不定性への繰り込み

前節でみたように、 θ_{13} が大きい場合には、密度不定性については平均密度 a_0 と密度形状 a_1 両方の不定性を考える必要があると述べた。しかし、ニュートリノファクトリーの中距離基線 4000 km における $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ を考える際には、密度形状の不定性による振動確率への影響と平均密度の不定性による変化が非常に似た振舞いをするのがわかる。これを表わしたのが以下のグラフである。

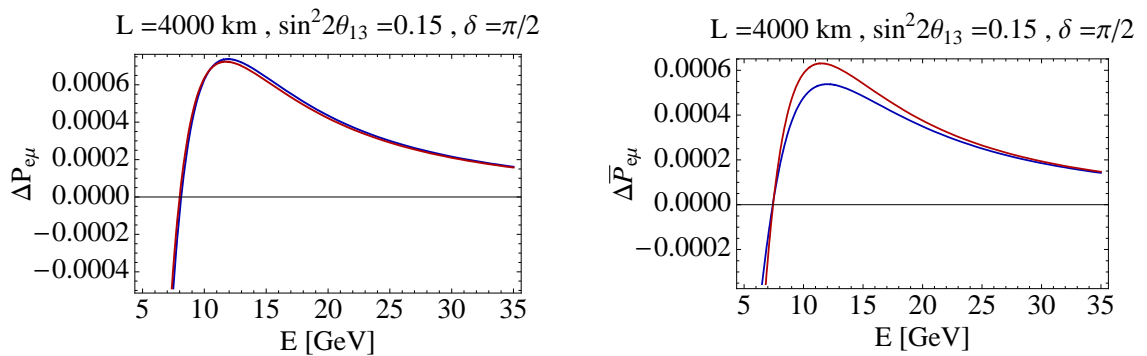


図 3.7: 青が平均密度の不定性 $\Delta a_0 = +2.4\%$ を入れたもの、赤が密度形状の不定性 $\Delta a_1 = +200\%$ を入れたもの。左図がニュートリノチャンネル、右図が反ニュートリノチャンネルを表わす。

ここで a_1 の不定性は $\Delta a_1 = -200\%$ としてやっても、適当な Δa_0 をとってやることで似たような確率変化を作ることができる。このことから、 θ_{13} が大きな場合に 4000km 程度の基線長

を考えるならば、密度形状の不定性による振動確率の変化を、平均密度の不定性による変化として繰り込んでやってもよいことがわかる。こうすることで不定性のパラメータを2個から1個に減らせることになり、CP位相測定への悪影響を減らすことができる。

第4章 結論

本研究の目的は、次世代の長基線ニュートリノ振動実験の一つであるニュートリノファクトリーにおいて、地球の物質密度不定性がCP位相の測定に与える影響を検証することであった。物質密度の不定性について議論した先行研究の多くにおいて、地球物質密度の平均値に関する不定性は考慮されてきたが、密度形状の不定性についてまで考慮したものはほとんどなかった。そこで本研究では、先行研究に基づき地球の物質密度をFourier展開することで密度形状を取り扱えるようにした。そのような方法を採用することで、ニュートリノファクトリーの基線長においてCP位相を測定する際には、Fourier係数の低次のモードをいくつか採った近似的な物質密度でほぼ正確なニュートリノの振動確率を表わせることをみた。また、解析的な理解を得るために、ニュートリノファクトリーの主要チャネルである $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ 振動確率の摂動公式を未定パラメータ θ_{13} の大きさを考慮して導出した。このようにして求められた摂動公式から物質密度形状の影響は θ_{13} が小さい場合にはCP位相 δ より $O(\epsilon)$ 高い次数から、 θ_{13} が大きい場合にはCP位相 δ と同じオーダーで効いてくることがわかった。また、地球物質密度形状の効果は対称成分 $\text{Re}(a_n)$ が $1/n^2$ で、非対称成分 $\text{Im}(a_n)$ が $1/n$ で減少していくことをみた。そしてこのような解析的な理解が、定量的な計算において確からしいことをみた。具体的には、 θ_{13} が小さい場合において実際に密度形状不定性による影響がCP位相の効果に比べて充分小さく、 θ_{13} が大きい場合において密度形状のパラメータ a_0, a_1 の不定性による影響がともに無視できないような大きさであることをみた。加えて、今回のような実験環境を仮定する際、 θ_{13} が大きい場合には密度形状のパラメータの影響は平均密度を変化させることによってほぼ表現されることから、平均密度の不定性の大きさを大きく採ることで物質密度の不定性に関するパラメータを減らすことが可能であることを示した。

