

重クォーク有効理論とその実験への応用

増川 京佑

首都大学東京 理工学研究科

物理学専攻 素粒子理論研究室

目次

第 1 章	はじめに	1
第 2 章	標準模型	3
2.1	ゲージ対称性	3
2.2	電弱相互作用	6
2.3	対称性の自発的破れと質量の獲得	9
2.4	湯川相互作用と Cabbibo-小林-益川行列	13
2.5	強い相互作用	15
2.6	カイラル対称性の破れ	17
第 3 章	重クォーク対称性	20
3.1	重クォークが持つ特徴	20
3.2	重クォークの有効 Lagrangian	22
3.3	重クォークの状態の定義	26
3.4	$\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e$ の形状因子	27
3.4.1	微分崩壊比	27
3.4.2	Isgur-Wise 関数	30
第 4 章	重中間子有効理論	32
4.1	重中間子場の導入	32
4.2	カイラル摂動論	34
4.3	$1/M$ 補正まで含めた重中間子有効理論の Lagrangian	37
第 5 章	応用	39
5.1	$D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$ への応用	39
5.2	$\bar{B} \rightarrow D^{(*)} e \bar{\nu}_e$ への応用	41
第 6 章	まとめ	44
付録 A	表記	46
A.1	4次元記法	46
A.2	γ 行列	46
A.3	Dirac スピノール	47

謝辭	48
參考文獻	49

第 1 章

はじめに

素粒子物理学の目的は、自然界に存在する基本粒子の正体を明かし、それら基本粒子がどのように相互作用するかを記述する事である。素粒子の標準模型 (the Standard Model, 以下「標準模型」と呼ぶ) は素粒子物理学における数多くの実験結果を現在のところ最もよく再現する理論である [1, 2, 3]。2012 年 7 月には標準模型において存在が予言された Higgs 粒子が、欧州原子核研究機構 (CERN) の大型ハドロン衝突型加速器 (Large Hadron Collider, LHC) を用いた実験により発見され、標準模型はより確固たる地位を占めるに至った。

しかし、標準模型は大きく分けて 2 つの側面からの問題点を抱えている。ひとつは理論的側面からの問題点であり、もうひとつは実験事実に基づく問題点である。理論的側面からの問題点として、重力相互作用を記述しない事、調整可能なパラメータを数多く含む事などが挙げられる。実験事実に基づく問題点として、ニュートリノに質量がなければ説明できない「ニュートリノ振動」と呼ばれる現象が観測されている事、標準模型には含まれない粒子である「暗黒物質 (dark matter)」の存在が宇宙についての観測事実から示唆される事などが挙げられる。このように標準模型は最も成功した理論である一方、解決すべき問題点を数多く抱えている。そのためこのような問題点を解決する「標準模型を超える理論 (Beyond the Standard Model)」の構築が求められる。

この標準模型を超える理論を構築する上で「B-factory 実験」が重要な手がかりになる。B-factory 実験の主な目的は標準模型の精密検証である。精密な測定を行うことにより標準模型の予言からのずれをみることで、標準模型を超える理論についての情報を得ることができる。そのためには莫大な数の実験データの蓄積が必要となる。これを実現するための実験として、現在 CERN で行われている LHC による「LHCb 実験」や、高エネルギー加速器研究機構 (KEK) で将来稼働予定の SuperKEKB 加速器による「BelleII 実験」がある。SuperKEKB 加速器には数多くの実験データを集めるために工夫が施されている。SuperKEKB 加速器は、前身である KEKB 加速器に比べて 40 倍の実験データをためることができる。

B-factory 実験が持つ大きな利点は、標準模型の中でも特に強い相互作用の物理を探ることができることである。そして強い相互作用に着目する理由は、強い相互作用が低エネルギー領域において非摂動的効果だからである。標準模型が確固たる地位を占めることができたのは、電弱相互作用を摂動論で扱うことができ、高精度な予言を行うことができたからである。標準模型によって予言された Higgs 粒子も電弱相互作用による現象から発見されたものである。このように摂動論を用いた手法は非常に強力であり成功を収めてきたが、強い相互作用の非摂動的効果に適用することはできない。そのため標準模型による強い相互作用への予言は、電弱相互作用への予言に比べると大変

困難である。そこで、摂動論を用いずに強い相互作用を解析するための手法が主に2種類ある。ひとつは「格子ゲージ理論」と呼ばれる大規模数値計算による手法であり、もうひとつは本論文で解説する強い相互作用が持つ対称性を用いた手法である。格子ゲージ理論による手法は、強い相互作用による非摂動的現象を計算機上で再現し、莫大な数値実験を繰り返すことで実験データを直接的に集めることができる。しかし、格子ゲージ理論は標準模型が正しい理論であるとの仮定の下での数値計算であり、標準模型を超える理論への手がかりが直接見つかる訳ではない。さらに数値実験から得られるデータは数値だけであるから、実際に起きている強い相互作用の現象への理解には繋がりにくい。そこで強い相互作用が持つ対称性を用いた手法が効果的となる。対称性には2種類あり、軽いクォークに関する対称性と重いクォークに関する対称性である。軽いクォークは低エネルギー領域においてカイラル対称性を持つ。この対称性を用いると、軽いクォークからなる中間子が小さい運動量を持つときの振る舞いを記述することができる。同様に、重いクォークにも低エネルギー領域においてスピン・フレーバー対称性と呼ばれる対称性がある。強い相互作用は摂動論を用いることができない非摂動的効果であり、その効果は形状因子と呼ばれる未知関数によって表される。そして形状因子はひとつではなく複数個存在し、扱いが困難である。ところが、重いクォークが持つ対称性を用いることで、複数の形状因子をただひとつの関数として表すことができる。この形状因子を将来の B-factory 実験のデータから調べることで、非摂動的効果への、すなわち強い相互作用が引き起こす現象への理解に繋がると期待される。このように対称性を用いた手法は、非摂動的効果を扱うことのできる非常に有効な手立てである。さらに将来の B-factory 実験は莫大な実験データを集めることで、かつての B-factory 実験では統計が足りないために観測できなかった稀な現象も探し出すことができる。このような稀な過程によるデータは、格子ゲージ理論の数値計算による結果でしか得ることができなかつた。しかし B-factory 実験がデータを集めることで、実験による結果と数値計算による結果との比較が可能になる。数値計算による結果は標準模型の範疇で得られたものであるから、このような比較はまさしく標準模型と実際の現象との比較である。このように B-factory 実験による標準模型の精密検証により、標準模型を超える理論への手がかりが見つかること大いに期待される。すなわち、特に重いクォークの対称性を用いた手法は、強い相互作用の現象への理解を与え、新しい物理を探る上で非常に有効である。そこで本論文では、B-factory 実験によって重要な働きをする B 中間子の振る舞いを重クォークのスピン・フレーバー対称性を用いて評価する手法を解説し、実験への応用を展望する。

本論文の構成を以下に示す。まず第2章では標準模型を説明する。軽いクォークが持つ対称性を用いて軽い中間子の振る舞いを理解する手法を紹介する。第3章では重いクォークが持つ対称性と低エネルギー有効理論について解説する [4, 5, 6]。次に第4章では重いクォークを構成要素として持つ複合粒子である重い中間子の有効理論について解説する [7, 8]。そして第5章では得られた有効理論を実際の現象へ応用し、パラメータへの具体的な制限や、重い中間子の有効理論の利点について議論する。最後の第6章で結論と今後の展望を与える。

第 2 章

標準模型

自然界には強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用，重力相互作用の計 4 種類の相互作用が存在する。素粒子の標準模型は $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ というゲージ対称性によって重力を除いた 3 種類の相互作用を記述する。本章ではこの標準模型について概説し，標準模型では説明されない問題点についても適宜紹介する。以下，単に Lagrangian と呼ぶときには Lagrangian 密度を指すものとする。また，本論文において使用する記号の定義は付録 A にまとめた。

2.1 ゲージ対称性

例えば次のような N 成分 Dirac フェルミオン場の Lagrangian

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \quad (2.1.1)$$

を考える。ここで γ^μ はガンマ行列であり，以下の Clifford 代数を満たす：

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu \equiv \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \mathbf{1}_4. \quad (2.1.2)$$

また，

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \cdots \bar{\psi}_N) \quad (2.1.3)$$

であり， $\bar{\psi}$ は Dirac 共役 $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$ である。この Lagrangian は，各 $\psi_i (i = 1, 2, \dots, N)$ の位相を共通に回す $U(1)$ 位相変換

$$\psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x) = e^{i\theta} \psi_i(x) \quad (2.1.4)$$

の下で不変である。ここで θ は変換の実パラメータである。さらに Lagrangian (2.1.1) は，任意の $N \times N$ ユニタリ行列 U によって N 成分の場を混ぜるような $U(N)$ 変換

$$\begin{aligned} \psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x) &= U_i^j \psi_j(x) \\ &= \left[\exp\left(i \sum_{a=1}^{N^2} \theta^a T^a\right) \right]_i^j \psi_j(x) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

の下でも不変である。ここで θ^a は実数の変換パラメータ、 T^a は群 $U(N)$ の無限小変換の生成子 (generator) である。また行列 U はユニタリーであるから、 T^a は $N \times N$ エルミート行列である。すると独立な T^a の数は N^2 個であるから、添字 a は $a = 1, 2, \dots, N^2$ である。このように、群 G の独立な生成子の個数のことを群の次元と呼び $\dim G$ と表す。よって群 $U(N)$ の次元は $\dim U(N) = N^2$ と書かれる。

ここで、生成子 T^a の規格直交化を次のように定義する：

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (2.1.6)$$

すると群 $U(N)$ の生成子の具体的な形を与えることができる。 $N = 2$ に対し、

$$T^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^a \equiv \frac{1}{2} \sigma_a \quad (a = 1, 2, 3) \quad (2.1.7)$$

の4つが生成子となる。ここで σ_a は Pauli 行列である。また $N = 3$ に対し、

$$T^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^a \equiv \frac{1}{2} \lambda_a \quad (a = 1, \dots, 8) \quad (2.1.8)$$

の9つが生成子となる。ここで λ_a は以下の Gell-Mann 行列である：

$$\lambda_a = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a = 1, 2, 3) \quad (2.1.9)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.10)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (2.1.11)$$

また、 $U(2)$ 、 $U(3)$ いずれの場合にも、 T^0 は部分群 $U(1)$ の生成子である。すると他の $N^2 - 1$ 個の生成子は全てトレースが0であることから、 T^a ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) は $U(N)$ の部分群である特殊ユニタリー群 $SU(N)$ の生成子となる。

ここまでに見えた変換パラメータ θ^a は時空座標 x^μ に依存しないものとしていた。このように、全ての時空点において一斉に、同じ変換をする場合、これを大局的 (global) 変換と呼ぶ。一方、各時空点ごとに異なる変換を行う場合、これを局所的 (local) 変換、もしくはゲージ変換と呼ぶ。ゲージ変換は変換パラメータが時空座標に依存するため、以下のように書かれる：

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &\rightarrow \psi'_i(x) = U_i^j(x) \psi_j(x) \\ &= [\exp(i g \theta^a(x) T^a)]_i^j \psi_j(x). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

ここで変換パラメータを $\theta^a \rightarrow g \theta^a$ へと取り直した。 g は便宜上導入した実定数であり、結合定数と呼ぶ。ところがこの変換の下で Lagrangian (2.1.1) は不変にならない。実際、変換パラメータ、つまりユニタリー行列 U が時空座標に依存することから、

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi(x) &\rightarrow \partial_\mu \psi'(x) = \partial_\mu (U(x) \psi(x)) \\ &= U(x) [\partial_\mu + U^{-1}(x) \partial_\mu U(x)] \psi(x) \\ &\neq U(x) \partial_\mu \psi(x) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

として余分な項が現れるからである。この余分な項を取り除くため、次のように微分 ∂_μ を共変微分 D_μ に置き換える。

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x). \quad (2.1.14)$$

このような置き換えのことを最小結合 (minimal coupling) と呼ぶ。ここで A_μ は $N \times N$ 行列

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{N^2-1} A_\mu^a(x) T^a \quad (2.1.15)$$

であり、 A_μ^a はゲージ場と呼ばれる。そして、微分を共変微分に置き換えた Lagrangian がゲージ変換の下で不変となるためには、 $D_\mu\psi$ が ψ と同じ変換性

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow (D_\mu\psi)'(x) = U(x)D_\mu\psi(x) \quad (2.1.16)$$

を持つ必要がある。この要請から、ゲージ場のゲージ変換性は

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) \quad (2.1.17)$$

もしくは

$$A_\mu^a \rightarrow A'^a_\mu = A_\mu^a + \sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{abc} A_\mu^b \theta^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a \quad (2.1.18)$$

でなければならない。ここで f^{abc} は、一般に群 $SU(N)$ の生成子 T^a が満たす交換関係

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (2.1.19)$$

に現れる完全反対称な定数であり、群 $SU(N)$ の構造定数 (structure constant) と呼ばれる。

以上より、一般に $SU(N)$ ゲージ変換の下で不変な Lagrangian を書き下すことができる：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (2.1.20)$$

ここで

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.1.21)$$

である。Lagrangian (2.1.20) の第2項はゲージ場の運動項を表す。また、ゲージ場の質量項として $(1/2)m^2 A_\mu^a A^{a\mu}$ のような項も考えられるが、これはゲージ不変性を破るため、Lagrangian には加えられない。つまり、系にゲージ不変性が要請されることにより、ゲージ場が質量を持つことが禁止される。

このように、Lagrangian にゲージ不変性を課す事で、自然にゲージ場が導入された。このゲージ場は物質間に働く力を媒介する場としての役割を持つ。具体的に素粒子の標準模型に現れるゲージ場は、強い相互作用を記述する $SU(3)_C$ 対称性に対しグルーオン、電弱相互作用を記述する $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に対し W^\pm ボソン、 Z ボソン、光子である。ところが W^\pm ボソンと Z ボソンは質量を持つため、ゲージボソンが質量を獲得するためのメカニズムが必要となる。この問題を解決するのが後述する Higgs 機構である。

2.2 電弱相互作用

この節では、素粒子の標準模型に現れる素粒子を導入し、それらの電弱相互作用について触れる。

まず、物質、すなわち素粒子はフェルミオンであり、それらは大きく分けて2種類、クォークとレプトンに分類される。さらにクォークは、電荷 $2/3$ のアップ型クォーク (u クォーク, c クォーク, t クォーク), 電荷 $-1/3$ のダウン型クォーク (d クォーク, s クォーク, b クォーク) に分けられる。同様にしてレプトンも、電荷 0 のニュートリノ (電子ニュートリノ, μ ニュートリノ, τ ニュートリノ), 電荷 -1 の荷電レプトン (電子, μ 粒子, τ 粒子) に分けられる。ここで各電荷ごとに粒子が3種類あることに気付くが、これはそれぞれの粒子が世代 (generation) に分類されている事を表している。しかし標準模型は、なぜ世代数が3であるかを説明することができない。ここまですべてを2.1にまとめた。この節では以後簡単のため第1世代のみ考えるものとする。各世代の違いは質量だけであり、その他の性質は同じであるため、第1世代のみ議論しても支障は出ない。

さて、標準模型における弱い相互作用と電磁相互作用は、ゲージ対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ により記述される。これを電弱理論 (electroweak theory), もしくは Weinberg-Salam 理論と呼ぶ。弱い相互作用の例であるベータ崩壊では左巻きのフェルミオンだけが相互作用するという実験事実から、左巻きクォーク、レプトンをそれぞれ、 $SU(2)_L$ 2重項 (doublet) として表すことにする：

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

一方で右巻きのフェルミオンは $SU(2)_L$ 1重項 (singlet) として扱う：

$$u_R, d_R, e_R. \quad (2.2.2)$$

このような違いから、系のゲージ対称性 $SU(2)$ に添え字 L が付けられている。また標準模型において右巻きニュートリノは導入されないため、本論文でも ν_{eR} は考慮しないことにする。

ここでフェルミオン ψ の右巻き ψ_R , 左巻き ψ_L とは、射影演算子

$$P_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (2.2.3)$$

$$P_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (2.2.4)$$

によって $\psi_R \equiv P_R \psi$, $\psi_L \equiv P_L \psi$ と表される。また、 P_R, P_L は射影演算子としての性質

$$P_R + P_L = \mathbf{1}_4, \quad (\mathbf{1}_4 : 4 \times 4 \text{ の単位行列}) \quad (2.2.5)$$

$$(P_R)^2 = P_R, \quad (P_L)^2 = P_L, \quad (2.2.6)$$

$$P_R P_L = P_L P_R = 0, \quad (2.2.7)$$

表 2.1 フェルミオンの分類

		第1世代	第2世代	第3世代	電荷 Q
クォーク	アップ型	u	c	t	$2/3$
	ダウン型	d	s	b	$-1/3$
レプトン	ニュートリノ	ν_e	ν_μ	ν_τ	0
	荷電レプトン	e^-	μ^-	τ^-	-1

を満たすため、場 ψ の分解 $\psi = \psi_R + \psi_L$ が行われる。するとフェルミオンの質量項は

$$-\mathcal{L}_m = m\bar{\psi}\psi = m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L \quad (2.2.8)$$

