

長基線実験における
ステライルニュートリノの兆候と
 θ_{23} -octant 決定への影響

渡邊 仁
首都大学東京 理学研究科
物理学専攻 素粒子理論研究室

2020 年 1 月 20 日

目次

概要	ii
第 1 章 標準模型	1
1.1 電弱理論	1
1.2 Higgs 機構	4
1.3 電弱相互作用	5
1.4 3 世代への拡張と世代混合	6
第 2 章 ニュートリノ	9
2.1 Dirac 質量	9
2.2 Majorana 質量	10
2.3 Dirac-Majorana 質量	11
2.4 See-saw 機構	12
2.5 真空中のニュートリノ振動	13
2.6 物質中のニュートリノ振動	14
第 3 章 ステライルニュートリノ	18
3.1 振動パラメーターの現状	18
3.2 LSND によるステライルニュートリノ	19
3.3 3 + 1 ニュートリノシナリオ	20
第 4 章 長基線実験	23
4.1 DUNE, T2HK	23
4.2 χ^2 の計算	25
第 5 章 結論	32
謝辞	33
参考文献	34

概要

素粒子物理学における標準模型は、ニュートリノを質量のない粒子とした理論であり、成功を収めた。しかし、近年観測されたニュートリノ振動現象はニュートリノに質量があることによって発生するため、標準模型の枠組みでは説明できない。そのためニュートリノ振動に関する研究は標準模型を超えた物理において非常に重要である。標準的な3世代のニュートリノ振動は3つの混合角 $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ と1つの位相 δ_{CP} 、2つの2乗質量差 $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ を用いて表され、太陽、大気、原子炉、加速器ニュートリノ実験を通して $\theta_{12} = 33^\circ, \theta_{13} = 8^\circ, \Delta m_{21}^2 = 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, |\Delta m_{31}^2| = 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ は良い精度で測定されている。[1] $\theta_{23}, \delta_{\text{CP}}, \Delta m_{31}^2$ の符号に関しては未だ精確な測定はされていない。

さらなる問題として、標準的な3世代のニュートリノの枠組みでは説明できない実験として、LSND [2] や MiniBooNE [3] といった短基線ニュートリノ振動実験では $\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$ の2乗質量差に由来すると思われるニュートリノ振動が観測されている。これを説明するために弱い相互作用をしない4つ目のニュートリノ、ステライルニュートリノを現象論的に導入する方法が提案されている。Bugey-3, MINOS+ [4] などの短基線実験、IceCube [5] の高エネルギーニュートリノ実験によって、ステライルニュートリノの可能性は制限されているが、未だ完全にその存在は否定されていない。

これらの問題は将来的に行われる長基線加速器ニュートリノ振動実験である DUNE [6], T2HK [7] などの高い統計性を持つ実験で解決できることが期待されている。

本研究では DUNE, T2HK において、ステライルニュートリノを含む3+1ニュートリノシナリオの兆候の検出可能性と θ_{23} -octant と δ_{CP} 決定への影響を検討した。

本文では、第1章でニュートリノ質量を含まない標準模型について説明し、第2章でニュートリノ質量、ニュートリノ振動と物質効果について説明する。第3章ではステライルニュートリノを含む場合のニュートリノ振動について述べ、第4章では本論文の主題である3+1ニュートリノシナリオにおける DUNE, T2HK の計算結果を示し、第5章で結論を述べる。第1章におけるゲージ理論、標準模型は主に [8] を、第2章におけるニュートリノ質量、ニュートリノ振動は主に [9–12] を参考とした。また、本論文では自然単位系 $\hbar = c = 1$ を用いる。

第 1 章

標準模型

素粒子の標準模型は $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ という対称性を持つゲージ理論である。 $SU(3)_C$ は量子色力学 (QCD)、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ は電弱理論で、その $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称性が Higgs ボゾンの存在により自発的に破れて量子電気力学 (QED) の $U(1)_{EM}$ になり、ゲージ対称性を壊さない形で素粒子に質量を与えることができる。この章では $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のうち、特に $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の電弱理論に焦点を当て、対称性の自発的破れによる質量獲得の流れを見ていく。

1.1 電弱理論

ここでは $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称性を持つ場と、そのラグランジアンについて説明する。

まず、理論に登場する場を順に説明する。 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 電弱理論にはゲージ変換のもとで表 1.1 のように変換する 5 つのフェルミオンの場が存在する。これらすべてのフェルミオン場は、ロー

フェルミオン場	$SU(2)_L$ の表現	$U(1)_Y$ 電荷	$U(1)_{EM}$ 電荷
$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	2	1/3	2/3 - 1/3
u_R	1	4/3	2/3
d_R	1	- 2/3	- 1/3
$l_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	2	-1	0 -1
e_R	1	-2	-1

表 1.1 フェルミオン場とゲージ変換の対応。**2** は $SU(2)_L$ の基本表現を意味する。添え字の L,R はそれぞれ左巻きスピノル、右巻きスピノルを意味する。

レンツ変換の下でスピン 1/2 の場として変換し、 q_L, l_L は左巻きの変換、 u_R, d_R, e_R は右巻きの変換をする 2 成分のスピノルである。 u, d をクォーク、 e, ν_e をレプトンという。

$SU(2)_L$ の生成子を I_i ($i = 1, 2, 3$) とすると、フェルミオン場に対して

$$I_i f = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{2} f & \text{for } f = q_L, l_L \\ 0 & \text{for } f = u_R, d_R, e_R \end{cases} \quad (1.1.1)$$

という性質を持ち、この生成子 I_i を弱アイソスピンと呼ぶ。ここで σ_i は Pauli 行列である。U(1)_Y の生成子を Y とすると、フェルミオン場に対して U(1)_Y 電荷を固有値として返す。例えば、

$$\begin{aligned} Yl_L &= (-1)l_L \\ Ye_R &= (-2)e_R \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

となる。この生成子 Y をハイパーチャージと呼ぶ。弱アイソスピンの第3成分 I_3 、ハイパーチャージ Y 、電荷 Q の間には西島-Gell-man の関係式

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (1.1.3)$$

が満たされている。ここで、 q_L , l_L の上成分と下成分はそれぞれ U(1)_{EM} 電荷 Q に関して、異なる固有値を持つ。すなわち、電磁相互作用 U(1)_{EM} は陽に SU(2)_L を破っている。

次にゲージ場について表 1.2 のように変換する 2 つのゲージ場が存在する。これらのゲージ場は、

ゲージ場	SU(2) _L の表現	U(1) _Y 電荷
A_μ^i	3	0
B_μ	1	0

表 1.2 ゲージ場とゲージ変換の対応。 $i = 1, 2, 3$ であり、**3** は SU(2)_L の随伴表現を意味する。

ローレンツ変換の下でベクトル場として変換し、SU(2)_L × U(1)_Y → U(1)_{EM} の自発的対称性の破れが起こる前は質量を持たない。質量を持たないベクトル場は 4 つある独立な自由度のうち、2 つの横波モードのみが物理的自由度である。物理が残りの縦波モード、スカラーモードに依存しないというところは、ゲージ対称性を持つことの現れである。

次に Higgs 場について表 1.3 のように変換する 1 つの Higgs2 重項が存在する。Higgs 場は、ロー

Higgs 場	SU(2) _L の表現	U(1) _Y 電荷	U(1) _{EM} 電荷
$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	2	1	 1 0

表 1.3 Higgs 場とゲージ変換の対応。

レンツ変換の下でスカラー場として変換する。後の議論のために、次の荷電共役場を導入する。

$$\tilde{\phi} = i\sigma^2 \phi^* \quad (1.1.4)$$

Higgs 荷電共役場	SU(2) _L の表現	U(1) _Y 電荷	U(1) _{EM} 電荷
$\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^{+*} \end{pmatrix}$	2	-1	 0 -1

表 1.4 Higgs 場の荷電共役場とゲージ変換の対応。

この荷電共役場が表 1.1 の l_L と同じ量子数を持つことに注意されたい。

それぞれの場のゲージ変換を

$$a(x) \rightarrow a'(x) = U(x)a(x) \quad (1.1.5)$$

と表す。ここで $a(x)$ は (r_2, Y) 表現として変換する場で、 r_2 は $SU(2)_L$ の表現、 Y は $U(1)_Y$ のハイパーチャージである。 $U(x)$ は

$$U(x) = \exp\left(i \sum_{i=1}^3 I^i \theta^i(x) + iY\theta_Y(x)\right) \quad (1.1.6)$$

と表せる。ここで I^i は $SU(2)_L$ の生成子である。4つの θ はすべて時空

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad (1.1.7)$$

の関数である。共変微分演算子 D_μ を次のように定義する。

$$D_\mu = \partial_\mu - igI^i A_\mu^i(x) - ig' \frac{Y}{2} B_\mu(x) \quad (1.1.8)$$

ここで g, g' はそれぞれ $SU(2)_L, U(1)_Y$ の結合定数である。これはゲージ変換により

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = U(x)D_\mu U^{-1}(x) \quad (1.1.9)$$

と変換する。これより、ゲージ場のゲージ変換は

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = -\frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^{-1}(x) + U(x) A_\mu(x) U^{-1}(x), & A_\mu(x) &= I^i A_\mu^i(x) \\ B_\mu(x) &\rightarrow B'_\mu(x) = \frac{i}{g'} \partial_\mu \theta_Y(x) + B_\mu(x) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

となる。場の強さは

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

と定義され、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1} \\ B_{\mu\nu} &\rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

とゲージ変換する。

電弱理論のラグランジアンは以下のように書ける。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \quad (1.1.13)$$

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (1.1.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fermion}} &= \bar{u}_R i\gamma^\mu D_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu D_\mu d_R + \bar{q}_L i\gamma^\mu D_\mu q_L \\ &\quad + \bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu e_R + \bar{l}_L i\gamma^\mu D_\mu l_L \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) \quad (1.1.16)$$

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.1.17)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -y^{(u)} \bar{q}_L \tilde{\phi} u_R - y^{(d)} \bar{q}_L \phi d_R - y^{(e)} \bar{l}_L \phi e_R + h.c. \quad (1.1.18)$$

ここで γ^μ は $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g_{\mu\nu}$ を満たすガンマ行列で、フェルミオン場 f について \bar{f} は

$$\bar{f} = f^\dagger \gamma^0 \quad (1.1.19)$$

と定義される随伴スピノルである。 $y^{(u)}, y^{(d)}, y^{(e)}$ はそれぞれ Higgs 場とフェルミオン場との間の湯川相互作用の結合定数である。

1.2 Higgs 機構

ここで $\mu^2 < 0$ のとき ϕ は 0 でない真空期待値を持ち、 $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ の自発的対称性の破れが起きる。このときの ϕ の真空期待値は

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{|\mu^2|}{\lambda}} \quad (1.2.1)$$

となる。この時の Higgs 場の真空でのゆらぎを ξ^j, η をもちいて

$$\langle \phi \rangle = \exp\left(-\frac{i\sigma^j \xi^j}{2v}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta) \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

と表現する。

$$U(\xi) = \exp\left(\frac{i\sigma^j \xi^j}{2v}\right) \quad (1.2.3)$$

とおき、次のようにゲージ変換する。

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = U(\xi)\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta) \end{pmatrix} \\ l_L &\rightarrow l'_L = U(\xi)l_L \\ q_L &\rightarrow q'_L = U(\xi)q_L \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = U(\xi)A_\mu U^{-1}(\xi) - \frac{i}{g}U(\xi)\partial_\mu U^{-1}(\xi) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

このときのラグランジアンの変化を一つずつ調べる。表記の簡単のため、' は落として書く。まず、湯川相互作用項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= -\frac{y^{(e)}v}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{y^{(u)}v}{\sqrt{2}}(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) - \frac{y^{(d)}v}{\sqrt{2}}(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \\ &\quad + \text{higher order terms} \\ &= -\frac{y^{(e)}v}{\sqrt{2}}\bar{e}e - \frac{y^{(u)}v}{\sqrt{2}}\bar{u}u - \frac{y^{(d)}v}{\sqrt{2}}\bar{d}d + \text{higher order terms} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

したがって ν_e, e, u, d はそれぞれ質量

$$m_{\nu_e} = 0 \quad (1.2.6)$$

$$m_f = \frac{y^{(f)}v}{\sqrt{2}}, \quad \text{for } f = e, u, d \quad (1.2.7)$$

になる。この時点で ν_e は右巻きがないので質量を持たない。

次に Higgs 場の項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - |\mu^2| \eta^2 \\ & + \frac{v^2}{8} [(g' B_\mu - g A_\mu^3)(g' B^\mu - g A^{3\mu}) + g^2 (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu})] + \text{higher order terms} \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