今後の研究課題としては、実際にシミュレーションをおこなって δ の決定精度を評価することや θ_{13} を測定する際にはこの密度形状の不定性がどのように効いてくるかを定量的に議論することが考えられる。

謝辞

本論文の作成において、温かく御指導いただきました南方久和先生に心から感謝いたします。また、研究過程全般において様々な助言を下された内波さんをはじめ、研究室の皆様にも深く感謝しております。最後に、私の学業を精神的・経済的に支援し続けてくださいました両親に心から感謝の意を表します。

付録 A 摂動計算で求められた S 行列: —小さい θ_{13} の場合—

3.2.2 節 (3.13) 式を使うと、 $O(\epsilon^2)$ までの S 行列は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 S_{ee}(L) = & e^{-i\frac{a_0}{2E}L} \left[1 - is_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) + is_{13}^2 \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) \right] + s_{13}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 + a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \\
 & - \frac{1}{2} s_{12}^4 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right)^2 e^{-i\frac{a_0}{2E}L} - c_{12}^2 s_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left[i \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) e^{-i\frac{a_0}{2E}L} - \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) (1 - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right] \\
 & + s_{13}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \left[i \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) e^{-i\frac{a_0}{2E}L} + \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right] \quad (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{e\mu}(L) = & is_{12}^2 s_{13} s_{23} e^{-i\delta - i\frac{a_0}{2E}L} \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \\
 & - c_{12} c_{23} s_{12} \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left[(1 - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) + \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left\{ (1 - e^{-i\frac{a_0}{2E}L})(c_{12}^2 - s_{12}^2) \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - i \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) (c_{12}^2 - s_{12}^2 e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right\} \right] \\
 & + s_{13} s_{23} e^{-i\delta} \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \left[(e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + s_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right) \left\{ i e^{-i\frac{a_0}{2E}L} \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) + \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right\} \right] \\
 & + 2c_{12} c_{23} s_{12} (1 - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_0^2 - (2Ep_n)^2} \left[a_0 \text{Re}(a_n) + 2iEp_n \text{Im}(a_n) \right] \\
 & + 2s_{13} s_{23} e^{-i\delta} (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\Delta m_{31}^2 - a_0)^2 - (2Ep_n)^2} [(\Delta m_{31}^2 - a_0) \text{Re}(a_n) - 2iEp_n \text{Im}(a_n)] \quad (\text{A.2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{e\tau}(L) = & \ i s_{12}^2 s_{13} c_{23} e^{-i\delta - i\frac{a_0}{2E}L} \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \\
& + c_{12} s_{23} s_{12} \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left[(1 - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) + \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \left\{ (1 - e^{-i\frac{a_0}{2E}L})(c_{12}^2 - s_{12}^2) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - i \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) (c_{12}^2 - s_{12}^2 e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right\} \right] \\
& + s_{13} c_{23} e^{-i\delta} \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \left[(e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + s_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right) \left\{ i e^{-i\frac{a_0}{2E}L} \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) + \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right\} \right] \\
& - 2c_{12} s_{23} s_{12} (1 - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_0^2 - (2Ep_n)^2} \left[a_0 \text{Re}(a_n) + 2iEp_n \text{Im}(a_n) \right] \\
& + 2s_{13} c_{23} e^{-i\delta} (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \\
& \qquad \qquad \qquad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\Delta m_{31}^2 - a_0)^2 - (2Ep_n)^2} [(\Delta m_{31}^2 - a_0) \text{Re}(a_n) - 2iEp_n \text{Im}(a_n)] \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\mu\mu}(L) = & \ c_{23}^2 \left[1 - i s_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \right] + s_{23}^2 e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} \left[1 - i s_{13}^2 \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) \right] \\
& + s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 + a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \\