と書かれる。この式からフェルミオンの質量項は $SU(2)_L$ 2重項が1つ、 $SU(2)_L$ 1重項が1つの組み合わせから構成されるために $SU(2)_L$ 対称性を破ってしまうことが分かる。つまり、Lagrangian に $SU(2)_L$ 対称性があるとフェルミオンの質量項は禁止される、とも言い換えられる。しかし実際には、クォークや荷電レプトンは質量を持つ*1。 W^\pm ボソンや Z ボソンと同様、フェルミオンが質量を獲得するためのメカニズムも後述する Higgs 機構によって説明される。

次に、ゲージ対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ におけるフェルミオンとゲージボソンの結合を確認する。まず、 $SU(2)_L$ の弱ゲージ場 W_μ は、生成子が $T^a = \sigma_a/2$ (σ_a は Pauli 行列) であるから、

$$W_\mu = \sum_{a=1}^3 A_\mu^a \frac{\sigma_a}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_\mu^3 & \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{1}{2}A_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

と書かれる。ここで

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2) \quad (2.2.10)$$

とした。するとクォークの Lagrangian は、共変微分により次のように書かれる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quark}} &= \bar{Q}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig_2W_\mu)Q + \bar{u}_Ri\gamma^\mu\partial_\mu u_R + \bar{d}_Ri\gamma^\mu\partial_\mu d_R \\ &= \bar{u}i\gamma^\mu\partial_\mu u + \bar{d}i\gamma^\mu\partial_\mu d \\ &\quad - \frac{g_2}{\sqrt{2}}(\bar{u}\gamma^\mu P_L d W_\mu^+ + \bar{d}\gamma^\mu P_L u W_\mu^-) - \frac{g_2}{2}(\bar{u}\gamma^\mu P_L u - \bar{d}\gamma^\mu P_L d)A_\mu^3 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

ここで g_2 は $SU(2)_L$ の結合定数である。第2項は、電荷の異なるクォーク u, d がゲージボソン W_μ^\pm と結合し遷移する事を表す。このことから W_μ^\pm は荷電弱ゲージボソンと呼ばれる。同様に式 (2.2.11) の第3項はクォークの電荷が変わること無くゲージボソン A_μ^3 と結合していることが分かる。このことから A_μ^3 は中性のゲージボソンであり、これを電磁相互作用を引き起こす光子と見なしたい。しかし A_μ^3 は右巻きフェルミオンと相互作用しないため、 A_μ^3 をそのまま光子と見なすには不十分である。そこで $U(1)_Y$ 対称性を導入する。ただし $U(1)_Y$ がそのまま電磁相互作用 $U(1)_{EM}$ を与えるのではない事に注意する。 $U(1)_Y$ はクォークとレプトンに対して新たにハイパーチャージ (hyper charge) と呼ばれる量子数 Y を与える。ここでハイパーチャージ Y は、 $U(1)_Y$ の共変微分において次のように定義した：

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \quad (2.2.12)$$

ここで g_1 は $U(1)_Y$ の結合定数であり、 B_μ は $U(1)_Y$ ゲージボソンである。

このように電弱相互作用はゲージ対称性 $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ の直積であるゲージ対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ によって導入されると期待される。この対称性が対称性の自発的破れ $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ によって電磁相互作用 $U(1)_{EM}$ を与える。後述するが、 $U(1)_{EM}$ の生成子 (もしくは電

*1 加えてニュートリノ振動が観測されていることからニュートリノも質量を持つ。しかし先述したように標準模型は右巻きニュートリノを含まない模型であるため、ここではニュートリノの質量については触れないこととする。

表 2.2 クォークとレプトンが持つ量子数

場	弱アイソスピン	T^3	Y	電荷 Q
$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	1/3	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
u_R	1	0	4/3	2/3
d_R	1	0	-2/3	-1/3
$L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
e_R	1	0	-2	-1

荷 Q は $SU(2)_L$ の生成子の第3成分 T^3 と $U(1)_Y$ の生成子 $Y/2$ により次のように表されることとなる：

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}. \quad (2.2.13)$$

クォークとレプトンが持つ量子数を表 2.2 にまとめた。

以上をまとめると、ゲージ対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ を持つ Lagrangian は、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{quark}} + \mathcal{L}_{\text{lepton}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} \quad (2.2.14)$$

と書かれる。ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quark}} = & \bar{Q} i \gamma^\mu \left[\partial_\mu + i g_2 W_\mu + i \frac{g_1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) B_\mu \right] Q \\ & + \bar{u}_R i \gamma^\mu \left[\partial_\mu + i \frac{g_1}{2} \left(\frac{4}{3} \right) B_\mu \right] u_R \\ & + \bar{d}_R i \gamma^\mu \left[\partial_\mu + i \frac{g_1}{2} \left(-\frac{2}{3} \right) B_\mu \right] d_R, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{lepton}} = & \bar{L} i \gamma^\mu \left[\partial_\mu + i g_2 W_\mu + i \frac{g_1}{2} (-1) B_\mu \right] L \\ & + \bar{e}_R i \gamma^\mu \left[\partial_\mu + i \frac{g_1}{2} (-2) B_\mu \right] e_R. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

また、 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ はゲージ場の運動項で、

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.2.17)$$

である。ここで

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_2 \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.2.18)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.2.19)$$

であり、 ϵ^{abc} は $SU(2)_L$ の構造定数で Levi-Civita の完全反対称テンソルである。

2.3 対称性の自発的破れと質量の獲得

前節まででは、 W^\pm や Z 、そしてクォークやレプトンは無質量であるとしたが、実際には質量を持つ粒子である。これは系に $SU(2)_L$ 2重項である Higgs 場と呼ばれる場を新たに導入することで説明される。この節では、まず例として $U(1)$ 大局的対称性の自発的破れを扱い、次に $U(1)$ ゲージ対称性の破れを見る。

ある対称性を持つ理論を考える。例として、次のような複素スカラー場を1つ含む模型を考える：

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - V(\phi^* \phi) \quad (2.3.1)$$

ここで、 V はポテンシャル

$$V(\phi^* \phi) = \mu \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2, \quad (\lambda > 0) \quad (2.3.2)$$

であり、 $\lambda > 0$ はポテンシャルが基底状態 (または真空) 持つための条件である。

もし $\mu < 0$ ならば、停留点 $\partial V / \partial \phi = 0$ の内で安定なものは複素平面上の円周 $\phi^* \phi = \frac{-\mu}{2\lambda}$ となる。そしてこの円周は $U(1)$ 対称性を持つ。しかし、場の理論の仮定 (スペクトル条件) から真空は縮退しないものとするので、真空として実軸上の点

$$\phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} \equiv \sqrt{\frac{-\mu}{2\lambda}} \quad (2.3.3)$$

を選ぶことにする。するとこの真空は $U(1)$ 対称性を持たないので、対称性が破られる。そして、この真空 ϕ_0 まわりでの量子ゆらぎ $\delta\phi$ を、2つの実場 ϕ_1, ϕ_2 で次のように書く：

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi \quad (2.3.4)$$

$$\equiv \sqrt{\frac{-\mu}{2\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_2). \quad (2.3.5)$$

この ϕ_1, ϕ_2 を用いて Lagrangian (2.3.1) を書き直すと、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - \frac{1}{2} (-2\mu) \phi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 + \mathcal{O}((\delta\phi)^2) \quad (2.3.6)$$

となる。この Lagrangian は、質量 $\sqrt{-2\mu}$ の実スカラー場 ϕ_1 と、質量ゼロの実スカラー場 ϕ_2 を記述する。このように、対称性が自発的に破れる事によって現れる質量ゼロの場のことを南部-Goldstone 場 (NG 場) と呼ぶ。実際上の例では、 ϕ_2 は真空からポテンシャルが平坦な方向へのゆらぎであり、この平坦な方向とは破れた対称性 $U(1)$ の方向に対応する。

このことを一般の場合に言い換える。系が持つ大局的対称性の群を G とし、この G の生成子を T_a ($a = 1, \dots, \dim G$) とする。そして、対称性 G が自発的に破れ、残った対称性の群を H と書く。すると破れた対称性は G/H と書かれ、この空間を張る生成子 X_z の個数は $\dim G - \dim H$ である ($z = 1, \dots, \dim G - \dim H$)。そして G/H の変換において真空 $|0\rangle$ が不変でないことは、生成子 X_z を用いて次のように書かれる：

$$\exp(i\alpha_z X_z) |0\rangle \neq |0\rangle, \quad (z = 1, \dots, \dim G - \dim H), \quad (2.3.7)$$

または

$$X_z |0\rangle \neq 0, \quad (z = 1, \dots, \dim G - \dim H). \quad (2.3.8)$$

ここで α_z は変換の実パラメータである。Goldstone の定理によると G/H の独立な生成子の数だけ NG ボソンが現れることになる。

ここまでは大局的対称性を考えてきたが、今度はゲージ対称性の場合に拡張して考える。例として、次のような U(1) ゲージ対称性を持つ Lagrangian を考える：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi), \quad (2.3.9)$$

ここで、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.3.10)$$

共変微分は

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + igA_\mu)\phi, \quad (2.3.11)$$

であり、 g は結合定数、そしてポテンシャルは

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2, \quad (\lambda > 0) \quad (2.3.12)$$

である。今、 $\mu^2 > 0$ の場合を考える。先程の例と同様、 ϕ の真空期待値として $\phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ を選ぶものとする。そして安定点 ϕ_0 まわりでの量子ゆらぎを、実スカラー場 ξ, η を用い

$$\phi(x) = e^{i\xi(x)} \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \quad (2.3.13)$$

と書くことにする (極分解)。また、以下では物理的な自由度について議論したいため、次のようなゲージ変換を取る (ユニタリーゲージ)：

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\xi(x)}\phi = \frac{v + \eta(x)}{2}, \quad (2.3.14)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\xi(x). \quad (2.3.15)$$

すると元の Lagrangian (2.3.9) は次のように書き直される：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (2.3.16)$$

ここで、

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(gv)^2 A_\mu A^\mu \quad (2.3.17)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{\lambda v^2}{4} - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 \quad (2.3.18)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g^2 \left(v\eta + \frac{1}{2}\eta^2 \right) A_\mu A^\mu \quad (2.3.19)$$

である。よってスカラー場 ϕ がゼロでない真空期待値を持ったことにより、式 (2.4.16) にゲージ場 A_μ の質量項が現れ、その質量は gv である。

ここで自由度について考える。無質量のゲージ場は、進行方向に2つの角運動量成分 (1, -1) を持つので自由度は2である。一方、質量を持つゲージ場は、縦波の自由度を加えた3つの角運動量成分 (1, 0, -1) を持つので自由度は3である。つまり無質量のゲージ場が質量を持つためには縦波の自由

表 2.3 Higgs が持つ量子数

Higgs 場	弱アイソスピン	T_3	Y	電荷 Q
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

度が新たに必要になる。ここで Lagrangian (2.3.16) から実スカラー場 $\xi(x)$ が消えていることに注意する。このことから、量子ゆらぎとして導入した実スカラー場 ξ, η の内のひとつである $\xi(x)$ が、ゲージ場の縦波の自由度として吸収されたと見なす事ができる。このように質量ゼロのゲージ場が縦波の自由度を獲得し、質量を得る機構のことを Brout-Englert-Higgs 機構、もしくは単に Higgs 機構と呼ぶ。

以上、対称性の自発的破れとゲージ粒子の質量獲得についての例を見てきたが、今度はこれを標準模型の場合に適用する。まず、次のような $SU(2)_L$ 2重項の Higgs 場 Φ を導入する：

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.20)$$

ここで、成分となる ϕ^+, ϕ^0 はそれぞれ電荷 $+1, 0$ を持つ複素スカラー場である。この事と関係 (2.2.13) より、Higgs 場のハイパーチャージは 1 である。ここで Higgs 場が持つ量子数を表 2.3 にまとめた。これまでの例と同様、ポテンシャルの形を

$$V = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (\lambda > 0) \quad (2.3.21)$$

とする。そして $\mu^2 < 0$ のとき、中性の複素スカラー場 ϕ^0 が真空期待値を持つように

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.3.22)$$

と取ることで、ゲージ対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ は自発的に破れることになる。ここで $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$ である。実際この真空期待値が $SU(2)_L \times U(1)_Y$ を破ることは、式 (2.3.8) のように生成子を作用させると確認できる：

$$T^a \langle \Phi \rangle \neq 0, \quad (T^a = \sigma_a/2 : SU(2)_L \text{の生成子}) \quad (2.3.23)$$

$$\frac{Y}{2} \mathbf{1}_2 \langle \Phi \rangle \neq 0. \quad (\mathbf{1}_2 : 2 \times 2 \text{の単位行列}) \quad (2.3.24)$$

しかし、電荷 $Q = T^3 + \frac{Y}{2}$ を変換の生成子とみなすと、この変換の下で真空が不変に保たれることが分かる：

$$\left(T^3 + \frac{Y}{2} \right) \langle \Phi \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.3.25)$$

よって、電荷 Q を生成子とする対称性、つまり $U(1)_{EM}$ ゲージ対称性だけは破られずに保持されることが分かる。すなわち、Higgs 場 Φ が真空期待値を持つことで、ゲージ対称性は

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM} \quad (2.3.26)$$

と自発的に破れる。

Higgs 場 Φ の真空期待値の取り方が分かったので、今度は Lagrangian における Higgs 場の運動項を書き下す：

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi). \quad (2.3.27)$$

ここで共変微分はゲージ対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の生成子を用いて書かれることから、

$$D_\mu \Phi = \left[\partial_\mu + ig_2 \sum_{a=1}^3 A_\mu^a T^a + ig_1 B_\mu \frac{1}{2} \right] \Phi \quad (2.3.28)$$

である。そして Lagrangian (2.3.27) からゲージ場の質量項を抜き出すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin}} \supset \mathcal{L}_{\text{mass}} &= \left| ig_2 \sum_{a=1}^3 A_\mu^a T^a + ig_1 B_\mu \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left| \begin{pmatrix} i\frac{g_2}{2}(A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ -i\frac{g_2}{2}A_\mu^3 + i\frac{g_1}{2}B_\mu \end{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= - \left(\frac{g_2 v}{2\sqrt{2}} \right)^2 (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu}) \\ &\quad - \left(\frac{v}{2\sqrt{2}} \right)^2 (g_2 A_\mu^3 - g_1 B_\mu)(g_2 A^{3\mu} - g_1 B^\mu) \\ &= - \left(\frac{g_2 v}{2\sqrt{2}} \right)^2 (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{g_2^2 + g_1^2} v}{2} \right)^2 (\cos \theta_W A_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu)(\cos \theta_W A^{3\mu} - \sin \theta_W B^\mu) \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

と書かれる。ここで

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad (2.3.30)$$

$$\tan \theta_W = \frac{g_1}{g_2} \quad (2.3.31)$$

と置いた。この θ_W は弱混合角 (weak mixing angle)、もしくは Weinberg 角と呼ばれ、実験から

$$\sin^2 \theta_W \simeq 0.23 \quad (2.3.32)$$

と決定されるものである。そして、この θ_W を用いてゲージ場 A_μ^3, B_μ を新たに

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.3.33)$$

なるゲージ場 Z_μ, A_μ に取り直す。その結果、ゲージ場の質量項 (2.3.29) は (2.2.10) と (2.3.29) を用いて、

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = - \left(\frac{g_2 v}{2} \right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{g_2^2 + g_1^2} v}{2} \right)^2 Z_\mu Z^\mu \quad (2.3.34)$$

と書かれる。この質量項から、 W^\pm ボソンの質量が $M_W = g_2 v/2$ 、新たな中性 Z^0 ボソンの質量が $M_Z = \sqrt{g_2^2 + g_1^2} v/2$ だと分かる。これが対称性の自発的破れ $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ の帰結である。

また、この質量項に現れていないゲージ場 A_μ は、残った対称性 $U(1)_{EM}$ の無質量ゲージボソン、つまり光子 γ を表している。 $U(1)_{EM}$ の結合定数 e は、 A_μ とフェルミオンの結合から決定される。 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の共変微分における A_μ^3 , B_μ の項を抜き出すと、

$$\begin{aligned}
g_2 A_\mu^3 T^3 + g_1 B_\mu \frac{Y}{2} &= \left[g_2 \cos \theta_W T^3 - g_1 \sin \theta_W \frac{Y}{2} \right] Z_\mu \\
&\quad + \left[g_2 \sin \theta_W T^3 + g_1 \cos \theta_W \frac{Y}{2} \right] A_\mu \\
&= \frac{g_1}{\cos \theta_W} \left[T^3 - \sin^2 \theta_W \left(T^3 + \frac{Y}{2} \right) \right] Z_\mu \\
&\quad + \frac{g_2 g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \left(T^3 + \frac{Y}{2} \right) A_\mu \\
&= \frac{g_1}{\cos \theta_W} [T^3 - \sin^2 \theta_W Q] Z_\mu + \frac{g_2 g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} Q A_\mu
\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

である。ここで (2.3.30), (2.2.13) を用いた。よって結合定数 e は、第2項より

$$e = \frac{g_2 g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \tag{2.3.36}$$

である。このように電磁相互作用の結合定数 e は、2種類の群 $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ の独立なパラメータ g_2, g_1 で表される。