ここで、

$$W_\mu^\pm = \frac{A_\mu^1 \mp i A_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (1.2.9)$$

$$Z_\mu = \frac{g' B_\mu - g A_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.2.10)$$

$$A_\mu = \frac{g' B_\mu + g A_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.2.11)$$

と定義すると、

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - |\mu^2| \eta^2 + \frac{v^2 (g^2 + g'^2)}{8} Z_\mu Z^\mu + \frac{v^2 g^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} \quad (1.2.12)$$

したがって W_μ^\pm, Z_μ, A_μ の質量は

$$M_W = \frac{vg}{2}, \quad M_Z = \frac{v\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}, \quad M_A = 0 \quad (1.2.13)$$

質量のない中性ベクトル場 A_μ が電磁場の $U(1)_{EM}$ に対応する。ここで、角度 θ_W を

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (1.2.14)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \sin \theta_W B_\mu - \cos \theta_W A_\mu^3 \\ A_\mu &= \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W A_\mu^3 \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

と表せ、 θ_W を Weinberg 角と呼ぶ。以上のように $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ の自発的対称性の破れが起きることによって、フェルミオン場、ゲージ場が質量を獲得する。

1.3 電弱相互作用

Fermion 項のゲージ場 A_μ^i, B_μ を W_μ^\pm, Z_μ, A_μ に書き換える。まず、Fermion 項のラグランジアンからゲージ場との相互作用項を取り出すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & -g' \left(\bar{e}_R \gamma^\mu B_\mu e_R + \frac{2}{3} \bar{u}_R \gamma^\mu B_\mu u_R - \frac{1}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu B_\mu d_R \right) \\ & + (\bar{\nu}_{eL} \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} -\frac{g'}{2} B_\mu + \frac{g}{2} A_\mu^3 & \frac{g}{2} (A_\mu^1 - i A_\mu^2) \\ \frac{g}{2} (A_\mu^1 + i A_\mu^2) & -\frac{g'}{2} B_\mu - \frac{g}{2} A_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\ & + (\bar{u}_L \quad \bar{d}_L) \begin{pmatrix} \frac{g'}{6} B_\mu + \frac{g}{2} A_\mu^3 & \frac{g}{2} (A_\mu^1 - i A_\mu^2) \\ \frac{g}{2} (A_\mu^1 + i A_\mu^2) & \frac{g'}{6} B_\mu - \frac{g}{2} A_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

特に、 Z_μ, A_μ の部分、すなわち中性カレントに注目すると、式 1.2.10, 式 1.2.11 より、

$$\mathcal{L}_{\text{NC}} = e j^{\mu(\text{em})} A_\mu + \sqrt{g^2 + g'^2} j^{\mu(0)} Z_\mu \quad (1.3.2)$$

ここで、

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.3.3)$$

$$j^{\mu(\text{em})} = \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d - \bar{e} \gamma^\mu e \quad (1.3.4)$$

$$j^{\mu(0)} = j^{\mu(3)} - \sin \theta_W j^{\mu(\text{em})} \quad (1.3.5)$$

$$j^{\mu(3)} = \frac{1}{2} (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) \quad (1.3.6)$$

$e, j^{\mu(\text{em})}$ は良く知られている電磁気学の素電荷と電流である。

次に、Fermion 項の W_μ^\pm と結合する部分、すなわち荷電カレントに注目すると式 1.2.9 より、

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = \frac{g}{\sqrt{2}} (j^{\mu(+)} W_\mu^+ + j^{\mu(-)} W_\mu^-) \quad (1.3.7)$$

ここで

$$\begin{aligned} j^{\mu(+)} &= \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \\ j^{\mu(-)} &= \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

と書ける。

1.4 3世代への拡張と世代混合

3世代のフェルミオンへ、次のように拡張する。

$$e \rightarrow e_i = (e, \mu, \tau) \quad (1.4.1)$$

$$\nu_e \rightarrow \nu_i = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau) \quad (1.4.2)$$

$$u \rightarrow u_i = (u, c, t) \quad (1.4.3)$$

$$d \rightarrow d_i = (d, s, b) \quad (1.4.4)$$

これにより $\text{SU}(2)_L$ 2重項は

$$l_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ e_{iL} \end{pmatrix}, \quad q_{iL} = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{pmatrix} \quad (1.4.5)$$

となる。このとき、式 1.1.13 のラグランジアンのうち、 $\mathcal{L}_{\text{GF}}, \mathcal{L}_{\text{Higgs}}$ は変わらないが、 $\mathcal{L}_{\text{fermion}}, \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fermion}} &= \bar{u}_{iR} i \gamma^\mu D_\mu u_{iR} + \bar{d}_{iR} i \gamma^\mu D_\mu d_{iR} + \bar{q}_{iL} i \gamma^\mu D_\mu q_{iL} \\ &\quad + \bar{e}_{iR} i \gamma^\mu D_\mu e_{iR} + \bar{l}_{iL} i \gamma^\mu D_\mu l_{iL} \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -y_{ij}^{(e)} \bar{l}_{iL} \phi e_{jR} - y_{ij}^{(u)} \bar{q}_{iL} \tilde{\phi} u_{jR} - y_{ij}^{(d)} \bar{q}_{iL} \phi d_{jR} + h.c. \quad (1.4.7)$$

$\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \rightarrow \text{U}(1)_{\text{EM}}$ の自発的対称性の破れにより、

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\frac{v}{\sqrt{2}} [y_{ij}^{(e)} \bar{e}_{iL} e_{jR} + y_{ij}^{(u)} \bar{u}_{iL} u_{jR} + y_{ij}^{(d)} \bar{d}_{iL} d_{jR}] + h.c. \quad (1.4.8)$$

ここで、

$$M_{ij}^{(f)} = \frac{v}{\sqrt{2}} y_{ij}^{(f)}, \quad f = e, u, d \quad (1.4.9)$$

とおき、これをフェルミオンの質量行列と呼ぶ。この質量行列は $\det M^i \neq 0$ の一般の行列でよい。 M を両側ユニタリ対角化する。すなわち、ユニタリ行列 S, T が存在して

$$M = SM_d T^\dagger \quad (1.4.10)$$

ここで M_d は正定値実対角行列となるようにできる。そこで、

$$\begin{aligned} M^{(e)} &= S^{(e)} M_d^{(e)} T^{(e)\dagger} \\ M^{(u)} &= S^{(u)} M_d^{(u)} T^{(u)\dagger} \\ M^{(d)} &= S^{(d)} M_d^{(d)} T^{(d)\dagger} \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

とする。

$$\begin{aligned} e'_L &= S^{(e)\dagger} e_L, & e'_R &= T^{(e)\dagger} e_R \\ u'_L &= S^{(u)\dagger} u_L, & u'_R &= T^{(u)\dagger} u_R \\ d'_L &= S^{(d)\dagger} d_L, & d'_R &= T^{(d)\dagger} d_R \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

と置くと、湯川相互作用項は

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\bar{e}'_L M_d^{(e)} e'_R - \bar{u}'_L M_d^{(u)} u'_R - \bar{d}'_L M_d^{(d)} d'_R + \text{h.c.} \quad (1.4.13)$$

となる。この e', u', d' は質量行列の固有状態になるので、質量固有状態という。ラグランジアンを質量固有状態で書き直すと、運動項と中性カレントは不変だが、荷電カレントは不変にならず、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CC}} &= \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^-) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}'_L S^{(u)\dagger} \gamma^\mu S^{(d)} d'_L W_\mu^+ + \bar{d}'_L S^{(d)\dagger} \gamma^\mu S^{(u)} u'_L W_\mu^-) \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

そこで、

$$V = S^{(u)\dagger} S^{(d)} \quad (1.4.15)$$

$$d''_L = V d'_L \quad (1.4.16)$$

と置き、 d'' をフレーバー固有状態とよび、質量固有状態 d' とのずれを表す行列 V を、CKM(Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) 行列という。このような固有状態の違いにより世代混合が起きる。

次に、CKM 行列の物理的自由度について考える。CKM 行列は 3×3 のユニタリ行列なので、9 つの実数の自由度がある。6 つあるクォークの位相変換で、5 つ位相の自由度を取り除ける。残る自由度は $9 - 5 = 4$ でこれが物理的自由度である。4 つのうち 3 つは世代混合の混合角をあらわす回転行列で、残りの 1 つの位相を CP 位相という。CKM 行列はと混合角 $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ と CP 位相 δ_{CP}

を用いて、

$$\begin{aligned}
V' &= R^{23}(\theta_{23})R^{13}(\theta_{13}, \delta_{\text{CP}})R^{12}(\theta_{12}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (1.4.17) \\
s_{ij} &= \sin \theta_{ij}, \quad c_{ij} = \cos \theta_{ij}
\end{aligned}$$

と表せる。

後の議論のために、一般に n 世代の場合の CKM 行列の物理的自由度について考える。 $n \times n$ のユニタリ行列は n^2 の実数の自由度がある。 n 世代の場合クォークは $2n$ 個あるので、位相変換で $2n - 1$ 個の位相は物理的自由度でない。よって残りの $(n - 1)^2$ が物理的自由度である。このうち混合角は ${}_nC_2 = n(n - 1)/2$ 個あり、残った

$$(n - 1)^2 - \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{(n - 2)(n - 1)}{2} \quad (1.4.18)$$

が CP 位相の数である。以上より、世代数が 1,2 の場合は CP 位相は無く、世代が 3 以上の時に CP 位相の自由度が残る。

第 2 章

ニュートリノ

ここでは標準模型の枠を超えて、質量を持つニュートリノについて考え、また、ニュートリノが質量を持つときに起きる、ニュートリノ振動について説明する。

2.1 Dirac 質量

ニュートリノが質量を獲得する簡単な方法に Dirac 質量がある。そのためにまず、右巻きニュートリノを導入する。(表 2.1) まず、簡単のため 1 世代で考える。これにより、ラグランジアンを

右巻きニュートリノ場	SU(2) _L の表現	U(1) _Y 電荷	U(1) _{EM} 電荷
ν_{eR}	1	0	0

表 2.1 右巻きニュートリノ場とゲージ変換の対応。

川相互作用に

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -y^{(\nu)} \bar{l}_L \tilde{\phi} \nu_{eR} + h.c. \quad (2.1.1)$$

を加える。SU(2)_L × U(1)_Y → U(1)_{EM} の自発的対称性の破れにより Higgs 機構から

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -m_\nu (\bar{\nu}_{eL} \nu_{eR} + \bar{\nu}_{eR} \nu_{eL}), \quad m_\nu = \frac{f^{(\nu)} v}{\sqrt{2}} \quad (2.1.2)$$

となり、ニュートリノが質量を得ることができる。3 世代では標準模型と同様に

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -y_{ij}^{(\nu)} \bar{l}_{iL} \tilde{\phi} \nu_{jR} + h.c. \quad (2.1.3)$$

とすれば良い。このとき標準模型とは異なり、レプトン側にも W ボソンとの結合で質量固有状態の世代混合が起き、次のようになる。

$$\begin{aligned} \nu'' &= U \nu' \\ \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

ここで、 $\nu'' = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ はフレーバー固有状態、 $\nu' = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ は質量固有状態。U は、PMNS (Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata) 行列という。PMNS 行列は CKM 行列と同様に 3

つの混合角と1つのCP位相の自由度がある。これはCKM行列の式1.4.17と同様に混合角 $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ とCP位相 δ_{CP} を用いて

$$\begin{aligned} U &= R^{23}(\theta_{23})R^{13}(\theta_{13}, \delta_{\text{CP}})R^{12}(\theta_{12}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

$$(2.1.6)$$

と表すことができる。

2.2 Majorana 質量

別の質量の獲得方法として、Majorana質量がある。表1.1と表1.4より、 l_L と $\tilde{\phi}$ は同じゲージ場の表現なので

$$\tilde{\phi}^\dagger l_L \quad (2.2.1)$$

として、ゲージ不変な量を作ることができる。これを利用することにより、質量が左巻きニュートリノのみで記述でき、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = -\frac{y^{(\nu)}}{\Lambda} (\tilde{\phi}^\dagger l_L)^T C^{-1} (\tilde{\phi}^\dagger l_L) + h.c. \quad (2.2.2)$$