& + 2s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} s_{13} \cos\delta \left[\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) (1 - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) + \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right) (1 - e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L}) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right] \\
& - c_{12}^2 c_{23}^2 \left[\frac{1}{2} c_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right)^2 - i s_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) + s_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right)^2 (1 - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right] \\
& - s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \left[i \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} + \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}L} - e^{-i\frac{a_0}{2E}L}) \right] \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\mu\tau}(L) = & -c_{23}s_{23} \left[1 - ic_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) - s_{23}^2 e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}} \left\{ 1 - is_{13}^2 \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) \right\} \right] \\
& + c_{12}s_{12}s_{13} \left(c_{23}^2 e^{-i\delta} - s_{23}^2 e^{i\delta} \right) \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) (1 - e^{-i\frac{a_0 L}{2E}}) \\
& - c_{23}s_{23}s_{13}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 + a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}} - e^{-i\frac{a_0 L}{2E}}) \\
& + c_{12}s_{12}s_{13} \left(c_{23}^2 e^{-i\delta} - s_{23}^2 e^{i\delta} \right) \left[\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right) (1 - e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}}) + \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}} - e^{-i\frac{a_0 L}{2E}}) \right] \\
& - c_{12}^2 c_{23} s_{23} \left[\frac{1}{2} c_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right)^2 - is_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) + s_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right)^2 (1 - e^{-i\frac{a_0 L}{2E}}) \right] \\
& - c_{23}s_{23}s_{13}^2 \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \left[i \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}} + \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}} - e^{-i\frac{a_0 L}{2E}}) \right] \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\tau\tau}(L) = & s_{23}^2 \left[1 - is_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \right] + c_{23}^2 e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}} \left[1 - is_{13}^2 \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) \right] \\
& + s_{13}^2 c_{23}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 + a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}} - e^{-i\frac{a_0 L}{2E}}) \\
& - 2s_{12}c_{12}s_{23}c_{23}s_{13}\cos\delta \left[\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) (1 - e^{-i\frac{a_0 L}{2E}}) + \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right) (1 - e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}}) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}} - e^{-i\frac{a_0 L}{2E}}) \right] \\
& - c_{12}^2 s_{23}^2 \left[\frac{1}{2} c_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right)^2 - is_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right) + s_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{a_0} \right)^2 (1 - e^{-i\frac{a_0 L}{2E}}) \right] \\
& - s_{13}^2 c_{23}^2 \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) \left[i \left(\frac{a_0 L}{2E} \right) e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}} + \left(\frac{a_0}{\Delta m_{31}^2 - a_0} \right) (e^{-i\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}} - e^{-i\frac{a_0 L}{2E}}) \right] \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

その他の行列については

$$\begin{aligned}
S_{\mu e}(\delta, p_n) &= S_{e\mu}(-\delta, -p_n) \\
S_{\tau e}(\delta, p_n) &= S_{e\tau}(-\delta, -p_n) \\
S_{\tau\mu}(\delta, p_n) &= S_{\mu\tau}(-\delta, -p_n) \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

のように求めることができる。CP 変換した行列との関係は

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{e\mu}(\delta, a) &= S_{e\mu}(-\delta, -a) \\
\bar{S}_{e\tau}(\delta, a) &= S_{e\tau}(-\delta, -a) \\
\bar{S}_{\mu\tau}(\delta, a) &= S_{\mu\tau}(-\delta, -a) \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

となる。また、 $S_{e\mu}$ と $S_{e\tau}$ 、 $S_{\mu\mu}$ と $S_{\tau\tau}$ の間には以下のような関係がある。

$$\begin{aligned}
S_{e\mu}(c_{23}, s_{23}) &= S_{e\tau}(-s_{23}, c_{23}) \\
S_{\mu\mu}(c_{23}^2, s_{23}^2, c_{23}s_{23}) &= S_{\tau\tau}(s_{23}^2, c_{23}^2, -c_{23}s_{23}) \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