2.4 湯川相互作用と Cabbibo-小林-益川行列

前節で扱った Higgs 機構により、 W^\pm と Z ボソンが質量を持つことが確認された。次にこの節では、フェルミオンが質量を獲得する機構を確認する。

まず簡単のため、フェルミオンの第1世代のみ考えるものとする。前節から、クォーク、レプトンに加え新たに $SU(2)_L$ 2重項である Higgs 場が導入された。するとこの Higgs 場が導入されたことで、標準模型に新たな相互作用が許されることになる。まず、 $SU(2)_L$ 不変性を保つために、 $SU(2)_L$ 2重項である左巻きフェルミオン場、 $SU(2)_L$ 2重項である Higgs 場、そして $SU(2)_L$ 1重項である右巻きフェルミオン場の積の形の相互作用が考えられる。フェルミオン場を ψ_1, ψ_2 , Higgs 場を Φ と書くと、この相互作用は $\bar{\psi}_1 \psi_2 \Phi$ なる形である。また、これらの場の $U(1)_Y$ ゲージ変換性は、

$$\psi_1' = e^{i\theta Y_1/2} \psi_1, \quad \psi_2' = e^{i\theta Y_2/2} \psi_2, \quad \Phi' = e^{i\theta Y_\Phi/2} \Phi \tag{2.4.1}$$

である。ここで θ は $U(1)_Y$ 変換の実パラメータである。新たな相互作用 $\bar{\psi}_1 \psi_2 \Phi$ も $U(1)_Y$ 対称性を持たなければならない。その変換性は

$$(\bar{\psi}_1 \psi_2 \Phi)' \rightarrow e^{i\theta(-Y_1+Y_2+Y_\Phi)/2} \bar{\psi}_1 \psi_2 \Phi \tag{2.4.2}$$

である。つまり、この新たな相互作用 $\bar{\psi}_1 \psi_2 \Phi$ が $U(1)_Y$ 対称となるための条件として

$$-Y_1 + Y_2 + Y_\Phi = 0 \tag{2.4.3}$$

が課せられる。結局、この条件を満たすような相互作用として、次の項が与えられる：

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_u \bar{Q} u_R \tilde{\Phi} - f_d \bar{Q} d_R \Phi - f_e \bar{L} e_R \Phi + h.c. \tag{2.4.4}$$

このような相互作用のことを湯川相互作用 (Yukawa interaction) と呼ぶ。ここで f_u, f_d, f_e はそれぞれ u, d, e^- の湯川結合定数である。また、 $\tilde{\Phi}$ は

$$\tilde{\Phi} = i\sigma_2\Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

と定義される $SU(2)_L$ 2重項であり、 $SU(2)_L$ については Φ と同じ変換性を持つ。実際、 $SU(2)_L$ 変換の下で、

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}' &= i\sigma_2(\Phi^*)' \\ &= i\sigma_2(e^{ig_2\theta_a\sigma_a/2}\Phi)' \\ &= \sigma_2 e^{-ig_2\theta_a(\sigma_a)^*/2} \sigma_2 \tilde{\Phi} \\ &= e^{ig_2\theta_a\sigma_a/2} \tilde{\Phi} \end{aligned}$$

と変換される。途中 Pauli 行列の関係式 $\sigma_2(\sigma_a)^*\sigma_2 = -\sigma_a$ を用いた。

湯川相互作用の存在により電弱対称性の自発的破れに伴ってフェルミオンは質量を獲得する。Higgs 場に真空期待値 (2.3.22) を持たせると、例えば d クォークの湯川相互作用項から

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d &= -f_d(\overline{u}_L \quad \overline{d}_L)e_R \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \text{h.c.} \\ &= -f_d \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{d}_L d_R + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

と d クォークの質量項が与えられる。すなわち d クォークの質量が、湯川結合定数と Higgs の真空期待値の積の形で

$$m_d = f_d \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.4.7)$$

と表される。同様に、 u クォークについても

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u &= -f_u(\overline{u}_L \quad \overline{d}_L)u_R \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{h.c.} \\ &= -f_u \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{u}_L u_R + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

により質量が

$$m_u = f_u \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.4.9)$$

と表される。

ここまではクォークの第1世代だけを考えてきたが、クォークの質量項を第3世代まで含めた形で書き表すことができる：

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\overline{u}_L^i \mathcal{M}_u^{ij} u_R^j - \overline{d}_L^i \mathcal{M}_d^{ij} d_R^j + \text{h.c.} \quad (2.4.10)$$

ここで $i, j = 1, 2, 3$ はクォークの世代であり、 $\mathcal{M}_a^{ij} \equiv f_a^{ij} \frac{v}{\sqrt{2}}$ ($a = u, d$) は質量行列と呼ばれる。この質量行列は一般に非対角成分も含まれるような行列である。これを対角化するために、双ユニタリー (bi-unitary) 変換と呼ばれる操作を行う。質量行列の左右から掛けることで対角な行列を作り

出すようなユニタリ行列のペアを考える。そのようなユニタリ変換行列を、式 (2.4.10) におけるクォーク場を再定義する行列であると見なす。すなわち、

$$\mathcal{U}(u, R)^\dagger \mathcal{M}_u \mathcal{U}(u, L) = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}, \quad (2.4.11)$$

$$\mathcal{U}(d, R)^\dagger \mathcal{M}_d \mathcal{U}(d, L) = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \quad (2.4.12)$$

を満たすように選んできた 3×3 ユニタリ行列によって、クォーク場を次のように再定義する：

$$\begin{aligned} u_L^i &= \mathcal{U}(u, L)^{ij} u_L'^j, & u_R^i &= \mathcal{U}(u, R)^{ij} u_R'^j, \\ d_L^i &= \mathcal{U}(d, L)^{ij} d_L'^j, & d_R^i &= \mathcal{U}(d, R)^{ij} d_R'^j. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

ここで、ユニタリ行列によって変換される前のクォーク場のことを弱固有状態、もしくはカレント固有状態と呼び、変換された後の場を質量固有状態と呼ぶ。そして、Lagrangian (2.2.11) の第3項であるクォークと W_μ^\pm ボソンとの相互作用項

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma^\mu P_L d W_\mu^+ + \text{h.c.} \\ &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}_L' \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

を質量固有状態を用いて書き直すと、

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}_L' \gamma^\mu (\mathcal{U}(u, L)^\dagger \mathcal{U}(d, L)) d_L' W_\mu^+ + \text{h.c.} \quad (2.4.15)$$

$$= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}_L' \gamma^\mu V_{\text{CKM}} d_L' W_\mu^+ + \text{h.c.} \quad (2.4.16)$$

となる。ここで

$$V_{\text{CKM}} \equiv \mathcal{U}(u, L)^\dagger \mathcal{U}(d, L) \quad (2.4.17)$$

であり、Cabbibo-小林-益川行列 (CKM 行列) と呼ばれる。式 (2.4.16)、クォークが荷電ボソン W_μ^\pm と結合することでアップ型からダウン型、もしくはその逆の遷移が生じるような相互作用を表すが、一般に $V_{\text{CKM}} \equiv \mathcal{U}(u, L)^\dagger \mathcal{U}(d, L) \neq \mathbf{1}_3$ であることから、クォークの世代が遷移するような相互作用も表す。このことを踏まえて CKM 行列を具体的な成分で書き下すと、

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (2.4.18)$$

である。

2.5 強い相互作用

標準模型における強い相互作用は、ゲージ対称性 $\text{SU}(3)_C$ により記述される。これを量子色力学 (quantum chromodynamics, QCD) と呼ぶ。まず、クォークを $\text{SU}(3)_C$ 3重項 (triplet)

$$q_f = \begin{pmatrix} q_f^1 \\ q_f^2 \\ q_f^3 \end{pmatrix} \quad (2.5.1)$$

で表す。ここで添字 f はクォークのフレーバー $f = 1, 2, \dots, 6 = u, d, s, c, b, t$ である。また上付き添字 $1, 2, 3$ はクォークが持つ3つの自由度であり、カラー (color) と呼ぶ。するとゲージ対称性 $SU(3)_C$ を持つ QCD Lagrangian は次のように書かれる：

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f^i (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f^i - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.5.2)$$

ここで

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_3 \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a, \quad (2.5.3)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_3 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.5.4)$$

であり、 f^{abc} は $SU(3)_C$ の構造定数、 g_3 は $SU(3)_C$ の結合定数、そして無質量ゲージ場 G_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) のことをグルーオン (gluon) と呼ぶ。

QCD の結合定数 g_3 を定数として導入したが、量子効果を考慮すると値が変化する事が分かる。 g_3 は考えるエネルギースケールに依存して変化し、このような結合定数を有効結合定数 (effective coupling constant)、もしくは走る結合定数 (running coupling constant) と呼ぶ。QCD の有効結合定数は次のように与えられる*1：

$$\alpha_s(\mu^2) \equiv \frac{g_3^2(\mu^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{b_0 \ln \mu^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2}, \quad (2.5.5)$$

ここで μ はエネルギースケールであり、

$$b_0 = 11 - \frac{2N_q}{3}, \quad (2.5.6)$$

N_q はクォークの種類の数*2、そして Λ_{QCD} は QCD スケールと呼ばれ、 α_s が発散するエネルギースケールを表しており、低エネルギーにおける QCD の典型的なスケールとしてよく用いられる。 Λ_{QCD} の大きさは定義の仕方にも依るが、おおよそ 200 ~ 300 MeV である。

$b_0 > 0$ 、つまり $N_q \leq 16$ のとき、 $\alpha_s(\mu^2)$ はエネルギースケールに関し単調減少であることが分かる。実際、標準模型では $N_q = 12$ であるから α_s は単調減少である。このことは実験による α_s の測定 (図 2.1) からも確認される [10]。

このように高エネルギー領域では結合定数 α_s の値が小さくなる。定性的には短距離になるほど相互作用が弱まり、自由粒子のように振る舞うようになるとも言える。この性質を漸近的自由性 (asymptotic freedom) と呼ぶ。この漸近的自由性によって、高エネルギーにおける QCD の摂動計算が精度良く行える。一方、低エネルギー領域においては α_s が 1 に近づく、もしくは 1 を超えて発散してしまい QCD の振る舞いを摂動計算で追うことができなくなる。定性的には長距離になるほど相互作用が強まり、粒子同士を無限遠に引き離せないとも言える。このようにカラー電荷を持った粒子が 1 粒子状態で観測されない現象は、カラーの閉じ込め (color confinement) と呼ばれ、その証明は標準模型の未解決問題の内のひとつである。

クォークはカラー電荷を持った状態で観測されず、他のクォークとカラー 1 重項なる結合状態を作ることで観測される。このような何個かのクォークの非摂動論的な結合状態からなる複合粒子は

*1 便利のため電磁気における微細構造定数 $\alpha = e^2/4\pi$ に形を合わせている。

*2 クォークのカイラリティ (右巻き・左巻き) を別々に数えることに注意。

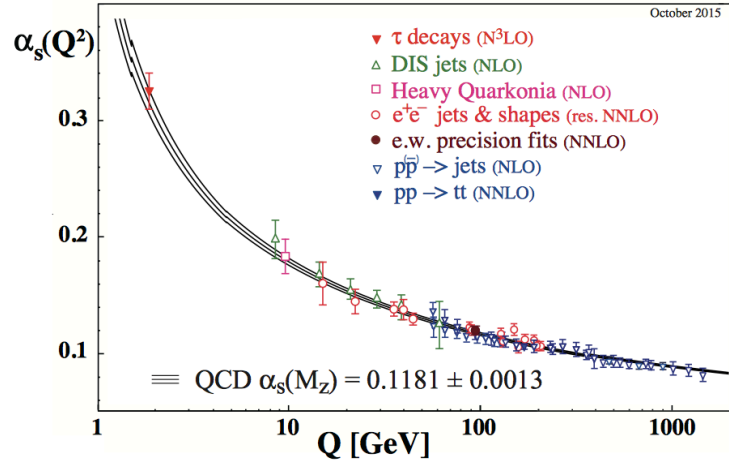


図 2.1 有効結合定数 $\alpha_s(Q^2)$ のエネルギースケール依存性 [10]

ハドロン (hadron) と呼ばれ, 特に 3 個のクォークからなる複合粒子はバリオン (baryon), クォークと反クォークからなる複合粒子は中間子 (meson, メソン) と呼ばれる. そしてバリオンや中間子は確かにカラー 1 重項を構成していることが分かる. 実際, $SU(3)_C$ ゲージ変換

$$q_f^i \rightarrow q_f^{i'} = U^i_j q_f^j \quad (i, j = 1, 2, 3 = R, G, B) \quad (2.5.7)$$

の下で, バリオン

$$B_{ff'f''} \sim \epsilon_{ijk} q_f^i q_{f'}^j q_{f''}^k \quad (2.5.8)$$

と中間子

$$M_f^{f'} \sim q_f^i \bar{q}^{i'f'} \quad (2.5.9)$$

は不変である. ここで ϵ_{ijk} は 3 階完全反対称テンソルである.

例としてスピン 1/2 バリオン 8 重項 (図 2.2), 擬スカラー中間子 8 重項 (図 2.3) を示した. 8 重項とは, フレーバー $SU(3)$ 対称性の 8 次元表現に属するという意味で, フレーバー $SU(3)$ 対称性とは大局的ユニタリー変換

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = U_f \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (2.5.10)$$

の下での対称性のことである.

2.6 カイラル対称性の破れ

QCD Lagrangian (2.5.2) のうち, u, d クォークの項

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q &= \sum_{i=1}^2 \bar{q}^i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) q_i \\ &= \sum_{i=1}^2 [\bar{q}_L^i i\gamma^\mu D_\mu q_{iL} + \bar{q}_R^i i\gamma^\mu D_\mu q_{iR} - m_i (\bar{q}_L^i q_{iR} + \bar{q}_R^i q_{iL})] \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

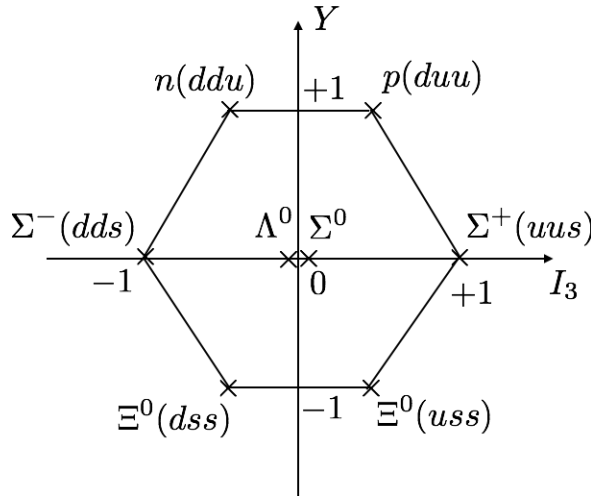


図 2.2 バリオン 8 重項

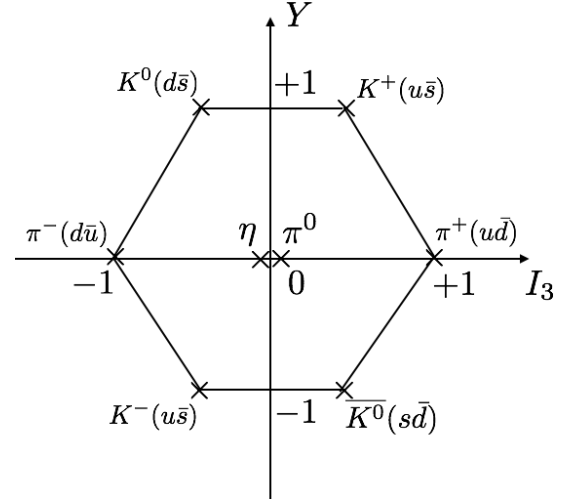


図 2.3 中間子 8 重項

だけについて考える. ここで $i = 1, 2 = u, d$ はフレーバー添字であり, カラー添字は省略した. u クォークと d クォークの質量 m_u, m_d は QCD スケール Λ_{QCD} に比べ十分小さい. そこで, 極限

$$\frac{m_i}{\Lambda_{\text{QCD}}} \rightarrow 0, \quad \text{もしくは} \quad m_i \rightarrow 0 \quad (i = u, d) \quad (2.6.2)$$

を考える. これをカイラル極限 (chiral limit) と呼ぶ. この極限の下で Lagrangian (2.6.1) は

$$\mathcal{L}_q = \sum_{i=1}^2 [\bar{q}_L^i i \gamma^\mu D_\mu q_L^i + \bar{q}_R^i i \gamma^\mu D_\mu q_R^i] \quad (2.6.3)$$

となり, 右巻きと左巻きの混合が無くなる. この Lagrangian には $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_A$ 対称性がある. $SU(2)_{L,R}$ 変換性は,

$$q_{L,R}^i \rightarrow \left[\exp \left(i \theta_{L,R}^a \frac{\sigma_a}{2} \right) \right]_j^i q_{L,R}^j \quad (a = 1, 2, 3) \quad (2.6.4)$$

であり, $U(1)_A$ の変換性は,

$$q_{L,R}^i \rightarrow \exp(i \theta_A \gamma_5) q_{L,R}^i \quad (2.6.5)$$

である. ここで $\theta_{L,R}^a, \theta_A$ は変換の実パラメータ, σ_a は Pauli 行列である. この対称性をカイラル対称性 (chiral symmetry) と呼ぶ.