ここで C は荷電共役演算子であり、次の関係を満たす。

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu \quad (2.2.3)$$

$$C^\dagger = C^{-1} \quad (2.2.4)$$

$$C^T = -C \quad (2.2.5)$$

$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ の自発的称性の破れにより

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = -m_\nu \left(\overline{(\nu_{eL})^C} \nu_{eL} + \bar{\nu}_{eL} (\nu_{eL})^C \right), \quad m_\nu = \frac{f^{(\nu)} v^2}{\Lambda} \quad (2.2.6)$$

ここで

$$(\nu_{eL})^C = C\bar{\nu}_{eL}^T \quad (2.2.7)$$

この項は大域的な $U(1)$ 対称性を破るのでレプトン数が保存しない。また、結合定数の質量次元が5なので、繰り込み不可能である。3世代では

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = -\frac{y_{ij}^{(\nu)}}{\Lambda} (\tilde{\phi}^\dagger l_{iL})^T C^{-1} (\tilde{\phi}^\dagger l_{jL}) + h.c. \quad (2.2.8)$$

とすれば良い。この場合も、レプトン側にも W ボソンとの結合で質量固有状態の世代混合が起きるが、PMNS行列の自由度が異なる。Dirac質量の場合とは異なり右巻きニュートリノが無いので、

ニュートリノ場に位相の自由度を吸収させることができない。したがって PMNS 行列にさらに2つの位相自由度が残り、

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

となる。 ϕ_1, ϕ_2 を Majorana 位相という。Majorana 位相は後述のニュートリノ振動には寄与しないので、本論文では考えない。

2.3 Dirac-Majorana 質量

一般的な場合として、ニュートリノが Dirac 質量と Majorana 質量の両方を持つとすると、

$$\mathcal{L}_{mass} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Majorana}}^L + \mathcal{L}_{\text{Majorana}}^R \quad (2.3.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -m_D \bar{\nu}_{eL} \nu_{eR} + h.c. \quad (2.3.2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}}^L = \frac{1}{2} m_L \overline{(\nu_{eL})^C} \nu_{eL} + h.c. \quad (2.3.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}}^R = \frac{1}{2} m_R \overline{(\nu_{eR})^C} \nu_{eR} + h.c. \quad (2.3.4)$$

ここで、次の場を定義する。

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ (\nu_{eR})^C \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

すると、式 2.3.1 は以下のようになる。

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2} \overline{(N_L)^C} M N_{eL} + h.c. \quad (2.3.6)$$

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

式 2.3.7 の質量行列をユニタリ対角化すると、

$$U_L^\dagger M U_L = \text{diag}(m_1, m_2) \quad (2.3.8)$$

m_1, m_2 は質量行列の固有値で

$$m_1 = \rho_1^2 \frac{m_L + m_R - \sqrt{(m_L - m_R)^2 - 4m_D^2}}{2} \quad (2.3.9)$$

$$m_2 = \rho_2^2 \frac{m_L + m_R + \sqrt{(m_L - m_R)^2 - 4m_D^2}}{2} \quad (2.3.10)$$

$\rho_{1,2}$ はユニタリ行列 U_L の位相である。ここで、

$$n_L = U_L^\dagger N_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

と定義すると、ラグランジアン \mathcal{L}_{mass} は

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \overline{(\nu_{kL})^C} \nu_{kL} + h.c. \quad (2.3.12)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \overline{(\nu_k)^C} \nu_k \quad (2.3.13)$$

$$\nu_k = \nu_{kL} + (\nu_{kL})^C \quad (2.3.14)$$

2.4 See-saw 機構

Dirac-Majorana 質量において、次の場合を考える。

$$m_D \ll m_R, \quad m_L = 0 \quad (2.4.1)$$

このとき式 2.3.9, 式 2.3.10 は

$$m_1 \simeq -\rho_1^2 \frac{m_D^2}{m_R}, \quad m_2 \simeq \rho_2^2 m_R \quad (2.4.2)$$

$\rho_{1,2}$ を符号が無視できるようにとると

$$m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R}, \quad m_2 \simeq m_R \quad (2.4.3)$$

したがって、重い右巻きの質量 m_R が存在すると、 ν_1 の質量 m_1 は非常に小さくなる。このように、ニュートリノの持つ小さな質量を説明する機構を See-saw 機構という。

2.5 真空中のニュートリノ振動

ニュートリノに質量がある場合、レプトン側にも世代混合が起きることによってニュートリノ振動という現象が起きる。ニュートリノ振動実験ではソースにおいて弱い相互作用によってある粒子が崩壊し、その過程でフレーバー固有状態のニュートリノ ν_α が生成される。その後あるエネルギー E を持って、距離 L を質量固有状態 ν_i として伝播し検出器においてあるフレーバー固有状態 ν_β として検出される。この時 ν_α が ν_β となる確率は L, E に依存して振動なので、このことをニュートリノ振動と呼ぶ。以下ではニュートリノ振動がどのように説明されるのかを見ていく。

ここでは真空中のニュートリノの時間発展を考え、ニュートリノ振動の具体的な式を導出する。まず、質量固有状態の時間発展を考える。Dirac 方程式のうち正のエネルギーの部分のみ考えると、

$$i \frac{d}{dt} |\nu_j(t)\rangle = E_j |\nu_j(t)\rangle, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.5.1)$$

ここで $E_j = \sqrt{m_j^2 + p^2}$ であり、 $m_j (j = 1, 2, 3)$ はそれぞれ質量固有状態 $|\nu_j\rangle$ の質量である。これを解くと

$$|\nu_j(t)\rangle = e^{-iE_j t} |\nu_j(0)\rangle \quad (2.5.2)$$

また、式 2.1.6 より

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_j U_{\alpha j}^* |\nu_j(t)\rangle \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (2.5.3)$$

なので、フレーバー固有状態の時間発展は

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{j=1}^3 \sum_{\beta=e,\mu,\tau} U_{\alpha j}^* e^{-iE_j t} U_{\beta j} |\nu_\beta(0)\rangle \quad (2.5.4)$$

と書ける。これより、フレーバー固有状態 ν_α が時間 t 後に ν_β になる遷移振幅は

$$A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_j U_{\alpha j}^* e^{-iE_j t} U_{\beta j} \quad (2.5.5)$$

となり、遷移確率は

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)|^2 \\ &= \sum_{j,k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta k}^* U_{\alpha k} e^{-i\Delta E_{jk} t} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

ここで $\Delta E_{jk} = E_j - E_k$ とする。さらにニュートリノはほとんど光速で運動しているので、飛行距離 L は $L = t$ 、 U のユニタリ性 $\sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* = \delta_{\alpha\beta}$ と

$$\operatorname{Re}(1 - e^{-i\Delta E_{jk} L}) = 2 \sin^2 \left(\frac{\Delta E_{jk} L}{2} \right) \quad (2.5.7)$$

$$\operatorname{Im}(1 - e^{-i\Delta E_{jk} L}) = \sin \Delta E_{jk} L \quad (2.5.8)$$

を用いると、振動確率は

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \text{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta k}^* U_{\alpha k}) \sin^2 \left(\frac{\Delta E_{jk} L}{2} \right) + 2 \sum_{j < k} \text{Im}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta k}^* U_{\alpha k}) \sin \Delta E_{jk} L \quad (2.5.9)$$

となる。またニュートリノの質量は運動量に比べて十分小さいと考えられるので、

$$E_j = \sqrt{m_j^2 + p^2} \simeq p + \frac{m_j^2}{2p} \quad (2.5.10)$$

とすると、

$$\Delta E_{jk} \simeq \frac{\Delta m_{jk}^2}{2p} \simeq \frac{\Delta m_{jk}^2}{2E} \quad (2.5.11)$$

なので、

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \text{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta k}^* U_{\alpha k}) \sin^2 \frac{\Delta m_{jk}^2 L}{4E} + 2 \sum_{j < k} \text{Im}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta k}^* U_{\alpha k}) \sin \frac{\Delta m_{jk}^2 L}{2E} \quad (2.5.12)$$

この式は3世代に限定した話でなく、何世代でも同様である。反ニュートリノの場合は、 $U \rightarrow U^*$ として計算すればよい。

以上より、3世代でのニュートリノ振動を特徴づけるパラメーターはPMNS行列のパラメーター $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta_{\text{CP}}$ とニュートリノの質量固有状態の2乗質量差 $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ の6つである。 Δm_{32}^2 は $\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2$ となるので、独立なパラメーターではない。

ニュートリノ振動では E, L の値により、次のように振動の振る舞いが特徴づけられる。

- $\Delta m_{jk}^2 L / 4E \simeq \pi/2$ のとき、 $\sin^2 \frac{\Delta m_{jk}^2 L}{4E} \simeq 1$ (oscillation maximam)
- $\Delta m_{jk}^2 L / 4E \ll 1$ のとき、 $\sin^2 \frac{\Delta m_{jk}^2 L}{4E} \rightarrow 0$ (no oscillation)
- $\Delta m_{jk}^2 L / 4E \gg 1$ のとき、 $\sin^2 \frac{\Delta m_{jk}^2 L}{4E} \rightarrow \left\langle \sin^2 \frac{\Delta m_{jk}^2 L}{4E} \right\rangle = \frac{1}{2}$ (rapid oscillation)

2.6 物質中のニュートリノ振動

ニュートリノは W ボソンと Z ボソンによる弱い相互作用しか働かないので、物質中でほとんど相互作用しないが、長距離の場合は無視することができず、それによりニュートリノ振動に影響を及ぼす。相互作用は中性カレントと荷電カレントに分けることができる。地球内部で相互作用をすることを考えると、存在する物質は電子、陽子、中性子のみななので、図2.1、図2.2の相互作用を考えればよい。

これらの相互作用は低エネルギーでは図2.3のようなFermi相互作用に近似できる。荷電カレントは電子ニュートリノと電子の反応しかない。なので

$$\mathcal{H}_{\text{CC}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL}) (\bar{e}_L \gamma_\mu e_L) \quad (2.6.1)$$

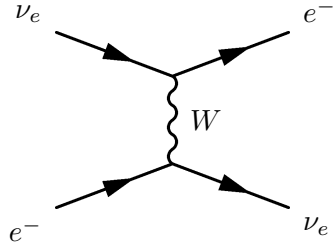


図 2.1 荷電カレントによる相互作用

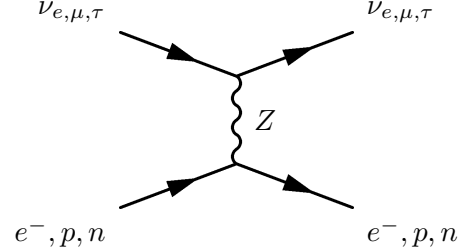


図 2.2 中性カレントによる相互作用

ニュートリノに対して物質は静止しているとみなせるので、

$$\bar{e}_L \gamma_\mu e_L = \langle \bar{e}_L \gamma_\mu e_L \rangle = N_e \delta_{\mu 0} \quad (2.6.2)$$

と期待値で置き換えられる。ここで N_e は電子の数密度である。したがって、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{CC} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL}) N_e \delta_{\mu 0} \\ &= \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{eL} \gamma^0 \nu_{eL}) \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

ここで、 $\alpha = e, \mu, \tau$ 、 $f = e, u, d$

中性カレントは

$$\mathcal{H}_{NC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j^{\mu(0)} j_\mu^{(0)} \quad (2.6.4)$$

$$\begin{aligned} j^{\mu(0)} &= \sum_f (\bar{f} \gamma^\mu f) (I_{3f} - Q_f \sin^2 \theta_W) \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{2} (\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L}) + \sum_{f \neq \nu} (\bar{f} \gamma^\mu f) (I_{3f} - Q_f \sin^2 \theta_W) \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

したがって、NC のニュートリノにかかわる部分は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{NC} &= \sum_{\alpha, f} \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L}) (\bar{f} \gamma_\mu f) (I_{3f} - Q_f \sin^2 \theta_W) \\ &= \sum_{\alpha, f} \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L}) N_f \delta_{\mu 0} (I_{3f} - Q_f \sin^2 \theta_W) \\ &= \sum_{\alpha, f} \frac{G_F N_f}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^0 \nu_{\alpha L}) (I_{3f} - Q_f \sin^2 \theta_W) \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