付録B 摂動計算で求められたS行列: —大きい θ_{13} の場合—

3.2.3節の(3.28)式を使うと $O(\epsilon)$ までのS行列はつぎのように求められる。

$$\begin{aligned}
S_{ee}(L) = & c_{\bar{\theta}}^2 e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} + s_{\bar{\theta}}^2 e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} \\
& -is_{12}^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \left[c_{\bar{\theta}}^2 (c_{13}c_{\bar{\theta}} + s_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} + s_{\bar{\theta}}^2 (s_{13}c_{\bar{\theta}} - c_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} \right] \\
& + 2a_0 s_{12}^2 c_{13}^2 s_{13}^2 \frac{\Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^3} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \\
& + 4c_{13}^2 s_{13}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Re}(a_n) \Delta m_{31}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^2 - (2Ep_n)^2} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \tag{B.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{e\mu}(L) = & c_{13}s_{13}s_{23}e^{-i\delta} \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \\
& + is_{12}^2 c_{13}s_{13}s_{23}e^{-i\delta} \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \left[(c_{13}c_{\bar{\theta}} + s_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} - (s_{13}c_{\bar{\theta}} - c_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} \right] \\
& - c_{12}s_{12}c_{23}\Delta m_{21}^2 \left\{ \frac{1}{\lambda_-} (c_{13}c_{\bar{\theta}}^2 + s_{13}c_{\bar{\theta}}s_{\bar{\theta}})(1 - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\lambda_+} (c_{13}s_{\bar{\theta}}^2 - s_{13}c_{\bar{\theta}}s_{\bar{\theta}})(1 - e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L}) \right\} \\
& - a_0 s_{12}^2 c_{13}s_{13}s_{23}e^{-i\delta} [a_0 - (c_{13}^2 - s_{13}^2)\Delta m_{31}^2] \frac{\Delta m_{21}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^3} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \\
& - 2c_{13}s_{13}s_{23}e^{-i\delta} \sum_{n=1}^{\infty} [\{a_0 - (c_{13}^2 - s_{13}^2)\Delta m_{31}^2\} \text{Re}(a_n) + 2iEp_n \text{Im}(a_n)] \\
& \quad \times \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \frac{1}{(\lambda_+ - \lambda_-)^2 - (2Ep_n)^2} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \tag{B.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{e\tau}(L) = & c_{13}s_{13}c_{23}e^{-i\delta} \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \\
& + i s_{12}^2 c_{13} s_{13} c_{23} e^{-i\delta} \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \left[(c_{13}c_{\bar{\theta}} + s_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} - (s_{13}c_{\bar{\theta}} - c_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} \right] \\
& + c_{12}s_{12}s_{23}\Delta m_{21}^2 \left\{ \frac{1}{\lambda_-} (c_{13}c_{\bar{\theta}}^2 + s_{13}c_{\bar{\theta}}s_{\bar{\theta}})(1 - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\lambda_+} (c_{13}s_{\bar{\theta}}^2 - s_{13}c_{\bar{\theta}}s_{\bar{\theta}})(1 - e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L}) \right\} \\
& - a_0 s_{12}^2 c_{13} s_{13} c_{23} e^{-i\delta} [a_0 - (c_{13}^2 - s_{13}^2)\Delta m_{31}^2] \frac{\Delta m_{21}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^3} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \\
& - 2c_{13}s_{13}c_{23}e^{-i\delta} \sum_{n=1}^{\infty} [\{a_0 - (c_{13}^2 - s_{13}^2)\Delta m_{31}^2\} \text{Re}(a_n) + 2iE p_n \text{Im}(a_n) t p] \\
& \quad \times \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \frac{1}{(\lambda_+ - \lambda_-)^2 - (2E p_n)^2} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \tag{B.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\mu\mu}(L) = & (1 - s_{23}^2) + s_{23}^2 \left[s_{\bar{\theta}}^2 e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} + c_{\bar{\theta}}^2 e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} \right] \\