低エネルギーでの強い相互作用の非摂動的効果により, 演算子 $\bar{q}^i q_i$ が真空に期待値を持つと考えられる:

$$\langle 0 | \bar{q}^i q_i | 0 \rangle \neq 0. \quad (2.6.6)$$

このとき, カイラル対称性は自発的に破れる. 実際,

$$[i Q_A, \bar{q}^i q_i] = 2 \bar{q} i \gamma_5 q, \quad (2.6.7)$$

$$[i(Q_L^a - Q_R^a), \bar{q}^i q_i] = -2 \bar{q} i \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} q, \quad (2.6.8)$$

$$[i(Q_L^a + Q_R^a), \bar{q}^i q_i] = 0 \quad (2.6.9)$$

より Q_A や $Q_L - Q_R$ を生成子とする変換は対称性を破る。ここで

$$Q_L^a = \int d^3 \mathbf{x} q_L^\dagger \frac{\sigma_a}{2} \frac{1 - \gamma_5}{2} q_L, \quad (2.6.10)$$

$$Q_R^a = \int d^3 \mathbf{x} q_R^\dagger \frac{\sigma_a}{2} \frac{1 + \gamma_5}{2} q_R, \quad (2.6.11)$$

$$Q_A = \int d^3 \mathbf{x} q_{L,R}^\dagger \gamma_5 q_{L,R} \quad (2.6.12)$$

はそれぞれ $SU(2)_L$, $SU(2)_R$, $U(1)_A$ の保存電荷である。すなわちカイラル対称性は $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V$ とアイソスピン $SU(2)_V$ 対称性に破れる。このとき Goldstone の定理より, NG ボソンが次の4種類存在することが分かる。 $U(1)_A$ の破れから

$$\langle 0 | [iQ_A, \bar{q}^i \gamma_5 q] | 0 \rangle = -2 \langle 0 | \bar{q}^i q_i | 0 \rangle \neq 0 \quad (2.6.13)$$

であり, $\bar{q}^i \gamma_5 q$ に結合するアイソスピン1重項の NG ボソンを η と呼ぶ。 η は図 2.3 の原点にあたる。同様に,

$$\langle 0 | [i(Q_L^a - Q_R^a), \bar{q}^i \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} q] | 0 \rangle = \frac{1}{2} \delta^{ab} \langle 0 | \bar{q}^i q_i | 0 \rangle \quad (2.6.14)$$

であり, $\bar{q}^i \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} q$ に結合するアイソスピン3重項の NG ボソンを π^+ , π^0 , π^- と呼ぶ。これらは図 2.3 の I_3 軸上における3重項にあたる。

第3章

重クォーク対称性

QCDにはカイラル対称性と呼ばれる軽いクォーク (u, d, s クォーク) についての対称性があった。一方で、重いクォーク (b, c クォーク) についても低エネルギー領域における対称性が存在する。本章ではこのような重いクォークに関する対称性について議論する。

3.1 重クォークが持つ特徴

ハドロンの構成要素であり、QCD スケール $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 300\text{MeV}$ よりも十分大きな質量を持つクォークである c, b クォークのことを重クォーク (heavy quark) と呼ぶ。同じく質量の大きいトップクォーク ($M_t \sim 175\text{GeV}$) は寿命が短く、ハドロンを構成する前に崩壊してしまうため、以後重クォークと呼ぶときにトップクォークは含めないものとする。更に、重クォークの質量が Λ_{QCD} よりも十分大きいという状況をよりあからさまなものとする極限

$$\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{M_Q} \rightarrow 0, \quad \text{もしくは} \quad M_Q \rightarrow \infty \quad (3.1.1)$$

のことを、重クォーク極限 (heavy quark limit) と呼ぶ。ここで M_Q は重クォークの質量を表し、添字は重クォークのフレーバー $Q = b, c$ を表す。以下ではこの重クォーク極限の下で、重クォークが持つ特徴を調べる。

まず、重クォークが持つ4元運動量 p_Q^μ について考える。もし重クォークが自由粒子であったならば、on-shell 条件、 $p_Q^2 = M_Q^2$ を満たす。このとき重クォークの4元速度 v^μ を用いて $p_Q^\mu = M_Q v^\mu$ と表すこともできる。この2式より、速度 v^μ が満たすべき条件は、

$$v^\mu v_\mu = 1 \quad (3.1.2)$$

であり、これも on-shell 条件と呼ぶ。

しかし実際には、重クォークは自由粒子として観測されず、カラー $\text{SU}(3)_C$ 1重項となるように別のクォークとの束縛状態として観測される。この束縛状態の下で重クォークはグルーオンと相互作用するので off-shell $p_Q^2 \neq M_Q^2$ である。しかしグルーオンから受ける運動量の変化分は高々 $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ 程度であり、重クォークの質量 M_Q に比べて十分小さい。ゆえに、重クォークは「ほとんど on-shell」にあると考えられる。このようなハドロンの中の重クォークが持つ運動量 p_Q^μ を、on-shell 条件 $v^\mu v_\mu = 1$ を満たす4元速度 v^μ を用いて以下のように定義する：

$$p_Q^\mu = M_Q v^\mu + k^\mu \quad (3.1.3)$$

ここで k^μ は residual momentum (on-shell からのズレ, 余剰運動量) と呼ばれ, $k^\mu \sim \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ である. このように運動量を定義すると, 重クォーク極限の下で重クォークがほとんど on-shell であるという状況を再現できている. 実際,

$$\begin{aligned} p_Q^2 &= (M_Q v^\mu + k^\mu)(M_Q v_\mu + k_\mu) \\ &= M_Q^2 + 2M_Q v \cdot k + k^2 \\ &= M_Q^2 \left(1 + \frac{2v \cdot k}{M_Q} + \frac{k^2}{M_Q^2} \right) \\ &\rightarrow M_Q^2 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

より, 重クォーク極限の下では on-shell 条件が満たされる. residual momentum k^μ は, 重クォークが周囲のグルーオンと相互作用することによる重クォークの運動量の on-shell からのずれ分を表している.

以上の設定の下, 重クォークは重クォーク極限において次の3つの特徴を持つ.

1つ目の特徴は velocity superselection rule と呼ばれる速度についての特徴である. 重クォークがグルーオンと相互作用をすることで, 運動量 p , 速度 v , そして residual momentum k がそれぞれ p', v', k' に変わるとする. グルーオンが重クォークに与える運動量の変化分は高々 $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ 程度であり,

$$p'_\mu - p_\mu = M_Q(v'_\mu - v_\mu) + k'_\mu - k_\mu \quad (3.1.5)$$

と表される. これにより速度の変化分は,

$$v'_\mu - v_\mu = \frac{p'_\mu - p_\mu}{M_Q} + \frac{k'_\mu - k_\mu}{M_Q} \quad (3.1.6)$$

となる. するとこの右辺のオーダーは $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/M_Q)$ 程度であるから, 重クォーク極限 $\Lambda_{\text{QCD}}/M_Q \rightarrow 0$ の下で

$$v'_\mu = v_\mu, \quad (3.1.7)$$

すなわち重クォークの速度は不変である. この事実は velocity superselection rule と呼ばれ, 速度の異なる重クォークは別の粒子として扱われることとなる.

2つ目の特徴は, スピンの異なる状態は別の粒子としてみなされる特徴である. QCD Lagrangian (2.5.2) の共変微分 (2.5.3) から, 重クォークがグルーオンと相互作用することが分かる. この重クォークとグルーオンとの結合を, on-shell 平面波解 (4成分スピノール平面波解) $u(\mathbf{p}, s)e^{-ipx}$ の4成分スピノール $u(\mathbf{p}, s)$ を用いて書くと,

$$\begin{aligned} &\bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} u(\mathbf{p}, s) \\ &= \frac{1}{2M_Q} \bar{u}(\mathbf{p}', s') [(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu] \frac{\lambda^a}{2} u(\mathbf{p}, s) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

である. ここで, Gordon 恒等式を用いた. すると, 括弧内の第1項は $\mathcal{O}(M_Q)$, 第2項の $(p' - p)_\nu$ は $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ であるから, 重クォーク極限 $\Lambda_{\text{QCD}}/M_Q \rightarrow 0$ を取ると第2項は無視される. 第2項の因子 $\sigma^{\mu\nu}$ にはスピンを変える効果があるが, これが落ちるということは, 重クォークのスピンは重クォーク極限の下で変わらない事を意味する. すなわち重クォークのスピンは不変である.

最後に3つ目の特徴は、重クォークのフレーバーの区別が無いという特徴である。 $M_b \neq M_c$ であるから Λ_{QCD}/M_Q も異なる値を取る。その差は

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{M_c} - \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{M_b} &= \frac{M_b - M_c}{M_b M_c} \Lambda_{\text{QCD}} \\ &= \frac{M_b^2 - M_c^2}{2M_b M_c} \underbrace{\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{(M_b + M_c)/2}}_{\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/M_Q)} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

となり、 $M_b \neq M_c$ であっても $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ の因子を含むため、重クォーク極限でゼロとなる。よって重クォーク極限の下では重クォークのフレーバーの区別が無くなる事が分かった。

以上まとめると、重クォークは相互作用を受けていても、質量 M_Q が大きいために速度、スピンは変わらず、その状況は b, c どちらのフレーバーかにも依らない事が分かった。次の節では、このような重クォークの性質をうまく記述できるような有効 Lagrangian を構築する。

3.2 重クォークの有効 Lagrangian

QCD Lagrangian (2.5.2) より、重クォーク Q の Lagrangian は

$$\mathcal{L}_Q = \sum_{i=b,c} \left[\bar{Q}^i i \not{D} Q_i - M_i \bar{Q}^i Q_i \right] \quad (3.2.1)$$

である。この Lagrangian を Λ_{QCD}/M_Q で冪展開する。

まず、前節での議論から重クォークはほとんど on-shell と考えられることから、次のような平面波の形で有効重クォーク場を導入する。正粒子の重クォークについて

$$\begin{aligned} Q^{(+)}(x) &= \sum_{\substack{v \\ (v_0 \geq 0)}} Q_v^{(+)}(x) \\ &\equiv \sum_{\substack{v \\ (v_0 \geq 0)}} e^{-iM_Q v \cdot x} \left[h_v^{(+)}(x) + \Omega_v^{(+)}(x) \right], \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

反粒子の重クォークについて

$$\begin{aligned} Q^{(-)}(x) &= \sum_{\substack{v \\ (v_0 \geq 0)}} Q_v^{(-)}(x) \\ &\equiv \sum_{\substack{v \\ (v_0 \geq 0)}} e^{iM_Q v \cdot x} \left[h_v^{(-)}(x) + \Omega_v^{(-)}(x) \right], \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

ここで $h_v^{(\pm)}$ は重クォークの有効場であり、 $\Omega_v^{(\pm)}$ は重クォーク極限を取ると無視される $\mathcal{O}(1/M_Q)$ の場である。そして我々は、自明な on-shell の重クォークの運動の効果を除き、相対論的な有効場 $h_v^{(\pm)}$ についての力学を見たい。この動機は、重クォークの運動量の $p_Q^\mu = M_Q v^\mu + k^\mu$ という定義にも現れている。そして我々が今後着目する相対論的な QCD は k^μ が表すことになる。そこで上で与えた $Q^{(\pm)}(x)$ を、式 (3.2.1) から与えられる運動方程式

$$(i\not{D} - M_Q)Q^{(\pm)}(x) = 0 \quad (3.2.4)$$

へ代入すると,

$$\sum_v e^{\mp i M_Q v \cdot x} \left[\pm M_Q (\not{v} \mp 1) h_v^{(\pm)}(x) + i \not{D} h_v^{(\pm)}(x) \right] + \mathcal{O}(1/M_Q) = 0 \quad (3.2.5)$$

となる. この式から, $h_v^{(\pm)}$ についての運動方程式 $i \not{D} h_v^{(\pm)}(x) = 0$ を与えるために以下の条件が課せられる:

$$(\not{v} \mp 1) h_v^{(\pm)}(x) = 0, \quad (3.2.6)$$

もしくはこれを変形した

$$\frac{1 \pm \not{v}}{2} h_v^{(\pm)} = h_v^{(\pm)}. \quad (3.2.7)$$

ここで, 左辺に現れた因子 $(1 \pm \not{v})/2$ は, 以下で定義するように射影演算子となっている:

$$P_{\pm} \equiv \frac{1 \pm \not{v}}{2}. \quad (3.2.8)$$

実際これは, 射影演算子としての性質を満たす:

$$\begin{aligned} P_+ + P_- &= \mathbf{1}_4, \\ P_+ P_- &= P_- P_+ = 0, \\ (P_{\pm})^2 &= P_{\pm}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

また, 静止系 $v = v_r = (1, \mathbf{0})$ においては

$$\begin{aligned} \not{v} &= \gamma^{\mu} v_{\mu} \\ &= \gamma^0 v_0 = \gamma^0 \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

であるから, 具体的に

$$P_+ = \frac{\mathbf{1}_4 + \gamma^0}{2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.11)$$

$$P_- = \frac{\mathbf{1}_4 - \gamma^0}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.12)$$

とも表される. 従って条件 $P_{\pm} h_v^{(\pm)} = h_v^{(\pm)}$ から, $h_v^{(+)}$ の上2成分が正粒子を表し, $h_v^{(-)}$ の下2成分が反粒子を表す慣性系に常に移る事ができると分かった.

このような制約が課された有効重クォーク場を用いて有効 Lagrangian を次のように導くことが

できる. 式 (3.2.1) に上で与えた $Q(x) = Q^+(x) + Q^-(x)$ を代入する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}} &= \bar{Q}i\mathcal{D}Q - M_Q\bar{Q}Q \\
&= \sum_{(v_0 \geq 0)} \sum_{(v'_0 \geq 0)} \left[\left(e^{iM_Q v x} \bar{h}_v^{(+)} + e^{-iM_Q v x} \bar{h}_v^{(-)} \right) i\mathcal{D} \left(e^{-iM_Q v' x} h_{v'}^{(+)} + e^{iM_Q v' x} h_{v'}^{(-)} \right) \right. \\
&\quad \left. - M_Q \left(e^{iM_Q v x} \bar{h}_v^{(+)} + e^{-iM_Q v x} \bar{h}_v^{(-)} \right) \left(e^{-iM_Q v' x} h_{v'}^{(+)} + e^{iM_Q v' x} h_{v'}^{(-)} \right) \right] + \mathcal{O}(1/M_Q) \\
&= \sum_v \sum_{v'} \left[\left(e^{iM_Q v x} \bar{h}_v^{(+)} + e^{-iM_Q v x} \bar{h}_v^{(-)} \right) \left(e^{-iM_Q v' x} i\mathcal{D}h_{v'}^{(+)} + e^{iM_Q v' x} i\mathcal{D}h_{v'}^{(-)} \right) \right. \\
&\quad + \left(e^{iM_Q v x} \bar{h}_v^{(+)} + e^{-iM_Q v x} \bar{h}_v^{(-)} \right) \left(e^{-iM_Q v' x} M_Q \psi' h_{v'}^{(+)} - e^{iM_Q v' x} M_Q \psi' h_{v'}^{(-)} \right) \\
&\quad \left. - M_Q \left(e^{iM_Q v x} \bar{h}_v^{(+)} + e^{-iM_Q v x} \bar{h}_v^{(-)} \right) \left(e^{-iM_Q v' x} h_{v'}^{(+)} + e^{iM_Q v' x} h_{v'}^{(-)} \right) \right] + \mathcal{O}(1/M_Q) \\
&= \sum_v \sum_{v'} \left[e^{-iM_Q(v'-v)x} \bar{h}_v^{(+)} (i\mathcal{D} + M_Q \psi' - M_Q) h_{v'}^{(+)} \right. \\
&\quad + e^{iM_Q(v'-v)x} \bar{h}_v^{(-)} (i\mathcal{D} - M_Q \psi' - M_Q) h_{v'}^{(-)} \\
&\quad + e^{iM_Q(v'+v)x} \bar{h}_v^{(+)} (i\mathcal{D} - M_Q \psi' - M_Q) h_{v'}^{(-)} \\
&\quad \left. + e^{-iM_Q(v'+v)x} \bar{h}_v^{(-)} (i\mathcal{D} + M_Q \psi' - M_Q) h_{v'}^{(+)} \right] + \mathcal{O}(1/M_Q) \tag{3.2.13}
\end{aligned}$$

ここで制約 $(\psi \mp 1)h_v^{(\pm)}(x) = 0$ より,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}} &= \sum_v \sum_{v'} \left[e^{-iM_Q(v'-v)x} \bar{h}_v^{(+)} i\mathcal{D}h_{v'}^{(+)} + e^{iM_Q(v'-v)x} \bar{h}_v^{(-)} i\mathcal{D}h_{v'}^{(-)} \right. \\
&\quad \left. + e^{iM_Q(v'+v)x} \bar{h}_v^{(+)} i\mathcal{D}h_{v'}^{(-)} + e^{-iM_Q(v'+v)x} \bar{h}_v^{(-)} i\mathcal{D}h_{v'}^{(+)} \right] + \mathcal{O}(1/M_Q) \tag{3.2.14}
\end{aligned}$$

となる. さらに, 作用積分 $S_{\text{eff}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}$ として考えると, 因子 $e^{\pm iM_Q(v' \pm v)x}$ (複合任意) の位相がゼロの寄与だけが残るから,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}} &= \sum_{(v_0 \geq 0)} \left[\bar{h}_v^{(+)} i\mathcal{D}h_v^{(+)} + \bar{h}_v^{(-)} i\mathcal{D}h_v^{(-)} \right. \\
&\quad \left. + \bar{h}_v^{(+)} i\mathcal{D}h_{-v}^{(-)} + \bar{h}_v^{(-)} i\mathcal{D}h_{-v}^{(+)} \right] + \mathcal{O}(1/M_Q). \tag{3.2.15}
\end{aligned}$$

速度の総和を $v_0 \geq 0$ としているから $h_{-v}^{(\pm)} = 0$ であり, 上式の2行目が消える. これは, 重クォークの対生成が起こらない事に対応し, 以後このような対生成を起こし得る高エネルギーのグルーオンは考えない. すると,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}} &= \sum_v \left[\bar{h}_v^{(+)} i\mathcal{D}h_v^{(+)} + \bar{h}_v^{(-)} i\mathcal{D}h_v^{(-)} \right] + \mathcal{O}(1/M_Q) \\
&= \sum_v \left[\bar{h}_v^{(+)} (v \cdot iD) h_v^{(+)} - \bar{h}_v^{(-)} (v \cdot iD) h_v^{(-)} \right] + \mathcal{O}(1/M_Q) \tag{3.2.16}
\end{aligned}$$

となり, $M_Q \rightarrow \infty$ 極限での有効 Lagrangian が求まった. この有効 Lagrangian には γ 行列と M_Q に依存した項が含まれていない. よって重クォーク極限を取ると Lagrangian にスピン・フレーバー対称性が存在する事が分かる. 以下では具体的にスピン・フレーバー変換の形を与え, 有効 Lagrangian が実際にスピン・フレーバー対称性を持つ事を確認する.