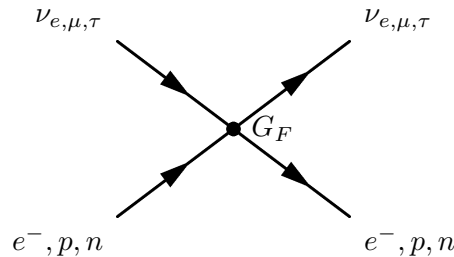


図 2.3 Fermi 相互作用

以上より相互作用は

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{int}} &= \mathcal{H}_{\text{CC}} + \mathcal{H}_{\text{NC}} \\ &= \sum_{\alpha, f} \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^0 \nu_{\alpha L}) N_f (\delta_{\alpha e} + I_{3f} - Q_f \sin^2 \theta_W)\end{aligned}\quad (2.6.7)$$

次に $I_{3f} - Q_f \sin^2 \theta_W$ の項について、

$$\begin{aligned}\text{電子 } e &: -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \\ \text{陽子 } uud &: 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \\ &= \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_W \\ \text{中性子 } udd &: \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) + 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}\quad (2.6.8)$$

さらに物質は中性なので $N_p = N_e$ であるから電子と陽子の項は相殺する。したがって

$$\sum_f N_f (\delta_{\alpha e} + I_{3f} - Q_f \sin^2 \theta_W) = N_e \delta_{\alpha e} - \frac{N_n}{2}\quad (2.6.9)$$

よって

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(N_e \delta_{\alpha e} - \frac{N_n}{2} \right) (\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^0 \nu_{\alpha L})\quad (2.6.10)$$

したがってニュートリノと物質との相互作用の有効ポテンシャルとして、

$$A_e = \sqrt{2} G_F N_e, \quad A_n = -\frac{\sqrt{2} G_F N_n}{2}\quad (2.6.11)$$

とすればよい。ニュートリノ振動は

$$\begin{aligned}i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} &= \left[U \mathcal{E} U^\dagger + \begin{pmatrix} A_e + A_n & 0 & 0 \\ 0 & A_n & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \\ \mathcal{E} &= \text{diag}(E_1, E_2, E_3)\end{aligned}\quad (2.6.12)$$

単位行列に比例する項は位相に吸収されるので、最終的に

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \left[U \mathcal{E} U^\dagger + \begin{pmatrix} A_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}\quad (2.6.13)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{H} = U \mathcal{E} U^\dagger + \begin{pmatrix} A_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (2.6.14)$$

と置くと、 \mathcal{H} はエルミート行列なので、

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \tilde{U} \tilde{\mathcal{E}} \tilde{U}^\dagger \\ \tilde{\mathcal{E}} &= \text{diag}(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3)\end{aligned}\tag{2.6.15}$$

とユニタリ行列 \tilde{U} を用いて対角化できる。よって、ニュートリノ振動の振動確率は真空中と同様に計算ができ

$$\begin{aligned}P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \text{Re}(\tilde{U}_{\beta j} \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta k}^* \tilde{U}_{\alpha k}) \sin^2 \frac{\Delta \tilde{E}_{jk} L}{2} \\ &\quad + 2 \sum_{j < k} \text{Im}(\tilde{U}_{\beta j} \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta k}^* \tilde{U}_{\alpha k}) \sin \Delta \tilde{E}_{jk} L \\ \Delta \tilde{E}_{jk} &= \tilde{E}_j - \tilde{E}_k\end{aligned}\tag{2.6.16}$$

となる。反ニュートリノの場合は、 $U \rightarrow U^*$ に加えて、 $A_{e,n} \rightarrow -A_{e,n}$ として計算すればよい。

第3章

ステライルニュートリノ

3.1 振動パラメーターの現状

現在、3世代のニュートリノ振動パラメーター $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta_{\text{CP}} = \delta_{13}, \Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ は太陽、大気、原子炉、加速器ニュートリノによるニュートリノ振動実験によって測定されており、 $\theta_{12}, \theta_{13}, \Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ は

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= 33^\circ, & \theta_{13} &= 8^\circ \\ \Delta m_{21}^2 &= 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, & |\Delta m_{31}^2| &= 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

と測定されている。 θ_{23}, δ_{13} に関しては未だ精度よく測定されておらず、best fit として、

$$\theta_{23} \sim 48^\circ, \quad \delta_{13} \sim -90^\circ \quad (3.1.2)$$

と与えられている。[1] さらに θ_{23} に関しては、disappearance channel の振動確立から $\sin^2 2\theta_{23}$ の値しかきまらないため、 $\theta_{23} > 45^\circ$ か $\theta_{23} < 45^\circ$ の不定性が残るが、この問題を θ_{23} -octant の縮退という。また、大気ニュートリノ振動の主なチャンネルが $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ で、物質効果がほとんど現れないため、 Δm_{31}^2 はその絶対値のみしかわかっておらず、符号の正負により Normal Hierarchy ($\Delta m_{31}^2 > 0$) と、Inverted Hierarchy ($\Delta m_{31}^2 < 0$) の2通りの mass hierarchy シナリオが考えられる。(図 3.1、図 3.2)

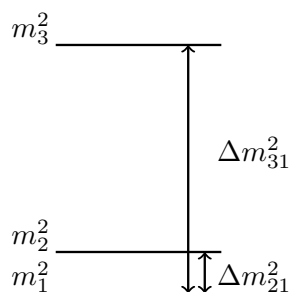


図 3.1 Normal Hierarchy ($\Delta m_{31}^2 > 0$)

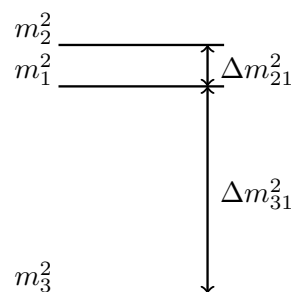


図 3.2 Inverted Hierarchy ($\Delta m_{31}^2 < 0$)

3.2 LSND によるステライルニュートリノ

太陽、大気、原子炉、加速器ニュートリノによるニュートリノ振動実験のほとんどの実験は、

$$\begin{aligned}\Delta m_{21}^2 &= 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \\ \Delta m_{31}^2 &= 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

に由来するニュートリノ振動で説明できるが、一方で、LSND [2] や MiniBooNE [3] といった短基線加速器ニュートリノ実験では、 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ の振動で

$$\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2 \quad (3.2.2)$$

に由来するニュートリノ振動が観測されている。

LSND(Liquid Scintillator Neutrino Detector) は、アメリカのロスアラモスで行われた反ニュートリノ振動 $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ を観測した実験である。加速器により π 中間子が生成され、その崩壊反応

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (3.2.3)$$

により μ^+ が生成され、さらに μ^+ の崩壊

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (3.2.4)$$

により $\bar{\nu}_\mu$ が生成される。この $\bar{\nu}_\mu$ が伝播し、 $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ のニュートリノ振動を調べる。 $\bar{\nu}_e$ の検出は、液体シンチレーター内での逆ベータ崩壊

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (3.2.5)$$

を用いている。この実験における基線長は $L \simeq 30 \text{ m}$ 、ニュートリノのエネルギーは $E \simeq 50 \text{ MeV}$ であるので $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ の振動はほとんど no oscillation になり、大きな Δm_{41}^2 の感度が大きくなる。この実験では、 $\Delta m_{41}^2 \sim 1 \text{ MeV}$ に対応する振動が検出されたと主張している。

MiniBooNE(Mini Booster Neutrino Experiment) は、アメリカの Fermilab で行われた実験である。LSND とは異なり基線長が $L = 541 \text{ m}$ 、ニュートリノエネルギーが $E \simeq 600 \text{ MeV}$ であるが L/E の値が変わらないので、大きな Δm_{41}^2 の感度が大きい。この実験も LSND と同様に、 $\Delta m_{41}^2 \sim 1 \text{ MeV}$ に対応する振動が検出されたと主張している。

これは従来の3世代のニュートリノ振動では説明できず、新たに4つ目の質量固有状態 ν_4 が必要となる。ところが、LEP 実験における Z ボソンの見えないモードへの崩壊幅の測定結果から、質量 $M_Z/2$ 以下の軽いアクティブニュートリノの個数は

$$N_\nu = 2.9841 \pm 0.0083 \quad (3.2.6)$$

なので [13]、 ν_e, ν_μ, ν_τ の3種類のみである。よって、4つ目のニュートリノは、通常の弱い相互作用をしないステライルニュートリノ ν_s であると考えられ、 ν_e, ν_μ, ν_τ とは異なり実験によって直接検出することができない。このような事情により、ステライルニュートリノとアクティブニュートリノ間のニュートリノ振動を通してのみ4世代目のステライルニュートリノの存在を検証できると考えられている。

3.3 3 + 1 ニュートリノシナリオ

従来の3世代のニュートリノに、1つステライルニュートリノを新たに加えたとき、その質量階層は図3.3のようになる。これを3 + 1 スキームといい、3 + 1 スキームが実現していると考え

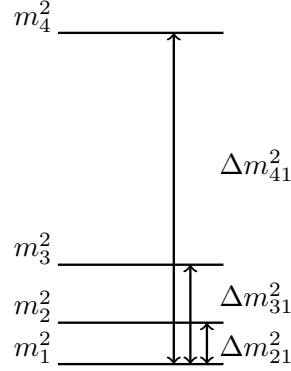


図3.3 3 + 1 スキーム

ニュートリノ振動のモデルを3 + 1 ニュートリノシナリオと呼ぶ。このときニュートリノのフレーバー固有状態 $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \nu_s$ と質量固有状態の $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ の間の混合は次のように表せる。

$$\nu_\alpha = \sum_{i=1}^4 U_{\alpha i} \nu_i \quad (\alpha = e, \mu, \tau, s) \quad (3.3.1)$$

ここで、混合行列 U は式1.4.18での議論から、世代数が4の場合、6つの混合角と3つのCP位相を持つことが分かるので、

$$U = R^{34}(\theta_{34}, \delta_{34}) R^{24}(\theta_{24}) R^{14}(\theta_{14}, \delta_{14}) R^{23}(\theta_{23}) R^{13}(\theta_{13}, \delta_{13}) R^{12}(\theta_{12}) \quad (3.3.2)$$

とできる。3世代における δ_{CP} は δ_{13} である。混合行列 U は具体的には

$$\begin{aligned} U_{e1} &= c_{12}c_{13}c_{14} \\ U_{e2} &= s_{12}c_{13}c_{14} \\ U_{e3} &= s_{13}c_{14}e^{-i\delta_{13}} \\ U_{e4} &= s_{14}e^{-i\delta_{14}} \\ U_{\mu1} &= -s_{12}c_{23}c_{24} + c_{12}(-c_{24}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} - c_{13}s_{14}s_{24}e^{i\delta_{14}}) \\ U_{\mu2} &= c_{12}c_{23}c_{24} + s_{12}(-c_{24}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} - c_{13}s_{14}s_{24}e^{i\delta_{14}}) \\ U_{\mu3} &= s_{23}c_{13}c_{24} - s_{13}s_{14}s_{24}e^{-i(\delta_{13}+\delta_{14})} \\ U_{\mu4} &= c_{14}s_{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\tau 1} &= -s_{12}(-s_{23}c_{34} - c_{23}s_{24}s_{34}e^{i\delta_{34}}) \\
&\quad + c_{12}\left[-c_{13}c_{24}s_{14}s_{34}e^{i(\delta_{14}-\delta_{34})} - s_{13}e^{i\delta_{13}}(c_{23}c_{34} - s_{23}s_{24}s_{34}e^{-i\delta_{34}})\right] \\
U_{\tau 2} &= c_{12}(-s_{23}c_{34} - c_{23}s_{24}s_{34}e^{-i\delta_{34}}) \\
&\quad + s_{12}\left[-c_{13}c_{24}s_{14}s_{34}e^{i(\delta_{14}-\delta_{34})} - s_{13}e^{i\delta_{13}}(c_{23}c_{34} - s_{23}s_{24}s_{34}e^{-i\delta_{34}})\right] \\
U_{\tau 3} &= -s_{13}s_{14}c_{24}s_{34}e^{-i(\delta_{13}-\delta_{14}+\delta_{34})} + c_{13}(c_{23}c_{34} - s_{23}s_{24}s_{34}e^{-i\delta_{34}}) \\
U_{\tau 4} &= c_{14}c_{24}s_{34}e^{-i\delta_{34}} \\
U_{s1} &= -s_{12}(-c_{23}s_{24}c_{34} + s_{23}s_{34}e^{i\delta_{34}}) \\
&\quad + c_{12}\left[-c_{13}s_{14}c_{24}c_{34}e^{i\delta_{14}} - s_{13}e^{i\delta_{13}}(-s_{23}s_{24}c_{34} - c_{23}s_{34}e^{i\delta_{34}})\right] \\
U_{s2} &= c_{12}(-c_{23}s_{24}c_{34} + s_{23}s_{34}e^{i\delta_{34}}) \\
&\quad + s_{12}\left[-c_{13}s_{14}c_{24}c_{34}e^{i\delta_{14}} - s_{13}e^{i\delta_{13}}(-s_{23}s_{24}c_{34} - c_{23}s_{34}e^{i\delta_{34}})\right] \\
U_{s3} &= c_{24}c_{34}s_{13}s_{14}e^{-i(\delta_{13}-\delta_{14})} + c_{13}(-s_{23}s_{24}c_{34} - c_{23}s_{34}e^{i\delta_{34}}) \\
U_{s4} &= c_{14}c_{24}c_{34}
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