& - i \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \left[c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 \left\{ s_{\bar{\theta}}^2 (c_{13}c_{\bar{\theta}} + s_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} + c_{\bar{\theta}}^2 (s_{13}c_{\bar{\theta}} - c_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} \right\} \right] \\
& + 2c_{12}s_{12}c_{23}s_{23}\cos\delta \Delta m_{21}^2 \left\{ \frac{1}{\lambda_-} (s_{13}s_{\bar{\theta}}^2 + c_{13}c_{\bar{\theta}}s_{\bar{\theta}})(1 - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\lambda_+} (s_{13}c_{\bar{\theta}}^2 - c_{13}c_{\bar{\theta}}s_{\bar{\theta}})(1 - e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L}) \right\} \\
& - 2a_0 s_{12}^2 c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \frac{\Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^3} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \\
& - 4c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Re}(a_n) \Delta m_{31}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^2 - (2E p_n)^2} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \tag{B.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\mu\tau}(L) = & -c_{23}s_{23} \left[1 - s_{\bar{\theta}}^2 e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} - c_{\bar{\theta}}^2 e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} \right] \\
& + ic_{23}s_{23} \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \left[c_{12}^2 - s_{12}^2 \left\{ s_{\bar{\theta}}^2 (c_{13}c_{\bar{\theta}} + s_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} + c_{\bar{\theta}}^2 (s_{13}c_{\bar{\theta}} - c_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} \right\} \right] \\
& + c_{12}s_{12} (c_{23}^2 e^{-i\delta} - s_{23}^2 e^{i\delta}) \Delta m_{21}^2 \left\{ \frac{1}{\lambda_-} (s_{13}s_{\bar{\theta}}^2 + c_{13}c_{\bar{\theta}}s_{\bar{\theta}}) (1 - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\lambda_+} (s_{13}c_{\bar{\theta}}^2 - c_{13}c_{\bar{\theta}}s_{\bar{\theta}}) (1 - e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L}) \right\} \\
& - 2a_0 s_{12}^2 c_{13}^2 s_{13}^2 c_{23} s_{23} \frac{\Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^3} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \\
& - 4c_{13}^2 s_{13}^2 c_{23} s_{23} \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Re}(a_n) \Delta m_{31}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^2 - (2Ep_n)^2} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \quad (\text{B.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\tau\tau}(L) = & (1 - c_{23}^2) + c_{23}^2 \left[s_{\bar{\theta}}^2 e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} + c_{\bar{\theta}}^2 e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} \right] \\
& - i \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \right) \left[c_{12}^2 s_{23}^2 + s_{12}^2 c_{23}^2 \left\{ s_{\bar{\theta}}^2 (c_{13}c_{\bar{\theta}} + s_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} + c_{\bar{\theta}}^2 (s_{13}c_{\bar{\theta}} - c_{13}s_{\bar{\theta}})^2 e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} \right\} \right] \\
& - 2c_{12}s_{12}c_{23}s_{23}\cos\delta \Delta m_{21}^2 \left\{ \frac{1}{\lambda_-} (s_{13}s_{\bar{\theta}}^2 + c_{13}c_{\bar{\theta}}s_{\bar{\theta}}) (1 - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\lambda_+} (s_{13}c_{\bar{\theta}}^2 - c_{13}c_{\bar{\theta}}s_{\bar{\theta}}) (1 - e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L}) \right\} \\
& - 2a_0 s_{12}^2 c_{13}^2 s_{13}^2 c_{23}^2 \frac{\Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^3} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \\
& - 4c_{13}^2 s_{13}^2 c_{23}^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Re}(a_n) \Delta m_{31}^2}{(\lambda_+ - \lambda_-)^2 - (2Ep_n)^2} \left[e^{-i\frac{\lambda_+}{2E}L} - e^{-i\frac{\lambda_-}{2E}L} \right] \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