まず、スピン変換の $SU(2)_{\text{spin}}$ 生成子を与える：

$$S_a = \frac{i}{4} \sum_{b,c} \epsilon_{abc} [\not{e}_b, \not{e}_c] \quad (a, b, c = 1, 2, 3), \quad (3.2.17)$$

ここで

$$e_a^\mu e_{b\mu} = -\delta_{ab} \quad (3.2.18)$$

$$v_\mu e_a^\mu = 0 \quad (3.2.19)$$

であり、静止系 $v_\mu = (1, 0, 0, 0)$ では

$$\begin{aligned} e_1^\mu &= (0, 1, 0, 0) = \delta_1^\mu \\ e_2^\mu &= (0, 0, 1, 0) = \delta_2^\mu \\ e_3^\mu &= (0, 0, 0, 1) = \delta_3^\mu \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

を取るものとする。また、この静止系の下で生成子は、

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{i}{4} \sum_{b,c} \epsilon_{abc} e_b^\mu e_c^\nu [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ &= \frac{i}{4} \sum_{b,c} \epsilon_{abc} e_b^\mu e_c^\nu \left(\frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{b,c} \epsilon_{abc} \sigma_{bc} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{b,c} \epsilon_{abc} \sum_{d=1}^3 \epsilon_{bcd} \begin{pmatrix} \tau_d & 0 \\ 0 & \tau_d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{c,d} (\delta_{cc} \delta_{ad} - \delta_{cd} \delta_{ac}) \begin{pmatrix} \tau_d & 0 \\ 0 & \tau_d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_d (3\delta_{ad} - \delta_{ad}) \begin{pmatrix} \tau_d & 0 \\ 0 & \tau_d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau_a & 0 \\ 0 & \tau_a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

として簡単に書かれる。すると、 $SU(2)_{\text{spin}}$ 変換

$$h_v^{(Q)} \rightarrow e^{i\epsilon_a S_a} h_v^{(Q)} \quad (3.2.22)$$

に対して Lagrangian の主要項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &\rightarrow \sum_v \left[\bar{h}_v^{(+)} e^{-i\epsilon_a S_a} (v \cdot iD) e^{i\epsilon_b S_b} h_v^{(+)} - \bar{h}_v^{(-)} e^{-i\epsilon_a S_a} (v \cdot iD) e^{-i\epsilon_b S_b} h_v^{(-)} \right] \\ &= \sum_v \left[\bar{h}_v^{(+)} (v \cdot iD) h_v^{(+)} - \bar{h}_v^{(-)} (v \cdot iD) h_v^{(-)} \right] \end{aligned}$$

と不変であり、確かに $SU(2)_{\text{spin}}$ 対称性を持つ事が分かる。途中、 v_μ と S_a が可換である事を用いた ($[\not{v}, S_a] = 0$)。

次にフレーバー変換の $SU(2)_f$ 生成子を Pauli 行列 $\tau^A (A = 1, 2, 3)$ を用いて与える. すると $SU(2)_f$ 変換は

$$\begin{pmatrix} h_v^{(c)} \\ h_v^{(b)} \end{pmatrix} \rightarrow e^{i\varphi_A \frac{\tau^A}{2}} \begin{pmatrix} h_v^{(c)} \\ h_v^{(b)} \end{pmatrix} \quad (3.2.23)$$

と与えられ, この変換のもとで \mathcal{L}_{eff} は確かに不変である.

また, 以上2つの変換は互いに独立であるから, 実際は 15 個の生成子

$$\left(\mathbf{1} \otimes S_a, \frac{\tau^A}{2} \otimes \mathbf{1}, \frac{\tau^A}{2} \otimes S_a \right) \quad (A = 1, 2, 3, a = 1, 2, 3) \quad (3.2.24)$$

からなる $SU(4)$ スピン・フレーバー変換の下で \mathcal{L}_{eff} が不変であるともいえる.

3.3 重クォークの状態の定義

次節にて具体的な崩壊過程 $\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e$ の散乱振幅を計算する. そのために散乱振幅を計算する必要があるが, その際に用いる状態として通常の QCD のクォーク状態とは別に, 重クォーク有効理論 (Heavy Quark Effective Theory, HQET) の状態を与える. まず, 重クォーク有効 Lagrangian (3.2.16) より正準反交換関係は

$$\left\{ h_v^\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_{v'}^\beta(\mathbf{y}, t) \right\} = i \delta_{vv'} \left(\frac{1 + \not{v}}{2} \right)^{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.3.1)$$

である. ここで共役運動量 $\pi_v(x)$ は

$$\pi_v(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\delta(\partial_0 h_v)} = i \bar{h}_v v^0 \quad (3.3.2)$$

であり, α, β はスピノル添字, そして正粒子だけを考えるため $h_v^{(+)}$ の (+) 添字は省略した. この正準反交換関係は, 有効場の展開

$$h_v(x) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 v^0} \sum_{s=\pm} b_v(\mathbf{k}, s) u_v(\mathbf{k}, s) e^{-ikx} \quad (3.3.3)$$

を用いると

$$\left\{ b_v(\mathbf{k}, s), b_{v'}^\dagger(\mathbf{k}', s') \right\} = (2\pi)^3 2v^0 \delta_{ss'} \delta_{vv'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3.3.4)$$

と書き直される. 一方, 通常の QCD のクォークの反交換関係は

$$\left\{ b(\mathbf{p}, s), b^\dagger(\mathbf{p}', s') \right\} = (2\pi)^3 2p^0 \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3.3.5)$$

であり規格化が重クォーク有効理論の場合と異なる. よって 1 粒子重クォーク有効理論の状態

$$|\mathbf{k}, s\rangle_v = h_v^\dagger(\mathbf{k}, s) |0\rangle \quad (3.3.6)$$

の質量次元は $-3/2$ であり, QCD のクォークの状態の質量次元 -1 とは異なる.

そして同じ規格化を, ハドロン状態についても採用する. まず, 相対論的な QCD によって表されたハドロン状態の規格化は,

$$\langle H(p') | H(p) \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (3.3.7)$$

と与えられる。ここで $E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_H^2}$ であり、 m_H はハドロンの質量である。この規格化における状態が持つ質量次元は -1 である。

一方、重クォーク有効理論において着目している運動量は、 $p^\mu = M_Q v^\mu + k^\mu$ から自明な運動量 $M_Q v^\mu$ を除いた k^μ である。そこで、速度 v, v' によってラベルされたハドロンの状態の規格化を次のように与える：

$$\langle H(v', k') | H(v, k) \rangle = 2v^0 \delta_{vv'} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.3.8)$$

この規格化における状態が持つ質量次元は $-3/2$ であり、QCD のハドロンの状態の場合とは異なる点に注意する。このように状態を定義すると、重クォーク極限にふさわしい。

ただし、散乱振幅を計算する際の始状態・終状態のハドロンは on-shell であるから、residual momentum 依存性は考えずに $|H(v)\rangle \equiv |H(v, k=0)\rangle$ とする。

最後に、これら2種類の状態の関係式を与える。QCD のハドロンの状態と重クォーク有効理論の状態の質量次元が $1/2$ だけ異なることと、重クォーク極限では $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/M_Q)$ の項が無視されていることから、

$$|H(p)\rangle = \sqrt{m_H} (|H(v)\rangle + \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/M_Q)) \quad (3.3.9)$$

と与えられる。

3.4 $\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e$ の形状因子

この節では重クォーク対称性を具体的な過程へ応用する。その例として、 b クォークを含む B 中間子が、 c クォークを含む $D^{(*)}$ 中間子に崩壊する過程 $\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e$ を見る。

3.4.1 微分崩壊比

b クォークの c クォークへの弱い相互作用による崩壊は、Hamiltonian

$$H_W = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} (\bar{c} \gamma^\mu P_L b) (\bar{e} \gamma_\mu P_L \nu_e) \quad (3.4.1)$$

によって表現される。ここで $G_F = \sqrt{2} g_2^2 / 8M_W^2$ はフェルミ定数である。また、クォーク弱カレント $\bar{c} \gamma_\mu P_L b$ はさらにベクトルカレント $V^\mu = \bar{c} \gamma^\mu b$ と軸性ベクトルカレント $A^\mu = \bar{c} \gamma^\mu \gamma_5 b$ から構成されている。例えば、semi-leptonic decay $\bar{B} \rightarrow D^{(*)} e \bar{\nu}_e$ には以下のような量に関わる：

$$\begin{aligned} \langle D(p') | V^\mu | \bar{B}(p) \rangle &= f_+(q^2) (p + p')^\mu + f_-(q^2) (p - p')^\mu, \\ \langle D^*(p', \epsilon) | V^\mu | \bar{B}(p) \rangle &= g(q^2) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\nu^* (p + p')_\rho (p - p')_\sigma, \\ \langle D^*(p', \epsilon) | A^\mu | \bar{B}(p) \rangle &= -if(q^2) \epsilon^{*\mu} \\ &\quad - i\epsilon^* \cdot p [a_+(q^2) (p + p')^\mu + a_-(q^2) (p - p')^\mu]. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

ここで $|\bar{B}(p)\rangle, |D(p')\rangle, |D^*(p', \epsilon)\rangle$ は QCD のハドロンの状態である。重クォークをひとつ含む擬スカラー中間子 P とベクトル中間子 P^* のパリティ・時間反転変換性は

$$\begin{aligned} \mathcal{P} |P(p)\rangle &= -|P(p_P)\rangle, & \mathcal{T} |P(p)\rangle &= -|P(p_T)\rangle, \\ \mathcal{P} |P^*(p, \epsilon)\rangle &= |P^*(p_P, \epsilon_P)\rangle, & \mathcal{T} |P^*(p, \epsilon)\rangle &= |P^*(p_T, \epsilon_T)\rangle, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

と与えられる。ここで、 $p = (p^0, \mathbf{p})$ 、偏極ベクトル $\epsilon = (\epsilon^0, \boldsymbol{\epsilon})$ 、そして $p_P = p_T = (p^0, -\mathbf{p})$ 、 $\epsilon_P = \epsilon_T = (\epsilon^0, -\boldsymbol{\epsilon})$ である。

次に、semi-leptonic decay $\bar{B} \rightarrow D^{(*)} e \bar{\nu}_e$ の遷移振幅が式 (3.4.2) の形で書かれることを示す。QCD は実験的にパリティ・時間反転対称性を破らない。従って QCD のハドロンの状態によるカレント V^μ や A^μ の遷移振幅を、可能な力学変数を用いて (3.4.2) の左辺と同じパリティ・時間反転変換性を持つように書き直すことができる。用いる力学変数は、始・終状態の運動量 p^μ, p'^μ や完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ である。さらに、終状態がベクトル中間子 $|D^*(p', \epsilon)\rangle$ であるときには偏極ベクトル ϵ^μ に比例することも用いる。また、各項に掛かる関数は Lorentz 不変な量を用いて書かれ、形状因子 (form factor) と呼ばれる。そして形状因子の変数として運動量遷移 $q^2 = (p - p')^2$ を用いると便利である。 $(p^2$ や p'^2 も Lorentz 不変な量であるが、on-shell より既に定数 $p^2 = m_B^2$ 、 $p'^2 = m_{D^{(*)}}^2$ として固定されている)。このような形状因子は、解析的には解くことのできない QCD の非摂動的な効果が含まれている。また、 $\langle D(p') | A^\mu | \bar{B}(p) \rangle$ なる項は p^μ, p'^μ だけではパリティ奇な量を作れないために現れない。

この遷移振幅 (3.4.2) を用いて微分崩壊比を計算する。以下の計算では電子の質量は無視する。

まず、 $\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e$ の不変崩壊遷移振幅は、

$$\langle D e \bar{\nu}_e | H_W | \bar{B} \rangle = \mathcal{M}(\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e) = \sqrt{2} G_F V_{cb} f_+ (p + p')^\mu \bar{u}(p_e) \gamma_\mu P_L v(p_{\nu_e}). \quad (3.4.4)$$

となる。ここに $f_-(p - p')^\mu$ に比例する項が現れない理由を示す。運動量遷移 $q = p - p'$ はレプトンペアの運動量 $p_e + p_{\nu_e}$ とも書けることから、

$$f_-(p_e + p_{\nu_e})^\mu \bar{u}(p_e) \gamma_\mu P_L v(p_{\nu_e}) \quad (3.4.5)$$

となり、更に電子とニュートリノの質量を無視したことから運動方程式

$$\not{p}_{\nu_e} v(p_{\nu_e}) = 0, \quad (3.4.6)$$

$$\bar{u}(p_e) \not{p}_e = 0, \quad (3.4.7)$$

より $f_-(p - p')^\mu$ に比例する項は消される。そして自乗不変振幅は、電子スピンの和を取ると、

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{\text{spins}} |(\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e)|^2 \\ &= 2G_F^2 |V_{cb}|^2 |f_+|^2 (p + p')^{\mu_1} (p + p')^{\mu_2} \text{Tr}[\not{p}_e \gamma_{\mu_1} \not{p}_{\nu_e} \gamma_{\mu_2} P_L] \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

となる。よって微分崩壊比は

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dq^2}(\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e) &= \frac{1}{2m_B} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'^0} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2p_e^0} \\ &\times \int \frac{d^3 p_{\nu_e}}{(2\pi)^3 2p_{\nu_e}^0} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta(q - p_e - p_{\nu_e}) \delta[q^2 - (p - p')^2], \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

であり、積分を実行すると

$$\frac{d\Gamma}{dq^2}(\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e) = \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 |f_+|^2}{192\pi^3 m_B^3} [(q^2 - m_B^2 - m_D^2)^2 - 4m_B^2 m_D^2]^{3/2} \quad (3.4.10)$$

となる。同様に、 $\bar{B} \rightarrow D^* e \bar{\nu}_e$ の微分崩壊比も計算される。

ここまで QCD のハドロンの状態を用いて計算したが、今度は重クォーク有効理論の状態を用いて遷移振幅の一般形を書き、微分崩壊比を計算する。まず、 \bar{B} と $D^{(*)}$ 中間子の 4 元速度は $v^\mu = p^\mu/m_B$ と $v'^\mu = p'^\mu/m_{D^{(*)}}$ であり、これらの速度の内積を新たに $w = v \cdot v'$ と書く。するとこの w と運動量遷移 q との関係式は

$$w = \frac{m_B^2 + m_{D^{(*)}}^2 - q^2}{2m_B m_{D^{(*)}}} \quad (3.4.11)$$

となる。力学的に許される w の範囲は

$$1 \leq w \leq \frac{m_B^2 + m_{D^{(*)}}^2}{2m_B m_{D^{(*)}}} \quad (3.4.12)$$

である。ここで \bar{B} 中間子の静止系で考えると、 $w = 1$ すなわち $q^2 = (m_B - m_{D^{(*)}})^2$ は $D^{(*)}$ 中間子が静止したままレプトンペアが互いに反対方向へ飛び出す状況、 $w = [m_B^2 + m_{D^{(*)}}^2]/2m_B m_{D^{(*)}}$ すなわち $q^2 = 0$ は $D^{(*)}$ 中間子とレプトンペアがそれぞれ反対方向へ飛び出す状況に対応する。特に $w = 1$ を zero-recoil point と呼ぶ。

そして、式 (3.4.2) における運動量 p, p' を速度 v, v' によって書き直し、 $\mathcal{O}(1/M)$ の項を無視すると、6 つの form factor が新たに w の関数として以下のように定義される：

$$\begin{aligned} \frac{\langle D(p') | V^\mu | \bar{B}(p) \rangle}{\sqrt{m_B m_D}} &= h_+(w)(v + v')^\mu + h_-(w)(v - v')^\mu, \\ \frac{\langle D^*(p', \epsilon) | V^\mu | \bar{B}(p) \rangle}{\sqrt{m_B m_{D^*}}} &= h_V(w) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\nu^* v'_\alpha v_\beta, \\ \frac{\langle D^*(p', \epsilon) | A^\mu | \bar{B}(p) \rangle}{\sqrt{m_B m_{D^*}}} &= -i h_{A_1}(w)(w + 1) \epsilon^{*\mu} + i h_{A_2}(w)(\epsilon^* \cdot v) v^\mu \\ &\quad + i h_{A_3}(w)(\epsilon^* \cdot v) v'^\mu. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

そしてこの新たな 6 つの形状因子と変数 w を用いて微分崩壊比 $d\Gamma(\bar{B} \rightarrow D^{(*)} e \bar{\nu}_e)/dw$ を書き直すと、

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dw}(\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e) &= \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 m_B^5}{48\pi^3} (w^2 - 1)^{3/2} r^3 (1 + r)^2 \mathcal{F}_D(w)^2 \\ \frac{d\Gamma}{dw}(\bar{B} \rightarrow D^* e \bar{\nu}_e) &= \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 m_B^5}{48\pi^3} (w^2 - 1)^{1/2} (w + 1)^2 r^{*3} (1 - r^*)^2 \\ &\quad \times \left[1 + \frac{4w}{w + 1} \frac{1 - 2wr^* + r^{*2}}{(1 - r^*)^2} \right] \mathcal{F}_{D^*}(w)^2, \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

となる。ここで

$$r = \frac{m_D}{m_B}, \quad r^* = \frac{m_{D^*}}{m_B}, \quad (3.4.15)$$

かつ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_D(w)^2 &= \left[h_- - \left(\frac{1-r}{1+r} \right) h_- \right]^2, \\
\mathcal{F}_{D^*}(w)^2 &= \left\{ 2(1-2wr^* + r^{*2}) \left[h_{A_1}^2 + \left(\frac{w-1}{w+1} \right) h_V^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + [(1-r^*)h_{A_1} + (w-1)(h_{A_1} - h_{A_3} - r^*h_{A_2})]^2 \right\} \\
&\quad \times \left\{ (1-r^*)^2 + \frac{4w}{w+1}(1-2wr^* + r^{*2}) \right\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

である.