となっている。物質中でのフレーバー固有状態の時間発展は、ステライルニュートリノは Z ボソン、 W ボソンと相互作用をしないので、

$$i\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \\ \nu_s \end{pmatrix} = \left[U\mathcal{E}U^\dagger + \begin{pmatrix} A_e + A_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \\ \nu_s \end{pmatrix} \tag{3.3.4}$$

となる。3世代の時と同様に

$$\mathcal{H} = U\mathcal{E}U^\dagger + \begin{pmatrix} A_e + A_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.5}$$

と置くと、 \mathcal{H} はエルミート行列なので、

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \tilde{U}\tilde{\mathcal{E}}\tilde{U}^\dagger \\
\tilde{\mathcal{E}} &= \text{diag}(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \tilde{E}_4)
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

とユニタリ行列 \tilde{U} を用いて対角化できる。よって、ニュートリノ振動の振動確率は

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \text{Re}(\tilde{U}_{\beta j} \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta k}^* \tilde{U}_{\alpha k}) \sin^2 \frac{\Delta \tilde{E}_{jk} L}{2} \\
&\quad + 2 \sum_{j < k} \text{Im}(\tilde{U}_{\beta j} \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta k}^* \tilde{U}_{\alpha k}) \sin \Delta \tilde{E}_{jk} L \\
\Delta \tilde{E}_{jk} &= \tilde{E}_j - \tilde{E}_k
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

となる。反ニュートリノの場合は、 $U \rightarrow U^*$, $A_{e,n} \rightarrow -A_{e,n}$ として計算すればよい。

ステライルニュートリノの導入による新たなパラメーター $\theta_{14}, \theta_{24}, \theta_{34}, \delta_{14}, \delta_{34}, \Delta m_{41}^2$ は Daya Bay, Bugay-3, MINOS+, IceCube により制限がついている。ステライルニュートリノの2乗質量差 Δm_{41}^2 に感度があるような短基線実験の場合、 $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ は no oscillation となり見えなくなる。

また物質効果もほとんど無いので、式 3.3.7 の計算は簡単になり、

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) \simeq 1 - 4|U_{\alpha 4}|^2(1 - |U_{\alpha 4}|^2) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{41}^2 L}{4E}\right) \quad (3.3.8)$$

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \simeq 4|U_{\alpha 4}|^2|U_{\beta 4}|^2 \sin^2\left(\frac{\Delta m_{41}^2 L}{4E}\right) \quad (3.3.9)$$

となる。式 3.3.3 より、

$$\begin{aligned} |U_{e4}| &= \sin^2 \theta_{14} \\ |U_{\mu 4}|^2 &= \cos^2 \theta_{14} \sin^2 \theta_{24} \\ |U_{\mu 4}|^2 &= \cos^2 \theta_{14} \cos^2 \theta_{24} \sin^2 \theta_{34} \\ 4|U_{e4}|^2|U_{\mu 4}|^2 &= \sin^2 2\theta_{14} \sin^2 \theta_{24} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

となり、これらの値に制限がつけられている。 $\Delta m_{41}^2 \simeq 1 \text{ eV}^2$ のときでは 90% C.L. で

$$\begin{aligned} \sin^2 2\theta_{14} &\lesssim 0.1 \\ \sin^2 \theta_{24} &\lesssim 0.03 \\ \sin^2 \theta_{34} &\lesssim 0.2 \\ 0.001 &\lesssim \sin^2 2\theta_{14} \sin^2 \theta_{24} \lesssim 0.003 \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

となっている。[4, 5] δ_{14}, δ_{34} に関しては未だ何も制限がつけられていない。

第 4 章

長基線実験

4.1 DUNE, T2HK

DUNE(Deep Underground Neutrino Experiment) [6] は、アメリカの Fermilab で建設中の長基線ニュートリノ振動実験で、Fermilab の LBNF(Long-Baseline Neutrino Facility) で生成された $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$ を 1300 km 離れた Sanford underground research facility にある 40 kton の液体 Ar の detector で観測する実験である。ニュートリノのエネルギーは $E \simeq 2.5$ GeV になだらかなピークを持つように設計されており (図 4.1)、 Δm_{31}^2 の感度が大きく、 Δm_{41}^2 は rapid oscillation になり平均化される。この実験では $\nu_\mu \rightarrow \nu_e, \nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ の 4 つのチャンネルの振動が観測でき、 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e, \bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ を appearance channel、 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ を disappearance channel と呼ぶ。DUNE では mass hierarchy の決定や θ_{23} -octant, δ_{CP} の精密測定が期待されている。

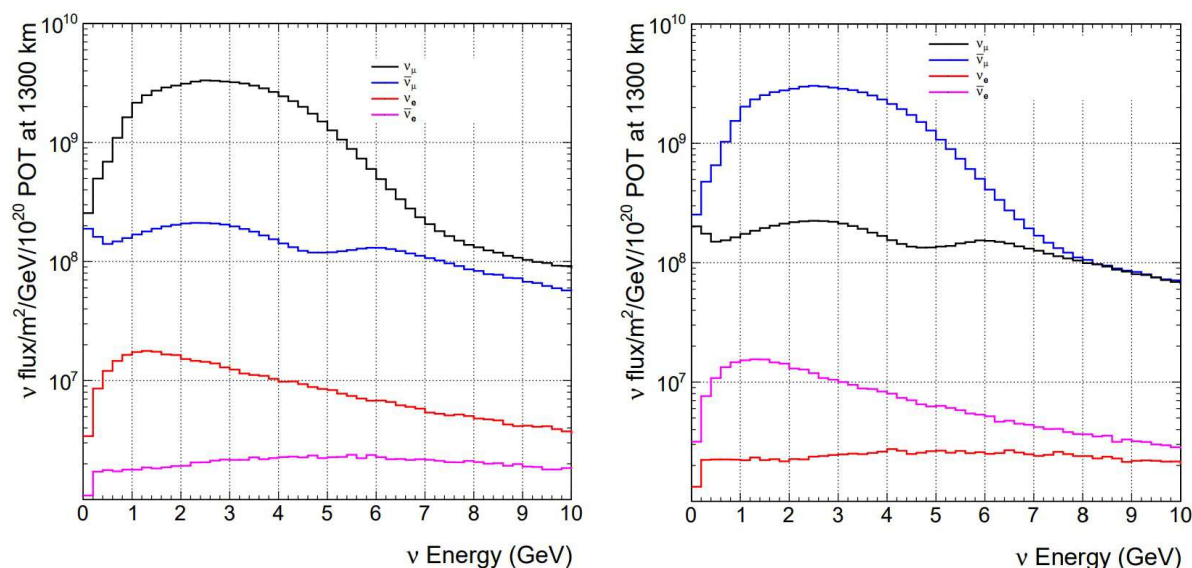


図 4.1 DUNE のエネルギーフラックス。左はニュートリノモード、右は反ニュートリノモード [6]

T2HK(Tokai to HyperKamiokande) [7] は、日本で行われている現行の T2K の改良版であり、J-PARC (Japan Proton Accelerator Research Complex) で生成された $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$ を 295 km 離れた 187 kton \times 2 の Cherenkov detector である Hyper-Kamiokande で観測する実験である。ニュートリノのエネルギーは 2.5° off-axis を用いることで $E \simeq 0.6$ GeV に鋭いピークを持つように設計され

ており (図 4.2)、 Δm_{31}^2 の感度が大きく、 Δm_{41}^2 は rapid oscillation になり平均化される。DUNE と同様の 4 つのチャンネルの振動が観測でき、mass hierarchy の決定、 θ_{23} -octant、 δ_{CP} の精密測定が期待されている。

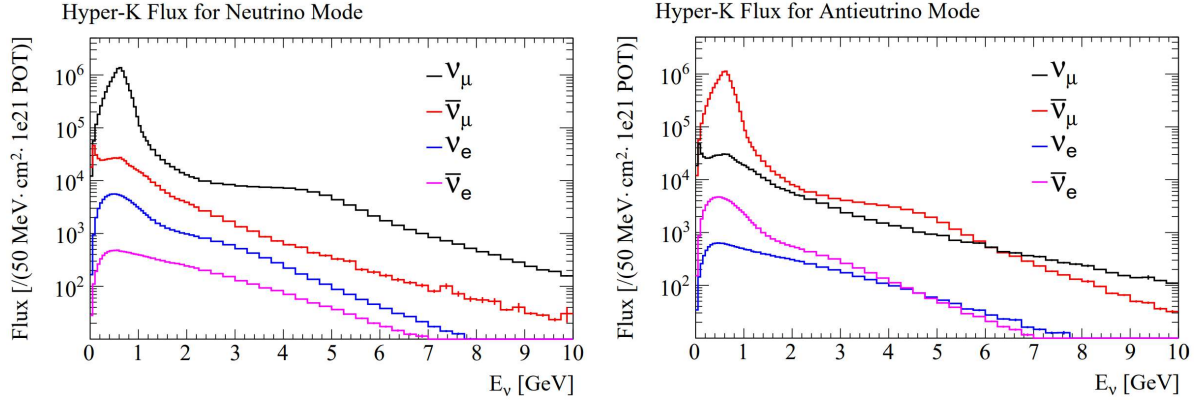


図 4.2 T2HK のエネルギーフラックス。左はニュートリノモード、右は反ニュートリノモード [7]

DUNE, T2HK におけるそれぞれのチャンネルのニュートリノ振動確率を、3 世代における式 2.6.16 とステライルニュートリノを含む 4 世代の式 3.3.7 を用いて計算すると振動確率はエネルギーの関数として図 4.3、図 4.4 のようになる。振動パラメーターは、 $\theta_{23} = 48^\circ, \delta_{13} = -90^\circ$, Normal Hierarchy で計算した。ステライルニュートリノによるパラメーターは、 $\sin^2 \theta_{14} = 0.025, \sin^2 \theta_{24} = 0.025, \theta_{34} = \delta_{14} = \delta_{34} = 0^\circ$ としている。青い線は 3 世代における式 2.6.16 で計算したもの。緑の