その他の行列については

$$\begin{aligned}
S_{\mu e}(\delta, p_n) &= S_{e\mu}(-\delta, -p_n) \\
S_{\tau e}(\delta, p_n) &= S_{e\tau}(-\delta, -p_n) \\
S_{\tau\mu}(\delta, p_n) &= S_{\mu\tau}(-\delta, -p_n) \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

のように求めることができる。CP 変換した行列との関係は

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{e\mu}(\delta, a) &= S_{e\mu}(-\delta, -a) \\
\bar{S}_{e\tau}(\delta, a) &= S_{e\tau}(-\delta, -a) \\
\bar{S}_{\mu\tau}(\delta, a) &= S_{\mu\tau}(-\delta, -a) \quad (\text{B.8})
\end{aligned}$$

となる。また、 $S_{e\mu}$ と $S_{e\tau}$ 、 $S_{\mu\mu}$ と $S_{\tau\tau}$ の間には以下のような関係がある。

$$\begin{aligned}
S_{e\mu}(c_{23}, s_{23}) &= S_{e\tau}(-s_{23}, c_{23}) \\
S_{\mu\mu}(c_{23}^2, s_{23}^2, c_{23}s_{23}) &= S_{\tau\tau}(s_{23}^2, c_{23}^2, -c_{23}s_{23}) \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] Y. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998) [arXiv:hep-ex/9807003].
- [2] B. Aharmim *et al.* [SNO Collaboration], Phys. Rev. C **72**, 055502 (2005) [arXiv:nucl-ex/0502021].
- [3] Y. Ashie *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D **71**, 112005 (2005) [arXiv:hep-ex/0501064].
- [4] P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], Phys. Rev. Lett. **101**, 131802 (2008) [arXiv:0806.2237 [hep-ex]].
- [5] M. Apollonio *et al.* [CHOOZ Collaboration], Phys. Lett. B **466**, 415 (1999) [arXiv:hep-ex/9907037].
- [6] S. Geer, Phys. Rev. D **57**, 6989 (1998) [Erratum-ibid. D **59**, 039903 (1999)] [arXiv:hep-ph/9712290].
- [7] A. Bandyopadhyay *et al.* [ISS Physics Working Group], arXiv:0710.4947 [hep-ph].
- [8] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).
- [9] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [10] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. **55**, 1039 (1985).
- [11] L. Wolfenstein, Phys. Rev. D **17**, 2369 (1978);
S. P. Mikheev and A. Y. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42**, 913 (1985) [Yad. Fiz. **42**, 1441 (1985)].
- [12] K. Kimura, A. Takamura and H. Yokomakura, Phys. Rev. D **66**, 073005 (2002) [arXiv:hep-ph/0205295].
- [13] A. Cervera, A. Donini, M. B. Gavela, J. J. Gomez Cadenas, P. Hernandez, O. Mena and S. Rigolin, Nucl. Phys. B **579**, 17 (2000) [Erratum-ibid. B **593**, 731 (2001)] [arXiv:hep-ph/0002108].
- [14] P. Huber, M. Lindner, M. Rolinec and W. Winter, Phys. Rev. D **74**, 073003 (2006) [arXiv:hep-ph/0606119].

- [15] H. Minakata and S. Uchinami, Phys. Rev. D **75**, 073013 (2007) [arXiv:hep-ph/0612002].
- [16] A. M. Dziewonski and D. L. Anderson, “Preliminary reference Earth model,” Phys. Earth. Planet. Inter. **25**, 4, 297, (1981)
- [17] B. L. N. Kennett, E. R. Engdahl, and R. Buland, Geophys. J. Int., **122** 108 (1995) .
- [18] R. J. Geller and T. Hara, Nucl. Instrum. Meth. A **503**, 187 (2001) [arXiv:hep-ph/0111342].
- [19] T. Ota and J. Sato, Phys. Rev. D **63**, 093004 (2001) [arXiv:hep-ph/0011234].
- [20] T. Ota and J. Sato, Phys. Rev. D **67**, 053003 (2003) [arXiv:hep-ph/0211095].