3.4.2 Isgur-Wise 関数

式 (3.4.13) 6つの形状因子が, 重クォーク極限の下でスピン・フレーバー対称性の帰結としてただ1つの関数によって書かれることを示す. まず, スピン演算子の第3成分 \hat{S}_3^a とベクトルカレント V_μ^a , 軸性ベクトルカレント A_μ^a ($a = b, c$) の間には以下の代数関係がある:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{S}_3^a, V_0^a] = \frac{1}{2} A_3^a, \\ [\hat{S}_3^a, V_1^a] = \frac{1}{2} A_3^a, \\ [\hat{S}_3^a, V_2^a] = -\frac{i}{2} V_1^a, \\ [\hat{S}_3^a, V_3^a] = \frac{1}{2} A_0^a \end{array} \right. \tag{3.4.17}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{S}_3^a, A_0^a] = \frac{1}{2} V_3^a, \\ [\hat{S}_3^a, A_1^a] = \frac{i}{2} A_2^a, \\ [\hat{S}_3^a, A_2^a] = -\frac{i}{2} A_1^a, \\ [\hat{S}_3^a, A_3^a] = \frac{1}{2} V_0^a. \end{array} \right. \tag{3.4.18}$$

そして遷移振幅を重クォーク有効理論による状態を用いて書き, 形状因子の定義も便利のため以下のように書き直す:

$$\begin{aligned}
\langle D(v') | V^\mu | \bar{B}(v) \rangle &= -\xi_+(w)(v+v')^\mu - \xi_-(w)(v-v')^\mu, \\
\langle D^*(v', \epsilon) | V^\mu | \bar{B}(v) \rangle &= -\xi_1(w) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\nu^* v'_\alpha v_\beta, \\
\langle D^*(v', \epsilon) | A^\mu | \bar{B}(v) \rangle &= i\xi_2(w) \epsilon^{*\mu} \\
&\quad - i\xi_3(w) (\epsilon^* \cdot v)(v+v')^\mu - i\xi_4(w) (\epsilon^* \cdot v)(v-v')^\mu.
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

そして, 静止系 $v = v_r = (1, \mathbf{0})$ における状態の関係式

$$i\hat{S}_3^c |D(v_r)\rangle = \frac{1}{2} |D_{(\lambda=0)}^*(v_r)\rangle \tag{3.4.20}$$

と、カレント代数 $[S_3, A_3] = -\frac{1}{2}V_0$ より、

$$\begin{aligned}\langle D_{(\lambda=0)}^*(v_r) | A_3 | B(v_r) \rangle &= -2i \langle D(v_r) | \hat{S}_3 A_3 | B(v_r) \rangle \\ &= i \langle D(v_r) | V_0 | B(v_r) \rangle\end{aligned}\quad (3.4.21)$$

である。この式から、 $\epsilon_{\mu}^*(v_r') = (0, 0, 0, -1)$ と取ると、

$$\xi_2(v_0) + (v_3)^2(\xi_3(v_0) + \xi_4(v_0)) = \xi_+(v_0)(1 + v_0)$$

となる。よってこの式が任意の v に対し成り立つことから、

$$\xi_2(w) = (1 + w)\xi_+(w) \quad (3.4.22)$$

$$\xi_3(w) + \xi_4(w) = 0 \quad (3.4.23)$$

と分かった。

全く同様にして、代数 $[S_3, A_0] = -\frac{1}{2}V_0$ と

$$\langle D_{(\lambda=0)}^*(v_r) | A_0 | B(v_r) \rangle = i \langle D(v_r) | V_3 | B(v_r) \rangle \quad (3.4.24)$$

からさらに

$$\xi_3(w) - \xi_4(w) = \xi_+(w) \quad (3.4.25)$$

が分かる。そして、代数 $[S_3, V_1] = -\frac{i}{2}V_2$ と

$$\langle D_{(\lambda=0)}^*(v_r) | V_1 | B(v_r) \rangle = i \langle D(v_r) | V_2 | B(v_r) \rangle \quad (3.4.26)$$

から

$$\xi_1(w) = \xi_+(w) \quad (3.4.27)$$

が分かる。

以上の結果を、 $\xi(w) = \xi_+(w)$ と書いてまとめると、

$$\xi_+(w) = \xi(w) \quad (3.4.28)$$

$$\xi_-(w) = 0 \quad (3.4.29)$$

$$\xi_1(w) = \xi(w) \quad (3.4.30)$$

$$\xi_2(w) = (1 + w)\xi(w) \quad (3.4.31)$$

$$\xi_3(w) = \frac{1}{2}\xi(w) \quad (3.4.32)$$

$$\xi_4(w) = -\frac{1}{2}\xi(w) \quad (3.4.33)$$

となる。このようにカレント代数を用いることで、6個の形状因子がただひとつの関数によって表すことができる。この ξ のような $w = v \cdot v'$ の関数は、Isgur-Wise 関数と呼ばれる。

第 4 章

重中間子有効理論

本章では、重中間子が軽い中間子に崩壊するような過程を扱うために、場をハドロンから中間子へと限定した有効場を構成する。このような重中間子場は便宜的に導入されるものではあるが、重クォークと同じスピン・フレーバー変換性を持ち、かつ重クォーク対称性による帰結がより明白な形で表現されるため便利である。

4.1 重中間子場の導入

重クォークをひとつ含む中間子、例えば B と B^* は重クォーク極限の下では質量が縮退した状態にあり、重クォークのスピンを入れ替えることによって互いに移り変わる。このような縮退状態にある 2 つの状態を便宜上ひとつの場として扱うことにする。

まず、速度 v の重クォーク Q をひとつ含む擬スカラー中間子場とベクトル中間子場をそれぞれ $P_v^{(Q)}(x)$, $P_{v\mu}^{*(Q)}(x)$ と書く。これら 2 つの場を次のように線形結合する：

$$[H_v^{(Q)}(x)]_{\alpha\beta} = \frac{1+\not{v}}{2} [i\gamma_5 P_v^{(Q)}(x) + \gamma^\mu P_{v\mu}^{*(Q)}(x)]_{\alpha\beta}. \quad (i=1,2, a=1,2,3) \quad (4.1.1)$$

ここで添字 α は重クォークのスピン添字、 β は重中間子における重クォーク以外の軽い自由度 (light degrees of freedom) のスピン添字を表す。このような場 $H_v^{(Q)}$ のことを重中間子場 (heavy meson field) と呼ぶ、以下スピン添字 α, β は省略する。

場 H_v は次の拘束条件を満たす：

$$\not{v}H_v^{(Q)} = H_v^{(Q)}, \quad H_v^{(Q)}\not{v} = -H_v^{(Q)}. \quad (4.1.2)$$

2 つ目の条件は物理的なスピン 1 の粒子の場が $v \cdot P_v^{*(Q)} = 0$ を満たすべきことより従う。また、式 (4.1.1) で定義した重中間子場に共役な場を

$$\bar{H}_v^{(Q)} = \gamma^0 H_v^{(Q)\dagger} \gamma^0 = \left[P_{v\mu}^{*(Q)\dagger} \gamma^\mu + iP_v^{(Q)\dagger} \gamma_5 \right] \frac{1+\not{v}}{2} \quad (4.1.3)$$

とする。

$H_v^{(Q)}$ はスピン添字に関して 4×4 行列である。静止系

$$v = v_r = (1, \mathbf{0}) \quad (4.1.4)$$

における具体的な形は,

$$H_{v_r}^{(Q)} = \begin{pmatrix} 0 & iP_{v_r}^{(Q)} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}_{v_r}^{*(Q)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

である. ここで γ 行列の標準表示を用いた (付録 A 参照). 場 $[H_v^{(Q)}]_{\alpha\beta}$ は 2つのスピノル添字を持つ. 左側の添字 α をスピン 1/2 の重クォークのスピノル添字, 右側の添字 β をスピン 1/2 を持つ軽い自由度のスピノル添字と見なす. 重クォークと軽い自由度のスピン演算子 $\mathbf{S}_Q, \mathbf{S}_l$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_Q, H_{v_r}^{(Q)}] &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{4 \times 4} H_{v_r}^{(Q)}, \\ [\mathbf{S}_l, H_{v_r}^{(Q)}] &= -\frac{1}{2} H_{v_r}^{(Q)} \boldsymbol{\sigma}_{4 \times 4}, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

ここで $\sigma_{4 \times 4}^i = i\epsilon_{ijk}[\gamma^i, \gamma^k]/4$ である. 重中間子の全スピン演算子 ($\mathbf{S}_Q + \mathbf{S}_l$) による無限小変換の下で, 場 $H_v^{(Q)}$ は

$$\delta H_{v_r}^{(Q)} = i[\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{S}_Q + \mathbf{S}_l), H_{v_r}^{(Q)}] = \frac{i}{2} [\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{4 \times 4}, H_{v_r}^{(Q)}], \quad (4.1.7)$$

と変換する. ここで $\boldsymbol{\theta}$ は変換パラメータである. この式から

$$\delta P_{v_r}^{(Q)} = 0, \quad \delta \mathbf{P}_{v_r}^{*(Q)} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{P}_{v_r}^{*(Q)}, \quad (4.1.8)$$

であり, 実際 $P_v^{(Q)}$ がスピン 0 粒子, $P_{v\mu}^{*(Q)}$ がスピン 1 粒子の変換則を満たす事が分かる. さらに, 場 $P_v^{(Q)}$ と $P_{v\mu}^{*(Q)}$ は S_Q だけ, S_l だけの変換の下で混ざり合う. 例えば重クォークスピン変換の下で,

$$\delta H_{v_r}^{(Q)} = i[\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{S}_Q, H_{v_r}^{(Q)}] = \frac{i}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{4 \times 4} H_{v_r}^{(Q)} \quad (4.1.9)$$

であるから,

$$\delta P_{v_r}^{(Q)} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{P}_{v_r}^{*(Q)}, \quad \delta \mathbf{P}_{v_r}^{*(Q)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{P}_{v_r}^{*(Q)} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} P_{v_r}^{(Q)} \quad (4.1.10)$$

となり $P_v^{(Q)}$ と $P_{v\mu}^{*(Q)}$ が混ざり合う. これを有限の重クォークスピン変換の形で

$$[H_v^{(Q)}]_{\alpha\gamma} \rightarrow D(R)_{Q\alpha\beta} [H_v^{(Q)}]_{\beta\gamma}, \quad (4.1.11)$$

と書く. ここで $D(R)_Q$ は $\gamma^0 D(R)_Q^\dagger \gamma^0 = D(R)_Q^{-1}$ を満たす回転行列である.

次に, 場 $H_v^{(Q)}$ に対する重クォークフレーバー変換を与える. 重クォークのフレーバーを添字 $i, j = 1, 2$ で表すと, 重クォークフレーバー変換は

$$H_{vi} \rightarrow U_{ij} H_{vj} \quad (4.1.12)$$

である. ここで U_{ij} は群 $SU(2)$ のユニタリ行列である.

4.2 カイラル摂動論

この節では、軽い中間子 (π , K など) と重中間子 (主に B 中間子) の相互作用を記述するために、軽いクォークに関するカイラル $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 対称性と重クォーク対称性を組み合わせる。

まず、軽い中間子の低エネルギー有効 Lagrangian を構成する。一般に、対称性が群 G から部分群 H へ自発的に破れる場合を考える。ここで、 G, H それぞれの生成子を $T^A \in \mathcal{G}$, $S^\alpha \in \mathcal{H}$ とする。そして破れた生成子を $X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}$ とする。このように生成子 T^A は2種類の生成子に分類される：

$$\{T^A\} = \{S^\alpha \in \mathcal{H}, X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}\}. \quad (4.2.1)$$

生成子は以下の規格化・直交性を取るものとする：

$$\text{tr}(T^A T^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}, \quad \text{tr}(S^\alpha X^a) = 0. \quad (4.2.2)$$

ここで2式目の直交性により $\text{tr}(S^\alpha [S^\beta, X^a]) = \text{tr}([S^\alpha, S^\beta], X^a) = 0$ である。従って元 $[S^\alpha, X^a]$ も常に集合 $\mathcal{G} - \mathcal{H}$ に属する：

$$[\mathcal{H}, \mathcal{G} - \mathcal{H}] \subset \mathcal{G} - \mathcal{H}. \quad (4.2.3)$$

破れた対称性による交換子 $[X^a, X^b]$ は一般に S^α と X^c の線形結合で書かれる。特に $[X^a, X^b]$ が S^α だけで書かれるとき、すなわち

$$[\mathcal{G} - \mathcal{H}, \mathcal{G} - \mathcal{H}] \subset \mathcal{H} \quad (4.2.4)$$

であるとき、商空間 (coset space) G/H は対称空間 (symmetric space) と呼ぶ。条件 (4.2.4) が成り立つならば、元 $g \in G$ に対してパリティ変換のような演算子 τ を定義することができる：

$$\tau : g \in G \longrightarrow \tau(g) \in G, \quad \tau^2 = 1, \quad (4.2.5)$$

$$\begin{cases} \tau(x) = x, & x \in \mathcal{H} \text{ のとき} \\ \tau(x) = -x, & x \in \mathcal{G} - \mathcal{H} \text{ のとき.} \end{cases} \quad (4.2.6)$$

無質量スカラーボソン、すなわち NG ボソンの個数は、商空間 G/H の次元 $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$ に等しい。NG ボソンの個数は $\dim G$ 、すなわち線形随伴表現の次元よりも小さいので、NG ボソンは H の下で線形に変換し、 G の下では線形に変換しない。このような NG ボソンを用いて G -不変非線形 Lagrangian (CCWZ Lagrangian) を構成する。

$\xi(\pi)$ を商空間 G/H の代表元 (representatives) とし、NG ボソン場 π^a によってパラメトライズする：

$$\xi(\pi) = e^{i\pi(x)/f_\pi}, \quad \pi(x) \equiv \sum_{a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}} \pi^a(x) X^a. \quad (4.2.7)$$

ここで f_π はスケールパラメータ (もしくは崩壊定数) である。以後、総和記号は省略する。 $\xi(\pi)$ に右から $g^\dagger \in G$ を掛けた元 $\xi(\pi)g^\dagger$ も G の元であるから、商空間 G/H の代表元 $\xi(\pi)$ と $h^\dagger \in H$ によって $\xi(\pi)g^\dagger$ を一意に分解する h^\dagger が存在する：

$$\xi(\pi)g^\dagger = h^\dagger(\pi, g)\xi(\pi'). \quad (4.2.8)$$

ここで元 h が g だけでなく $\pi(x)$ にも依存することに注意する。それゆえ $g \in G$ の下での場 $\pi(x)$ もしくは $\xi(\pi)$ の変換性は

$$\xi(\pi) \rightarrow \xi(\pi') = h(\pi, g)\xi(\pi)g^\dagger, \quad g \in G \quad (4.2.9)$$

と与えられる。

低エネルギー有効 Lagrangian を構成する上で、より基本的な役割を果たす量として、 $\xi(\pi) \in G/H$ によって書かれる Maurer-Cartan 1-form がある：

$$\alpha_\mu(\pi) = \frac{1}{i}\partial_\mu\xi(\pi) \cdot \xi^\dagger(\pi) \quad (4.2.10)$$

この 1-form はリー代数 \mathcal{G} の元であるから、生成子 $\{T^A\} = \{S^\alpha \in \mathcal{H}, X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}\}$ によって展開できる。よって $\alpha_\mu(\pi)$ を \mathcal{H} に対して平行・垂直な成分に分解できる：

$$\alpha_{\mu\parallel}(\pi) \equiv (2 \operatorname{tr} S^\alpha \alpha_\mu(\pi)) S^\alpha \in \mathcal{H}, \quad (4.2.11)$$

$$\alpha_{\mu\perp}(\pi) \equiv (2 \operatorname{tr} X^a \alpha_\mu(\pi)) X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}. \quad (4.2.12)$$