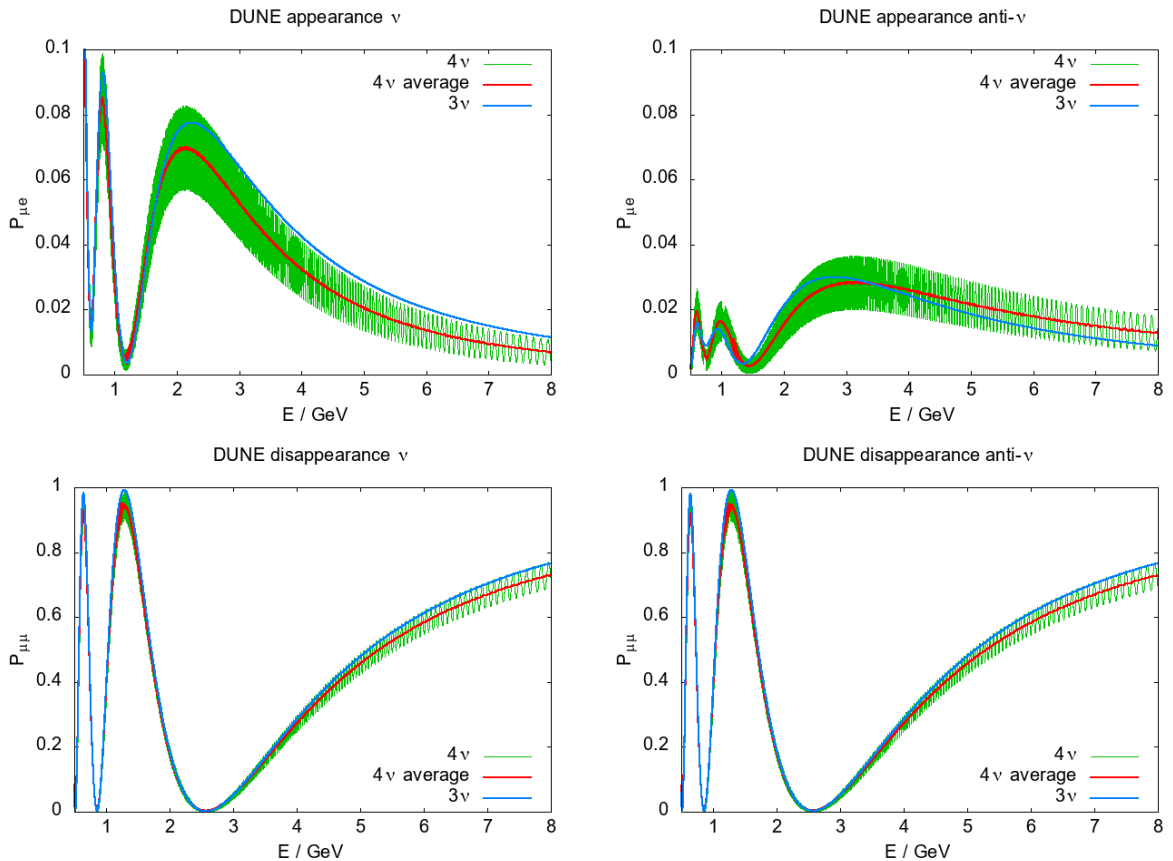


図 4.3 DUNE におけるそれぞれのチャンネルのニュートリノ振動確率。

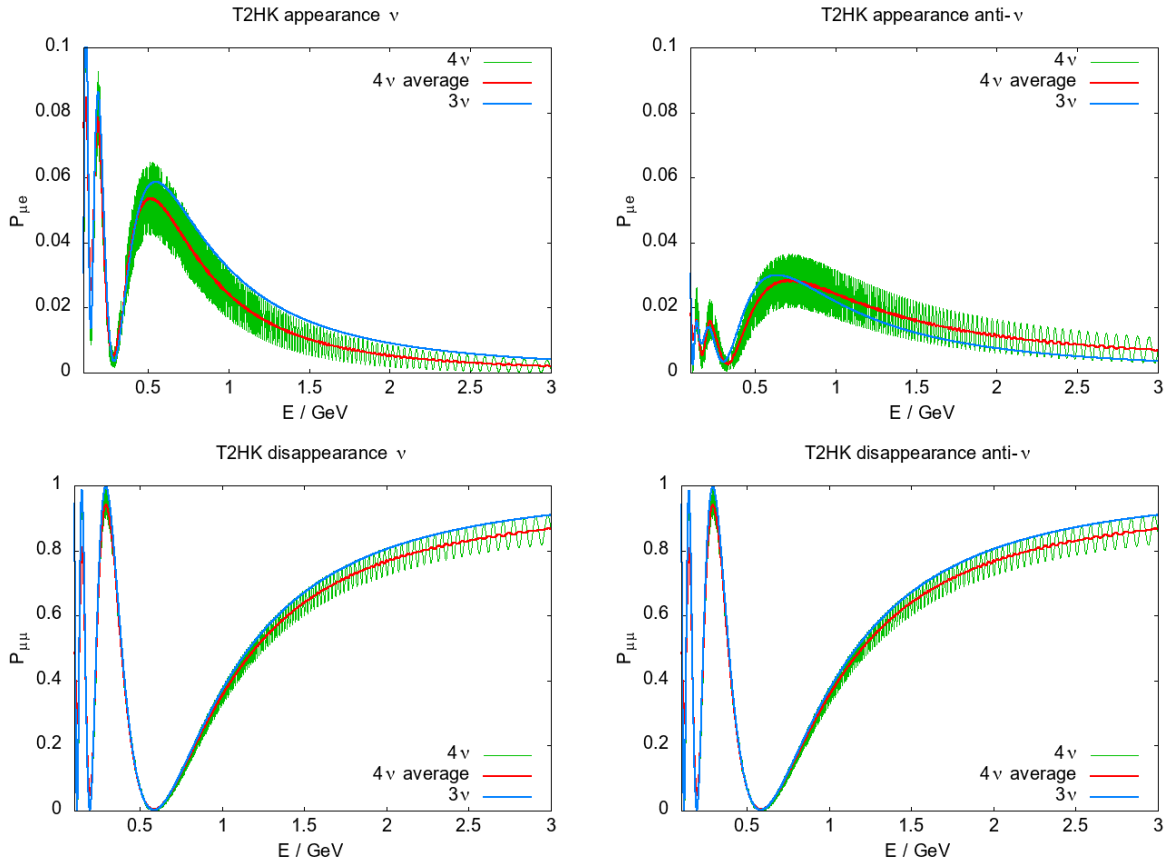


図 4.4 T2HK におけるそれぞれのチャンネルのニュートリノ振動確率。

線はとステライルニュートリノを含む 4 世代の式 3.3.7 で計算したもの。赤い線は rapid oscillation を平均化したものであり、実際に測定できるのはこの平均化されたものである。図 4.3、図 4.4 から $\nu_\mu \rightarrow \nu_e, \bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ appearance channel における oscillation maximum は、DUNE では $E \simeq 2.5$ GeV、T2HK では $E \simeq 0.6$ GeV であり、これはそれぞれのエネルギーフラックスのピークに合っている。

4.2 χ^2 の計算

DUNE, T2HK において 3 世代シナリオと 4 世代シナリオを比較するために、次の χ^2 を定義する。

$$\chi^2(\theta_{23}, \delta_{13}) = \min_{\Delta m_{31}^2, \alpha} \left[\sum_{\text{channel}} \sum_i \frac{\left[(1 + \alpha) N_{3\nu, i}^{(\text{test})}(\theta_{23}, \delta_{13}, \Delta m_{31}^2) - N_{4\nu, i} \right]^2}{N_{4\nu, i}} + \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (4.2.1)$$

$$N_{3\nu, i}^{(\text{test})}(\theta_{23}, \delta_{13}, \Delta m_{31}^2) = \int_{\text{bin}} \sigma(E) P_{3\nu}(E; \theta_{23}, \delta_{13}, \Delta m_{31}^2) \Phi(E) dE \quad (4.2.2)$$

$$N_{4\nu, i} = \int_{\text{bin}} \sigma(E) P_{4\nu}(E) \Phi(E) dE \quad (4.2.3)$$

ここで、 $\sigma(E)$ は散乱断面積、 $\Phi(E)$ はニュートリノのエネルギーフラックスを表している。 σ はニュートリノフラックスの系統誤差で、本論文では $\sigma = 7\%$ とする。[6, 7] ここでは簡単のため、実験のエネルギー分解能は考慮していない。また、mass hierarchy は既知としている。 $P_{3\nu}$ は 3 世代

の式 2.6.16 で計算したもの、 $P_{4\nu}$ は 4 世代の式 3.3.7 で計算したものをを用いている。エネルギーの bin の大きさは、DUNE, T2HK のそれぞれの Work Group のシミュレーションにしたがい、DUNE では 0 GeV ~ 8 GeV の間で 250 MeV ごとに、T2HK では 0 GeV ~ 1.5 GeV の間で 50 MeV ごとにとり計算した。[6, 7] 計算に用いた振動パラメーターは表 4.1、表 4.2 である。 θ_{34}, δ_{34} の効果

Parameter	Test Value Range
$\sin^2 \theta_{12}$	0.304
$\sin^2 2\theta_{13}$	0.085
θ_{23}	(40°, 50°)
δ_{13}	(-180°, 180°)
Δm_{21}^2	$7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$
Δm_{31}^2	$\pm(2.2, 2.6) \times 10^{-3} \text{ eV}^2$

表 4.1 3 世代振動パラメーターの Test Value Range.

Parameter	Reference Value
$\sin^2 \theta_{12}$	0.304
$\sin^2 2\theta_{13}$	0.085
θ_{23}	48°
$\sin^2 \theta_{14}$	0.025
$\sin^2 \theta_{24}$	0.025
θ_{34}	0°
δ_{13}	-90°
δ_{14}	-90°, 0°, 90°, 180°
δ_{34}	0°
Δm_{21}^2	$7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$
Δm_{31}^2	$\pm 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$
Δm_{41}^2	1 eV ²

表 4.2 4 世代振動パラメーターの Reference Value.

は小さいので、本論文では 0° に固定する。また、 $\delta_{14} = -90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ の 4 つのパターンで χ^2 を計算した。最も 3 世代シナリオと 4 世代シナリオの差が小さい χ^2 の最小値

$$\chi_{\min}^2 = \min_{\theta_{23}, \delta_{13}} \chi^2(\theta_{23}, \delta_{13}) \quad (4.2.4)$$

は表 4.3, 4.4 のようになる。もっとも fit の良い場合は Normal Hierarchy で、 $\delta_{14} = 0^\circ$ の時で、そ

mass hierarchy	δ_{14}	χ_{\min}^2
Normal	0°	32.0
	90°	60.9
	-90°	39.9
	180°	42.3
Inverted	0°	34.3
	90°	49.8
	-90°	45.6
	180°	40.1

表 4.3 DUNE における χ_{\min}^2 の値

mass hierarchy	δ_{14}	χ_{\min}^2
Normal	0°	109.0
	90°	267.5
	-90°	203.7
	180°	122.0
Inverted	0°	121.8
	90°	253.8
	-90°	212.4
	180°	125.3

表 4.4 T2HK における χ_{\min}^2 の値

の時の各チャンネルのエネルギースペクトル $N_{3\nu, i}, N_{4\nu, i}$ は図 4.5, 4.6 のようになる。

χ^2 の計算で用いたエネルギー bin の数は図 4.5, 4.6 より、DUNE では 0 GeV ~ 8 GeV の間で 250 MeV ごとにとっているの各チャンネル 32 bin。T2HK では 0 GeV ~ 1.5 GeV の間で

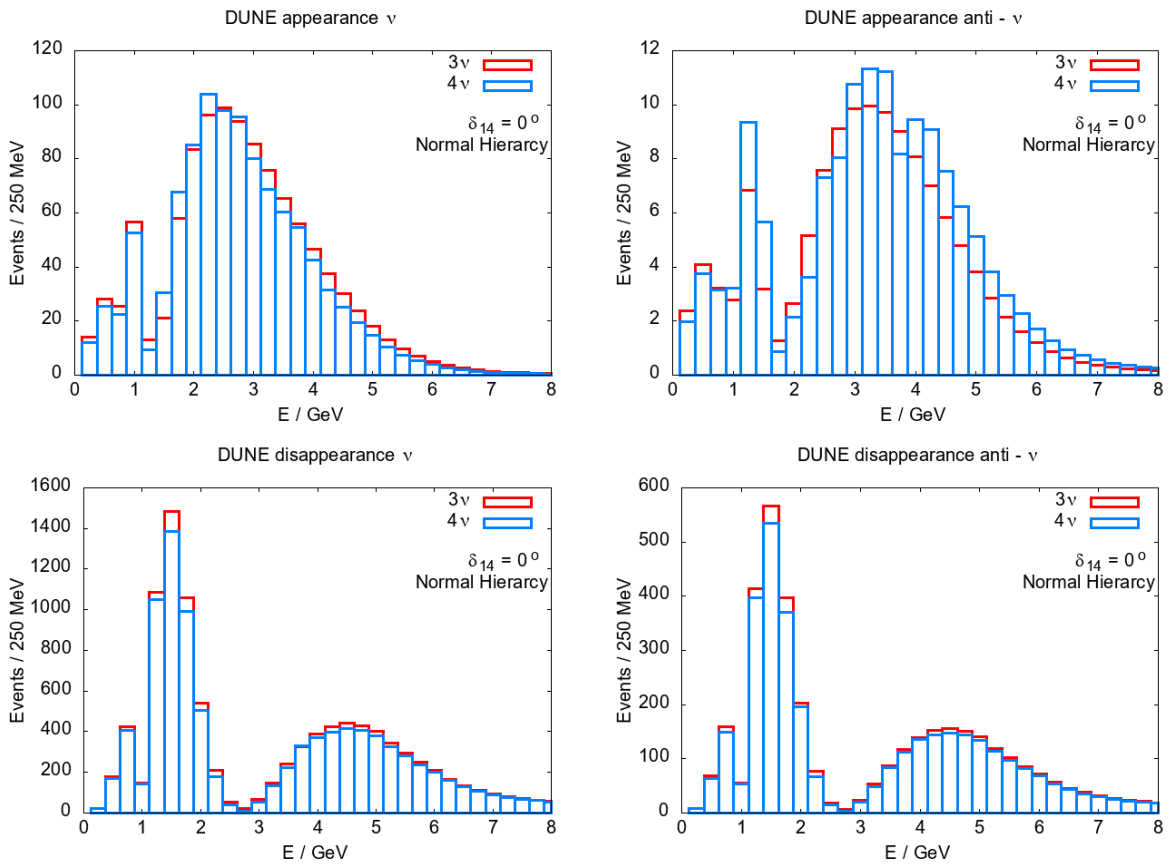


図 4.5 DUNE におけるそれぞれのチャンネルのイベント数のエネルギースペクトル。

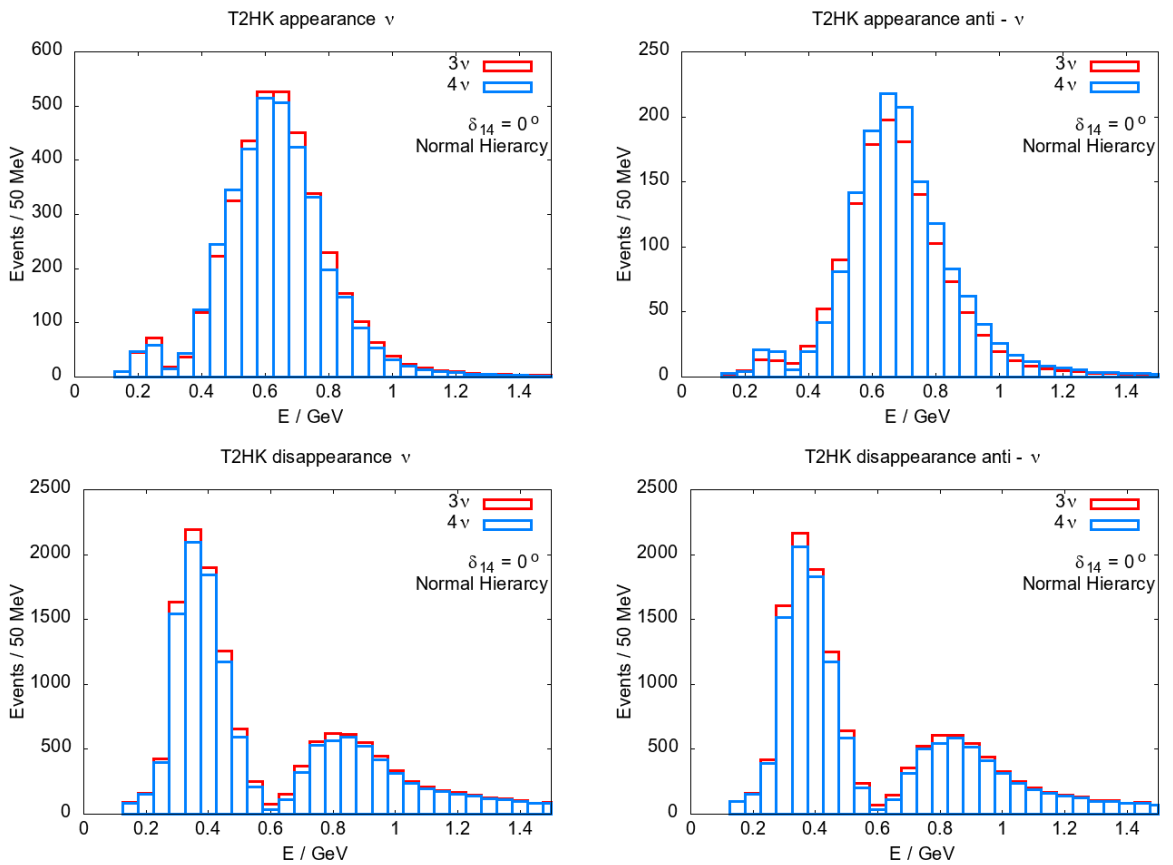


図 4.6 T2HK におけるそれぞれのチャンネルのイベント数のエネルギースペクトル。

50 MeV ごとにとっているなので各チャンネル 28 bin ある。また独立なパラメーターは $\theta_{23}, \delta_{13}, \Delta m_{31}^2$ の3つなので、 χ^2 の自由度は

$$\begin{aligned} \text{DUNE: } \#d.o.f &= \#bin - \#parameter \\ &= 32 \times 4 - 3 = 125 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$$\text{T2HK: } \#d.o.f = 28 \times 4 - 3 = 109 \quad (4.2.6)$$

したがって、reduced χ^2

$$\chi_{\text{red}}^2 = \chi_{\text{min}}^2 / \#d.o.f \quad (4.2.7)$$

は表 4.5, 4.6 のようになる。このように、DUNE では $\chi_{\text{red}}^2 < 1$ 、T2HK では $\chi_{\text{red}}^2 \sim 1$ となり、どち

mass hierarchy	δ_{14}	χ_{red}^2
Normal	0°	0.256
	90°	0.487
	-90°	0.319
	180°	0.338
Inverted	0°	0.274
	90°	0.398
	-90°	0.367
	180°	0.320

表 4.5 DUNE における χ_{red}^2 の値

mass hierarchy	δ_{14}	χ_{red}^2
Normal	0°	1.00
	90°	2.45
	-90°	1.87
	180°	1.12
Inverted	0°	1.11
	90°	2.33
	-90°	1.95
	180°	1.15

表 4.6 T2HK における χ_{red}^2 の値

らの実験でも significance は大きくなく、3 世代と 4 世代の区別は難しいことがわかる。

一方で $\Delta\chi^2$ として

$$\Delta\chi^2(\theta_{23}, \delta_{13}) = \chi^2(\theta_{23}, \delta_{13}) - \chi_{\text{min}}^2 \quad (4.2.8)$$

と定義する。式 4.2.8 による $\Delta\chi^2$ は自由度 2 の χ^2 分布に従うので、 $\Delta\chi^2$ の値と confidence level の関係は表 4.7 のようになる。 $\Delta\chi^2$ の計算結果を図 4.7-4.10 に示す。

confidence level	χ^2
90%	4.61
99%	9.21
3 σ	11.9
4 σ	19.3
5 σ	28.7

表 4.7 χ^2 の値と confidence level の関係

図 4.7-4.10 における (s_{23}^2, δ_{13}) の best fit の値を表 4.8, 4.9 に示す。

ここから分かることとして、4 世代における Reference Value として $\theta_{23} \geq 45^\circ$ としたが、 $\delta_{14} = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ では χ^2 の結果による 3 世代の best fit が $\theta_{23} \leq 45^\circ$ になり、 θ_{23} -octant が