α_μ の G 変換性は式 (4.2.9) より

$$\alpha_\mu(\pi) \rightarrow \alpha_\mu(\pi') = h(\pi, g)\alpha_\mu(\pi)h^\dagger(\pi, g) + \frac{1}{i}\partial_\mu h(\pi, g) \cdot h^\dagger(\pi, g) \quad (4.2.13)$$

である。非斉次項が $\partial_\mu h(\pi, g) \cdot h^\dagger(\pi, g) \in \mathcal{H}$ であるから、平行・直交成分の変換性は

$$\alpha_{\mu\parallel}(\pi) \rightarrow \alpha_{\mu\parallel}(\pi') = h(\pi, g)\alpha_{\mu\parallel}(\pi)h^\dagger(\pi, g) + \frac{1}{i}\partial_\mu h(\pi, g) \cdot h^\dagger(\pi, g), \quad (4.2.14)$$

$$\alpha_{\mu\perp}(\pi) \rightarrow \alpha_{\mu\perp}(\pi') = h(\pi, g)\alpha_{\mu\perp}(\pi)h^\dagger(\pi, g) \quad (4.2.15)$$

である。従って直交成分 $\alpha_{\mu\perp}$ だけが斉次な変換をするので、NG ボソン場を用いた微分の次数が最低次の G -不変 Lagrangian は $\alpha_{\mu\perp}$ だけで書かれる：

$$\mathcal{L}_\pi = f_\pi^2 \operatorname{tr}(\alpha_{\mu\perp}(\pi))^2, \quad (4.2.16)$$

ここで因子 f_π^2 は場 $\pi(x)$ の運動項の規格化のために加えた。

対称性の群 G がカイラル $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 対称性、残る対称性の部分群 H が $SU(2)_V$ である場合を考える。元 $g \in G$ は $g_L \in SU(2)_L$ と $g_R \in SU(2)_R$ の組 (g_L, g_R) である。このとき $\xi(\pi)$ の $g \in SU(2)_L \times SU(2)_R$ の下での変換性は

$$\xi(\pi) \rightarrow \xi(\pi') = g_L \xi(\pi) h^\dagger(g_L, g_R, \pi) = h(g_L, g_R, \pi) \xi(\pi) g_R^\dagger \quad (4.2.17)$$

である。さらに、残る対称性 $H = SU(2)_V$ の下での変換は $g = g_L = g_R$ であるから簡単に

$$\xi(\pi) \rightarrow \xi(\pi') = h(g, \pi) \xi(\pi) h^\dagger(g, \pi) \quad (4.2.18)$$

である。そして α_μ の平行・垂直成分は $\xi(\pi)$ を用いて

$$\alpha_{\mu\parallel}(\pi) = \frac{i}{2} [\xi^\dagger(\pi) \partial_\mu \xi(\pi) + \xi(\pi) \partial_\mu \xi^\dagger(\pi)], \quad (4.2.19)$$

$$\alpha_{\mu\perp}(\pi) = \frac{i}{2} [\xi^\dagger(\pi) \partial_\mu \xi(\pi) - \xi(\pi) \partial_\mu \xi^\dagger(\pi)] \quad (4.2.20)$$

と書かれ、式 (4.2.7) を用いて微分の最低次項まで書き直すと

$$\alpha_{\mu\parallel}(\pi) = i\pi\partial_\mu\pi/f_\pi^2, \quad (4.2.21)$$

$$\alpha_{\mu\perp}(\pi) = -\partial_\mu\pi/f_\pi \quad (4.2.22)$$

である。ここで NG ボソン場 π は

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^- & -\frac{1}{2}\pi^0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.23)$$

$$\pi^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 \mp i\pi^2), \quad (4.2.24)$$

$$\pi^0 \equiv \pi^3 \quad (4.2.25)$$

である。式 (4.2.21), (4.2.22) が擬スカラーボソン場である π を用いて書かれることから、 $\alpha_{\mu\parallel}$ はベクトル場、 $\alpha_{\mu\perp}$ は擬ベクトル場であることが確認できる。

次に、軽い中間子に結合する重中間子について考える。重中間子場 (4.1.1) を次のように書き直す：

$$H_a = \frac{1+\not{v}}{2} [i\gamma_5 P_a + \gamma_\mu P_a^{*\mu}]. \quad (4.2.26)$$

ここで $a = 1, 2$ は残る対称性 $H = \text{SU}(2)_V$ の添字であり、速度 v 、重クォーク添字、そしてスピノル添字は省略した。軽い中間子は $\text{SU}(2)_V$ の下で式 (4.2.18) のように変換するが、同じ添字を持つ重中間子場も $\text{SU}(2)_V$ の下で変換する必要がある。そこで H_a の $\text{SU}(2)_V$ の下で変換を次のように与える：

$$H_a \rightarrow H_b h_{ba}(g, \pi)^\dagger. \quad (4.2.27)$$

そして、重メソン場のスピン変換性は

$$[H_a]_{\alpha\gamma} \rightarrow D(R)_{\alpha\beta} [H_a]_{\beta\gamma}, \quad (4.2.28)$$

であった。

従って、軽い中間子と重中間子の結合を記述する低エネルギー有効 Lagrangian は、

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -i \text{tr} \bar{H}_a v_\mu (\partial^\mu \delta_{ab} + i r \alpha_{\parallel ab}^\mu) H_b + \lambda \text{tr} \bar{H}_a H_b \gamma_\nu \gamma_5 \alpha_{\perp ba}^\nu \quad (4.2.29)$$

と与えられる。ここで r, λ は質量次元 0 の結合定数である。これは 1 階微分まで含んだ Lagrangian として許される最も一般の形であり、 $\text{SU}(2)_V$ 変換と $\text{SU}(4)$ スピン・フレーバー変換の下で不変である。そして式 (4.2.29) は微分展開により得られる有効 Lagrangian であるから、有効なエネルギー領域は $p_\pi/M_H \ll 1$ かつ $k/M_H \ll 1$ の低エネルギーである。ここで p_π は π 中間子の運動量の大きさ、 k は residual momentum の大きさ、そして M_H は重中間子の質量である。

4.3 $1/M$ 補正まで含めた重中間子有効理論の Lagrangian

スピン・フレーバー対称性を破るようなオーダー $1/M$ の項も含めた最も一般の重中間子有効 Lagrangian は、重中間子場 H_v を用いて書き下すと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_v = & -\text{tr} \left\{ \bar{H} v \cdot i D H \right\} - \text{tr} \left\{ \bar{H} \frac{(iD)^2}{2M} H \right\} \\
& + \Lambda \text{tr} \left\{ \bar{H} H \right\} + \kappa' \Lambda \text{tr} \left\{ \bar{H} \frac{\Lambda}{M} H \right\} \\
& + \kappa' \Lambda \text{tr} \left\{ \bar{H} \frac{\Lambda}{M} \sigma_{\rho\sigma} H \sigma^{\rho\sigma} \right\} \\
& + r \text{tr} \left\{ \bar{H} H v \cdot \hat{\alpha}_{\parallel} \right\} \\
& + r \text{tr} \left\{ \bar{H} \frac{iD_{\parallel}}{2M} H \alpha_{\parallel}^{\mu} \right\} + \text{h.c.} \\
& + r_1 \text{tr} \left\{ \bar{H} \frac{\Lambda}{M} H v \cdot \hat{\alpha}_{\parallel} \right\} \\
& + r_2 \text{tr} \left\{ \bar{H} \frac{\Lambda}{M} \sigma^{\rho\sigma} H \sigma_{\rho\sigma} v \cdot \hat{\alpha}_{\parallel} \right\} \\
& + \lambda \text{tr} \left\{ \bar{H} H \gamma_{\mu} \gamma_5 \alpha_{\perp}^{\mu} \right\} \\
& - \lambda \text{tr} \left\{ \bar{H} v \cdot \frac{iD}{2M} H \gamma_{\mu} \gamma_5 \alpha_{\perp}^{\mu} \right\} + \text{h.c.} \\
& - \lambda \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left\{ \bar{H} \frac{iD_{\rho}}{4M} H \sigma_{\mu\nu} \alpha_{\perp\sigma} \right\} + \text{h.c.} \\
& + \lambda_1 \text{tr} \left\{ \bar{H} \frac{\Lambda}{M} H \gamma_{\rho} \gamma_5 \alpha_{\perp}^{\rho} \right\} \\
& + \lambda_2 \text{tr} \left\{ \bar{H} \frac{\Lambda}{M} \gamma_{\rho} \gamma_5 H \alpha_{\perp}^{\rho} \right\} \\
& + (\text{anti-particle})
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

である [8]. ここで共変微分

$$iD_{\mu} H_v = i\partial_{\mu} H_v - H_v g_V V_{\mu} \tag{4.3.2}$$

は hidden local symmetry [9] についてのもので、 ρ 中間子を導入する際に有効なものであるが、以下では非常に低いエネルギーの擬スカラー中間子のみを考えたいので $g_V = 0$ として無視する。同様に、

$$\hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu} \equiv \alpha_{\parallel}^{\mu} - g_V V^{\mu} \tag{4.3.3}$$

も、以下では単に α_{\parallel}^{μ} と見なせばよい。

そして、上記の Lagrangian を擬スカラー中間子場 P 、ベクトル中間子場 P^* を用いて書き直した

式は以下の通りである：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_v = & 2P^\dagger(v \cdot iD)P - 2(g_{\mu\nu} - \alpha v_\mu v_\nu)P^{*\dagger\mu}(v \cdot iD)P^{*\nu} \\
& + \frac{1}{M}P^\dagger(iD)^2P - \frac{1}{M}g_{\mu\nu}P^{*\dagger\mu}(iD)^2P^{*\nu} \\
& - 2\Lambda P^\dagger P + 2\Lambda g_{\mu\nu}P^{*\dagger\mu}P^{*\nu} \\
& - 2\kappa' \frac{\Lambda^2}{M}P^\dagger P + 2\kappa' \frac{\Lambda^2}{M}g_{\mu\nu}P^{*\dagger\mu}P^{*\nu} \\
& - 12\kappa \frac{\Lambda^2}{M}P^\dagger P - 4\kappa \frac{\Lambda^2}{M}g_{\mu\nu}P^{*\dagger\mu}P^{*\nu} \\
& - \frac{2r}{f_\pi^2}P^\dagger P \Pi(v \cdot i\partial)\Pi + \frac{2r}{f_\pi^2}g_{\mu\nu}P^{*\dagger\mu}P^{*\nu}\Pi(v \cdot i\partial)\Pi \\
& - \frac{r}{Mf_\pi}P^\dagger(iD_\mu)P \Pi(i\partial^\mu)\Pi + \frac{r}{Mf_\pi^2}P^{*\dagger\rho}(iD_\mu)P_\rho^*\Pi(i\partial^\mu)\Pi \\
& - \frac{r}{Mf_\pi^2}(iD_\mu)P^\dagger P \Pi(i\partial^\mu)\Pi + \frac{r}{Mf_\pi^2}(iD_\mu)P^{*\dagger\rho}P_\rho^*\Pi(i\partial^\mu)\Pi \\
& - \frac{2r_1\Lambda}{Mf_\pi^2}P^\dagger P \Pi(v \cdot i\partial)\Pi + \frac{2r_1\Lambda}{Mf_\pi^2}P^{*\dagger\mu}P_\mu^*\Pi(v \cdot i\partial)\Pi \\
& + 12\frac{r_2\Lambda}{Mf_\pi^2}P^\dagger P \Pi(v \cdot i\partial)\Pi + 4\frac{r_2\Lambda}{Mf_\pi^2}g_{\mu\nu}P^{*\mu}P^{*\nu}\Pi(v \cdot i\partial)\Pi \\
& + \frac{2\lambda}{f_\pi}\{P^\dagger P_\rho^* - P_\rho^{*\dagger}P\}(i\partial^\rho)\Pi + \frac{2\lambda}{f_\pi}P^{*\dagger\mu}P^{*\nu}(i\partial^\rho)\Pi \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}v^\sigma \\
& + \frac{\lambda}{Mf_\pi}\{P^\dagger(v \cdot iD)P_\rho^* - P_\rho^{*\dagger}(v \cdot iD)P\}(i\partial^\rho)\Pi + \frac{\lambda}{Mf_\pi}P^{*\dagger\mu}(v \cdot iD)P^{*\nu}(i\partial^\rho)\Pi \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}v^\sigma \\
& + \frac{\lambda}{Mf_\pi}\{P(v \cdot iD)P_\rho^{*\dagger} - P_\rho^*(v \cdot iD)P^\dagger\}(i\partial^\rho)\Pi + \frac{\lambda}{Mf_\pi}P^{*\mu}(v \cdot iD)P^{*\dagger\nu}(i\partial^\rho)\Pi \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}v^\sigma \\
& - \frac{\lambda}{Mf_\pi}\{P^\dagger(v \cdot iD)P^{*\sigma}(i\partial_\sigma)\Pi - P^\dagger(iD_\rho)P^{*\rho}(v \cdot i\partial)\Pi \\
& \quad + P^{*\dagger\rho}(iD_\rho)P(v \cdot i\partial)\Pi - P^{*\dagger\sigma}(i\partial_\sigma)\Pi(v \cdot iD)P\} \\
& - \frac{i\lambda}{Mf_\pi}\{P^{*\rho}(iD_\rho)P^{*\sigma}(i\partial_\sigma)\Pi - P^{*\dagger\sigma}(i\partial_\sigma)\Pi(iD_\rho)P^{*\rho}\} \\
& - \frac{\lambda}{Mf_\pi}\{P(v \cdot iD)P^{*\dagger\sigma}(i\partial_\sigma)\Pi - P(iD_\rho)P^{*\dagger\rho}(v \cdot i\partial)\Pi \\
& \quad + P^{*\rho}(iD_\rho)P^\dagger(v \cdot i\partial)\Pi - P^{*\sigma}(i\partial_\sigma)\Pi(v \cdot iD)P^\dagger\} \\
& - \frac{i\lambda}{Mf_\pi}\{P^{*\rho}(iD_\rho)P^{*\dagger\sigma}(i\partial_\sigma)\Pi - P^{*\sigma}(i\partial_\sigma)\Pi(iD_\rho)P^{*\dagger\rho}\} \\
& + \frac{2\lambda_1\Lambda}{Mf_\pi}\{P^\dagger P_\rho^* - P_\rho^{*\dagger}P\}(i\partial^\rho)\Pi + \frac{2\lambda_1\Lambda}{Mf_\pi}P^{*\dagger\mu}P^{*\nu}(i\partial^\rho)\Pi \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}v^\sigma \\
& + \frac{2\lambda_2\Lambda}{Mf_\pi}\{-P^\dagger P_\rho^{*\dagger} + P_\rho^{*\dagger}P\}(i\partial^\rho)\Pi + \frac{2\lambda_2\Lambda}{Mf_\pi}2P^{*\dagger\mu}P^{*\nu}(i\partial^\rho)\Pi \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}v^\sigma \\
& + (\text{anti-particle}). \tag{4.3.4}
\end{aligned}$$

ここで一行目の α は拘束条件 $v_\mu P^{*\mu} = 0$ に起因するパラメータであり、 Π は前節における π のことである。

第 5 章

応用

本章では重中間子有効理論を 2 つの崩壊過程, $D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+$ と $\bar{B} \rightarrow D^{(*)}e\bar{\nu}_e$ に適用する. $D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+$ では有効理論におけるパラメータである結合定数 λ を決定する. この λ を決定することで, 他の崩壊過程への予言も可能となる. $\bar{B} \rightarrow D^{(*)}e\bar{\nu}_e$ では遷移振幅のハドロン部分の形が一意に書かれ, それに掛かる形状因子も 1 つしか現れないことを確認する. この形状因子こそが Isgur-Wise 関数であり, 重中間子有効理論対称性の帰結がより明白にあらわれている.