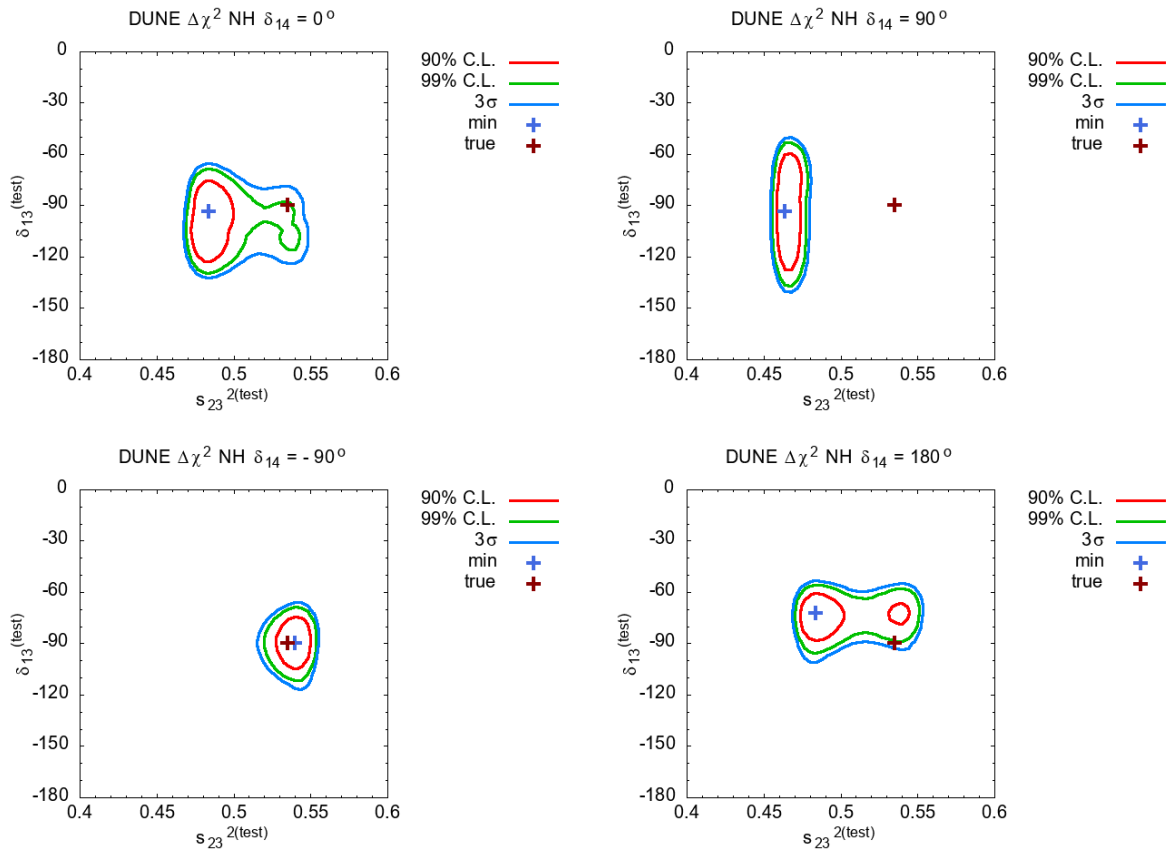


図 4.7 DUNE における Normal Hierarchy での $\Delta\chi^2$ の計算結果

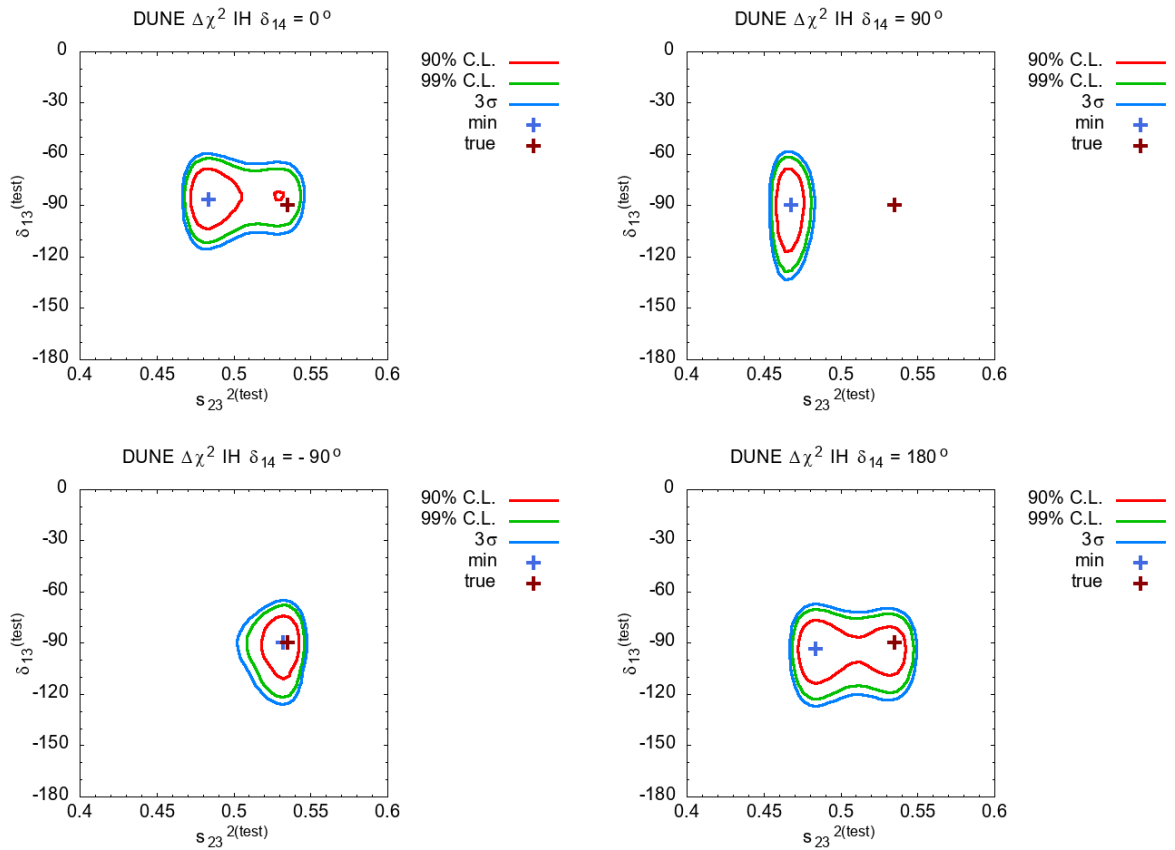


図 4.8 DUNE における Inverted Hierarchy での $\Delta\chi^2$ の計算結果

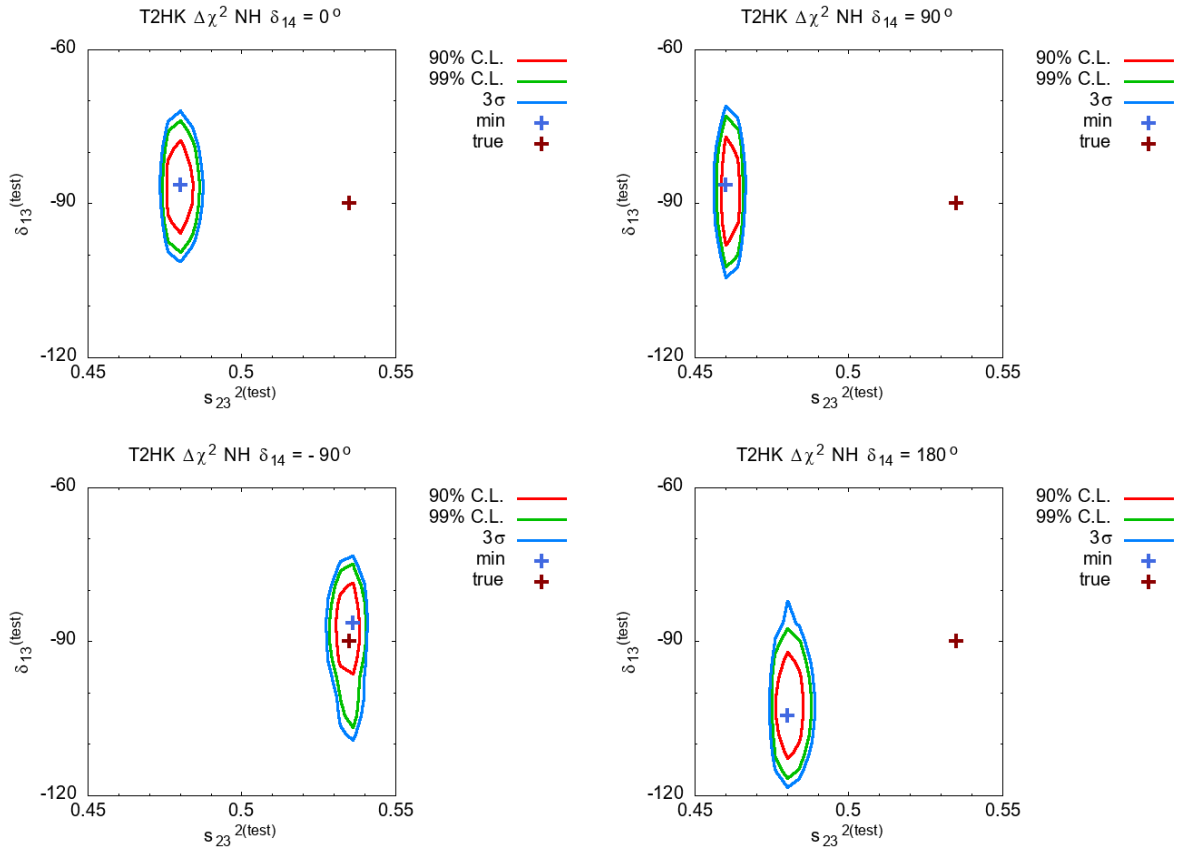


図 4.9 T2HK における Normal Hierarchy での $\Delta\chi^2$ の計算結果

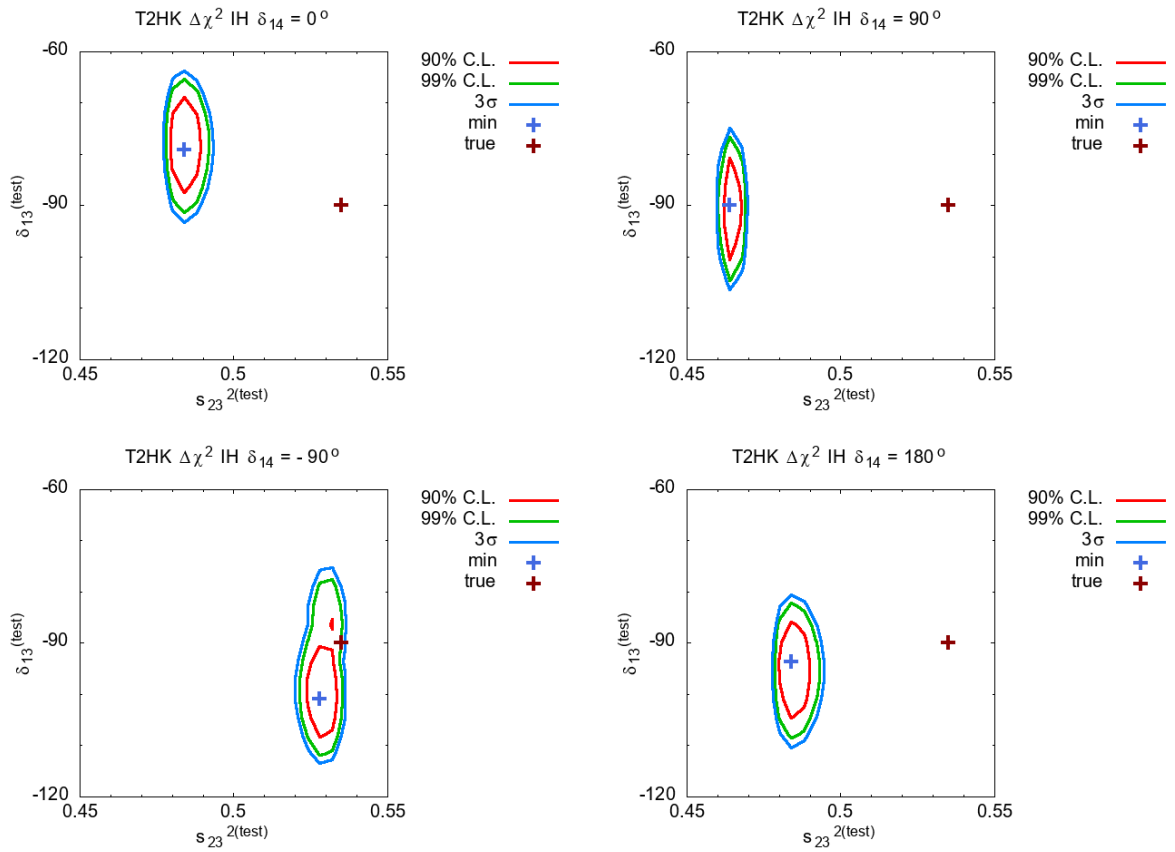


図 4.10 T2HK における Inverted Hierarchy での $\Delta\chi^2$ の計算結果

mass hierarchy	δ_{14}	(s_{23}^2, δ_{13})
Normal	0°	$(0.484, -93.6^\circ)$
	90°	$(0.464, -93.6^\circ)$
	-90°	$(0.540, -90.0^\circ)$
	180°	$(0.484, -72.0^\circ)$
Inverted	0°	$(0.484, -86.4^\circ)$
	90°	$(0.468, -90.0^\circ)$
	-90°	$(0.532, -90.0^\circ)$
	180°	$(0.484, -93.6^\circ)$

表 4.8 DUNE の best fit における (s_{23}^2, δ_{13}) の値

mass hierarchy	δ_{14}	(s_{23}^2, δ_{13})
Normal	0°	$(0.480, -86.4^\circ)$
	90°	$(0.460, -86.4^\circ)$
	-90°	$(0.536, -86.4^\circ)$
	180°	$(0.480, -104.4^\circ)$
Inverted	0°	$(0.484, -79.2^\circ)$
	90°	$(0.464, -90.0^\circ)$
	-90°	$(0.528, -100.8^\circ)$
	180°	$(0.484, -93.6^\circ)$

表 4.9 T2HK の best fit における (s_{23}^2, δ_{13}) の値

混同することがわかる。 $\delta_{14} = -90^\circ$ のときは θ_{23} -octant の混同は起こらない。これらの結論は、Normal Hierarchy, Inverted Hierarchy いずれの場合にも当てはまる。

一方で、 δ_{13} について Normal Hierarchy, $\delta_{14} = 180^\circ$ のときは、4 世代における Reference Value と 3 世代の best fit のずれが大きくなりうる。それ以外の δ_{14} については δ_{13} の決定に影響はほとんどでない。

第 5 章

結論

本研究では、将来の長基線実験である DUNE, T2HK における $3+1$ ニュートリノシナリオによるステライルニュートリノの兆候と θ_{23} -octant の決定について議論した。結果として、DUNE でも T2HK でも 3 世代と 4 世代の区別は難しいことが分かった。また、 θ_{23} -octant, δ_{13} の決定に対して、 δ_{14} の値によって影響が出ることも分かった。

しかし、本論文では実際の実験によるエネルギー分解能は考えておらず、また、 $\Delta m_{41} \simeq 1 \text{ eV}^2$ に焦点を当てて考えたが、 $\Delta m_{41} \geq 10 \text{ eV}^2$ などの一般的な LSND の許容領域の可能性も否定されておらず、これらに関して考慮した計算が、将来の課題として考えられる。

謝辞

本論文を執筆するにあたり、膨大な時間を割いて指導してくださいました安田修先生、北澤敬章先生に心よりお礼申し上げます。また研究室のメンバーをはじめとして枚挙に暇が無いほど多くの人たちの物理に対するひたむきな姿勢が、研究生活を送る上で力になったことは言うまでもありません。そして最後に、私を支えてくれた家族に深甚の謝意を表します。

参考文献

- [1] I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, A. Hernandez-Cabezudo, M. Maltoni and T. Schwetz, JHEP **1901**, 106 (2019) doi:10.1007/JHEP01(2019)106 [arXiv:1811.05487 [hep-ph]].
- [2] LSND Collaboration, Phys.Rev.Lett.**77** 3082-3085(1996) [nucl-ex/9605003].
- [3] MiniBooNE Collaboration, Phys.Rev.Lett.**121**,221801(2018) [hep-ex/1805.12028]
- [4] P. Adamson *et al.* (Daya Bay, MINOS Collaborations), Phys. Rev. Lett. **117**, 151801 (2016) [hep-ex/1607.01177]
- [5] IceCube Collaboration, Phys. Rev. **D 95**, 112002 (2017) [hep-ex/1702.05160]
- [6] The DUNE Collaboration,[hep-ex/1512.06148]
- [7] The Hyper-Kamiokande Working Group,[hep-ex/1412.4673]
- [8] E.S.Abers, B.W.Lee, Physics Reports, **9C**, 1(1973)
- [9] S.M.Bilenky, C.Giunti, W.Grimus, Prog.Part.Nucl.Phys.**43**(1999)1-86 [hep-ph/9812360].
- [10] S. Goswami, K. Kar and A. Raychaudhuri, Int. J. Mod. Phys. A **12**, 781 (1997) doi:10.1142/S0217751X97000621 [hep-ph/9505395].
- [11] Gian Luigi Fogli, E.Lisi, G.Scioscia, Phys.Rev.**D52** 5334-5351(1995) [hep-ph/9506350].
- [12] Gian Luigi Fogli, E. Lisi, Phys.Rev.**D54** 3667-3670(1996) [hep-ph/9604415].
- [13] M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group], Phys. Rev. D **98**, no. 3, 030001 (2018). doi:10.1103/PhysRevD.98.030001