5.1 $D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+$ への応用

前節で擬スカラー中間子 P とベクトル中間子 P^* を用いて書かれた有効 Lagrangian をオーダー $1/M$ まで与えた. すると, この Lagrangian の中から $D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+$ の崩壊幅を計算するために用いる項は,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\supset \mathcal{L}_{P^*P\Pi} \\
&= \frac{2\lambda}{f_\pi} P_a^\dagger P_{b\rho}^* (i\partial^\rho) \Pi_{ab} \\
&\quad + \frac{\lambda}{Mf_\pi} P_a^\dagger (v \cdot iD) P_{b\rho}^* (i\partial^\rho) \Pi_{ab} \\
&\quad - \frac{\lambda}{Mf_\pi} P_{a\rho}^* (v \cdot iD) P_b^\dagger (i\partial^\rho) \Pi_{ab} \\
&\quad - \frac{\lambda}{Mf_\pi} \{ P_a^\dagger (v \cdot iD) P_b^{*\sigma} (i\partial_\sigma) \Pi_{ab} - P_a^\dagger (iD_\rho) P_b^{*\rho} (v \cdot i\partial) \Pi_{ab} \} \\
&\quad + \frac{2\lambda_1\Lambda}{Mf_\pi} P_a^\dagger P_{b\rho}^* (i\partial^\rho) \Pi_{ab} \\
&\quad - \frac{2\lambda_2\Lambda}{Mf_\pi} P_a^\dagger P_{b\rho}^* (i\partial^\rho) \Pi_{ab}
\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

である。ただし、ここでは $\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^+$ と規格化されている。対応する Feynman rule は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2}} \left[i \frac{2\lambda}{f_\pi} p_\pi^\rho + i \frac{\lambda}{M f_\pi} (v \cdot p_{P^*}) p_\pi^\rho - i \frac{\lambda}{M f_\pi} (v \cdot p_P) p_\pi^\rho \right. \\
& \quad \left. - i \frac{\lambda}{M f_\pi} \{ (v \cdot p_{P^*}) p_\pi^\rho - p_{P^*}^\rho (v \cdot p_\pi) \} \right. \\
& \quad \left. + i(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{2\Lambda}{M f_\pi} p_\pi^\rho \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[i \frac{2\lambda}{f_\pi} p_\pi^\rho + i \frac{\lambda}{M f_\pi} (m_{D^*} - m_D) p_\pi^\rho \right. \\
& \quad \left. - i \frac{\lambda}{M f_\pi} \{ m_{D^*} p_\pi^\rho - m_{D^*} v^\rho (v \cdot p_\pi) \} \right. \\
& \quad \left. + i(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{2\Lambda}{M f_\pi} p_\pi^\rho \right] \tag{5.1.2}
\end{aligned}$$

となる (図 5.1).

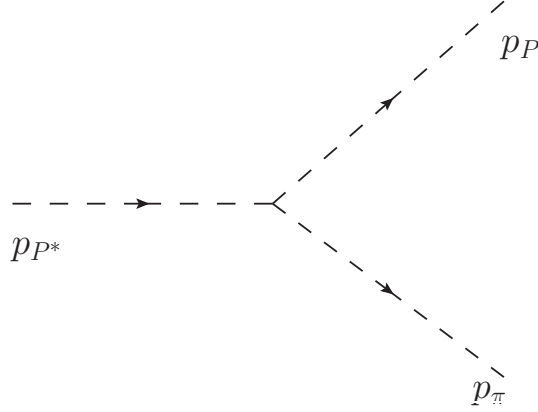


図 5.1 重いベクトル中間子 P^* から重い擬スカラー中間子 P と軽い中間子 Π への崩壊を表すダイアグラム

$D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$ の不変散乱振幅 \mathcal{M} は,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= m_D^2 \frac{1}{2} \left(\left| \frac{4\lambda^2}{f_\pi^2} p_\pi^2 \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| 2i \frac{2\lambda}{f_\pi} p_\pi^\rho \left[i \frac{\lambda}{M f_\pi} (m_{D^*} - m_D) p_{\pi\rho} - i \frac{\lambda m_{D^*}}{M f_\pi} \{ p_{\pi\rho} - v_\rho (v \cdot p_\pi) \} + i(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{2\Lambda}{M f_\pi} p_{\pi\rho} \right] \right| \right. \\
& \quad \left. + \mathcal{O}(1/M^2) \right) \\
&= m_D^2 \frac{2\lambda^2}{f_\pi^2} \left(|p_\pi|^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{M} \left| -p_\pi^2 (m_{D^*} - m_D) + m_{D^*} \{ p_\pi^2 - (v \cdot p_\pi)^2 \} - \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)\Lambda}{\lambda} p_\pi^2 \right| \right. \\
& \quad \left. + \mathcal{O}(1/M^2) \right) \\
&= \frac{2\lambda^2 m_D^2 |p_\pi|^2}{f_\pi^2} \left\{ 1 + \frac{1}{M} (m_{D^*} - m_D) + \frac{\Lambda}{M} \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda} + \mathcal{O}(1/M^2) \right\} \tag{5.1.3}
\end{aligned}$$

となる。ここで括弧の中の第2項は、質量差が $m_{D^*} - m_D = -8\lambda_2/M_c$ であるため $\mathcal{O}(1/M^2)$ に

含まれる。よって、 $\mathcal{O}(1/M^2)$ の効果を見捨てた全崩壊幅は、 D^* 中間子の偏極を平均して、

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}_\pi|}{8\pi m_{D^*}^2} |\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{2\lambda^2 m_D^2 |\mathbf{p}_\pi|}{24\pi m_{D^*}^2 f_\pi^2} |p_\pi|^2 \left[1 + \frac{\Lambda}{M} \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda} \right] \\
&= \frac{\lambda^2 m_D^2 |\mathbf{p}_\pi|^3}{12\pi m_{D^*}^2 f_\pi^2} \left[1 + \frac{\Lambda}{M} \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda} \right] \\
&= \frac{\lambda^2 m_D^2 (E_\pi^2 - m_\pi^2)^{3/2}}{12\pi m_{D^*}^2 f_\pi^2} \left[1 + \frac{\Lambda}{M} \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda} \right] \tag{5.1.4}
\end{aligned}$$

と求まる。

次に、この全崩壊幅の式と具体的な実験値を用いて結合定数 λ の大きさを確認する。 λ は物理量を用いて

$$\lambda = \left[\frac{12\pi f_\pi^2 \Gamma m_{D^*}^2}{(E_\pi^2 - m_\pi^2)^{3/2} m_D^2} \right]^{1/2} \tag{5.1.5}$$

と書ける。実験値 [11]

$$\begin{aligned}
m_{D^*} &= 2010.27 \pm 0.05 \text{ MeV} \\
m_D &= 1864.84 \pm 0.05 \text{ MeV} \\
m_{\pi^\pm} &= 139.57018 \pm 0.00035 \text{ MeV} \\
f_{\pi^\pm} &= 130.41 \pm 0.03 \pm 0.20 \text{ MeV} \\
\Gamma &= 83.4 \pm 1.8 \text{ keV},
\end{aligned}$$

を用い、 D^{*+} が $D^0\pi^+$ へ崩壊する過程の分岐比が $67.7 \pm 0.05\%$ であることから、

$$\lambda = 0.59 \pm 0.01 \tag{5.1.6}$$

と分かった。ここで pion decay constant の間の関係式が $f_\pi = f_{\pi^0} = f_{\pi^-}/\sqrt{2}$ であることに注意する。

5.2 $\bar{B} \rightarrow D^{(*)} e \bar{\nu}_e$ への応用

今度は第3章において重クォーク有効理論によって計算した $\bar{B} \rightarrow D e \bar{\nu}_e$ の微分崩壊比を、重中間子有効理論によって求める。重クォークの質量が重い極限で形状因子が1つ (Isgur-Wise 関数) しか現れないことがより明白に表現される。

この過程を引き起こす弱い相互作用の Hamiltonian は、

$$H_{\text{weak}} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} (\bar{c}\gamma^\mu P_L b) (\bar{e}\gamma_\mu P_L \nu_e) \tag{5.2.1}$$

であった。そして、ハドロン部分を重中間子場を用いた形に書き直す (exclusive な手法)。このハミルトニアンに含まれる $\bar{c}\gamma^\mu P_L b$ とスピン・フレーバー変換性やパリティ変換性が同じであるような、 H_v で書かれる量はひとつしかなく、ある関数 $f(v \cdot v')$ を用いて、

$$-f(v \cdot v') \text{tr} \left\{ \bar{H}_v^D \gamma^\mu (1 - \gamma_5) H_v^B \right\} + \mathcal{O}(1/M) \tag{5.2.2}$$

と一意に書かれる。ここで $f(v \cdot v')$ に掛かる負符号は便利のためである。これを用いて Hamiltonian を書き直すと

$$H'_{\text{weak}} = -\frac{2G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} f(v \cdot v') \text{tr} \left\{ \overline{H}_{v'}^D \gamma^\mu (1 - \gamma_5) H_v^B \right\} (\bar{e} \gamma_\mu P_L \nu_e) + \mathcal{O}(1/M) \quad (5.2.3)$$

となる。この量から、 B 中間子場 P_v^B から D 中間子場 P_v^D への遷移の項を取り出して計算すると、

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ i\gamma_5 P_{v'}^{D\dagger} \frac{1 + \not{v}'}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \frac{1 + \not{v}}{2} i\gamma_5 P_v^B \right\} \\ &= -P_{v'}^{D\dagger} P_v^B \text{tr} \left\{ \frac{1 + \not{v}'}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \frac{1 + \not{v}}{2} \right\} \\ &= -P_{v'}^{D\dagger} P_v^B \text{tr} \left\{ \frac{1 + \not{v}'}{2} \gamma^\mu \frac{1 + \not{v}}{2} \right\} \\ &= -\frac{1}{4} P_{v'}^{D\dagger} P_v^B \text{tr} \{ \gamma^\mu \not{v} + \not{v}' \gamma^\mu \} \\ &= -P_{v'}^{D\dagger} P_v^B (v + v')^\mu \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

である。よって、擬スカラーメソン場によって新たに書かれる低エネルギー有効 Hamiltonian $H_{\text{weak}}^{P \rightarrow P}$ は

$$H_{\text{weak}}^{P \rightarrow P} = \sqrt{2} G_F V_{cb} f(v, v') P_{v'}^{D\dagger} P_v^B (v + v')^\mu \bar{e} \gamma_\mu P_L \nu_e \quad (5.2.5)$$

となり、不変散乱振幅は

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \langle D(p') e \bar{\nu}_e | H_{\text{weak}}^{P \rightarrow P} | \bar{B}(p) \rangle \\ &= \langle D(v') e \bar{\nu}_e | \sqrt{m_D} H_{\text{weak}}^{P \rightarrow P} \sqrt{m_B} | \bar{B}(v) \rangle \\ &= \sqrt{2} G_F V_{cb} f(v, v') \sqrt{m_D m_B} (v + v')^\mu \bar{u}(p_e) \gamma_\mu P_L v(p_{\mu_e}), \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

$$|\mathcal{M}|^2 = 2G_F^2 |V_{cb}|^2 |f(v, v')|^2 m_B m_D (v + v')^{\mu_1} (v + v')^{\mu_2} \text{tr} [\not{p}_e \gamma_{\mu_1} \not{p}_{\nu_e} \gamma_{\mu_2} P_L] \quad (5.2.7)$$

となる。ここで $m_B m_D (v + v')^{\mu_1} (v + v')^{\mu_2}$ の部分を $\mathcal{O}(1/M)$ の量を見捨てると $(p + p')^{\mu_1} (p + p')^{\mu_2}$ となり、重クォーク有効理論で求めた不変散乱振幅に一致することが分かる。

最後に、 $\bar{B} \rightarrow D^* e \bar{\nu}_e$ の不変散乱振幅も重中間子有効理論によって計算が行える。まず、式 (5.2.3) 中のベクトルカレント $\text{tr} \{ \overline{H}_{v'}^D \gamma^\mu H_v^B \}$ から、 B 中間子場 P_v^B から D^* 中間子場 $P_v^{D^*}$ への遷移の項だけを取り出すと、

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \gamma^\nu P_{v'\nu}^{D^*\dagger} \frac{1 + \not{v}'}{2} \gamma^\mu \frac{1 + \not{v}}{2} i\gamma_5 P_v^B \right\} \\ &= iP_{v'\nu}^{D^*\dagger} P_v^B \text{tr} \left\{ \gamma^\nu \frac{1 + \not{v}'}{2} \gamma^\mu \frac{1 + \not{v}}{2} \gamma_5 \right\} \\ &= \frac{i}{4} P_{v'\nu}^{D^*\dagger} P_v^B \text{tr} \{ \gamma_5 \gamma^\nu \not{v}' \gamma^\mu \not{v} \} \\ &= -i P_{v'\nu}^{D^*\dagger} P_v^B \epsilon^{\nu\rho\mu\sigma} v'_\rho v_\sigma \\ &= iP_{v'\nu}^{D^*\dagger} P_v^B \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho v'_\sigma \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

である。すると不変散乱振幅は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \langle D^*(p') e \bar{\nu}_e | \sqrt{2} G_F V_{cb} (-f(v, v')) \text{tr} \{ \bar{H}_{v'}^D \gamma^\mu H_v^D \} \bar{e} \gamma_\mu P_L \nu_e | \bar{B}(p) \rangle \\
&= \sqrt{2} G_F V_{cb} (-f(v, v')) \sqrt{m_{D^*} m_B} \langle D^*(v') | i P_{v'\nu}^{D^* \dagger} P_v^B \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho v'_\sigma | \bar{B}(v) \rangle \bar{u}(p_e) \gamma_\mu P_L v(p_{\nu_e}) \\
&= \sqrt{2} G_F V_{cb} (-if(v, v')) \sqrt{m_B m_{D^*}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^* v_\rho v'_\sigma \bar{u}(p_e) \gamma_\mu P_L v(p_{\nu_e}) \tag{5.2.9}
\end{aligned}$$

である。同様に、式 (5.2.3) 中の軸性ベクトルカレント $\text{tr} \{ \bar{H}_{v'}^D \gamma^\mu \gamma_5 H_v^B \}$ から、 B 中間子場 P_v^B から D^* 中間子場 $P_{v'}^{D^*}$ への遷移の項だけを取り出すと、

$$\begin{aligned}
&\text{tr} \left\{ \gamma^\nu P_{v'\nu}^{D^* \dagger} \frac{1 + \not{v}'}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{1 + \not{v}}{2} i \gamma_5 P_v^B \right\} \\
&= i P_{v'\nu}^{D^* \dagger} P_v^B \text{tr} \left\{ \gamma^\nu \frac{1 + \not{v}'}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{1 + \not{v}}{2} \gamma_5 \right\} \\
&= i P_{v'\nu}^{D^* \dagger} P_v^B \text{tr} \left\{ \gamma^\nu \frac{1 + \not{v}'}{2} \gamma^\mu \frac{1 - \not{v}}{2} \right\} \\
&= i P_{v'\nu}^{D^* \dagger} P_v^B \frac{1}{4} \text{tr} \{ \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\nu \not{v}' \gamma^\mu \not{v} \} \\
&= i P_{v'\nu}^{D^* \dagger} P_v^B [g^{\nu\mu} - (v'^\nu v^\mu - g^{\nu\mu} v' \cdot v + v^\nu v'^\mu)] \\
&= i P_{v'\nu}^{D^* \dagger} P_v^B [(w+1)g^{\mu\nu} - v^\mu v'^\nu - v'^\mu v^\nu] \tag{5.2.10}
\end{aligned}$$

である。よって不変散乱振幅は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \langle D^*(p') e \bar{\nu}_e | \sqrt{2} G_F V_{cb} (-f(v, v')) \text{tr} \{ \bar{H}_{v'}^D \gamma^\mu \gamma_5 H_v^D \} \bar{e} \gamma_\mu P_L \nu_e | \bar{B}(p) \rangle \\
&= \sqrt{2} G_F V_{cb} (-f(v, v')) \sqrt{m_{D^*} m_B} \langle D^*(v') | i P_{v'\nu}^{D^* \dagger} P_v^B [(w+1)g^{\mu\nu} - v^\mu v'^\nu - v'^\mu v^\nu] | \bar{B}(v) \rangle \\
&\quad \times \bar{u}(p_e) \gamma_\mu P_L v(p_{\nu_e}) \\
&= \sqrt{2} G_F V_{cb} (-if(v, v')) \sqrt{m_B m_{D^*}} [(w+1)\epsilon^{*\mu} - (\epsilon \cdot v') v^\mu - (\epsilon \cdot v) v'^\mu] \bar{u}(p_e) \gamma_\mu P_L v(p_{\nu_e}) \tag{5.2.11}
\end{aligned}$$

である。以上より、重中間子有効理論によって不変散乱振幅を計算しても重クォーク有効理論での結果と式の形は一致し、形状因子も1種類で書き下されていることが分かる。このように、重中間子有効理論は exclusive な議論を行う際に非常に有用となる。

第 6 章

まとめ

まず標準模型の電弱相互作用と強い相互作用を概説した。強い相互作用はエネルギースケールが Λ_{QCD} 以下の低エネルギー領域において非摂動的効果を引き起こし、解析が困難である。強い相互作用をする軽い u, d クォークが、カイラル $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 対称性の破れにより、NG ボソンとみなされる束縛状態を形成する。その例としてアイソスピン $SU(2)_V$ 3重項の π^+, π^0, π^- 中間子、 $SU(2)_V$ 1重項の η を挙げた。このように対称性を用いた手法は非摂動的効果を理解する上で有用であることを軽いクォークの場合に対して確認した。

次に重クォークが持つスピン・フレーバー対称性を解説した。重いハドロンの中に束縛される重クォークは軽い自由度との相互作用で速度、スピン、フレーバーを変えない特徴を持つ。この $SU(4)$ スピン・フレーバー対称性を用いることで、崩壊過程 $\bar{B} \rightarrow D^* e \bar{\nu}_e$ の遷移振幅に現れる6種類の形状因子はただひとつの Isgur-Wise 関数に関係付けられる。これは解析が困難である QCD の非摂動的効果を表す複雑な形状因子を、対称性を用いることでより単純化できるという驚くべき結果である。このように非摂動的効果に対し対称性を用いる手法は重クォークに対しても非常に有用である。

そして重中間子の崩壊過程を解析する上で有用となる重中間子場 H_c を導入した。軽い中間子場と重中間子場は同じ対称性の群 $SU(2)_V$ によって変換し、この2種類の場の相互作用を表す Lagrangian (4.2.29) を書き下した。この相互作用 Lagrangian は低エネルギー領域において有効である。崩壊過程 $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$ は、質量差 $m_{D^*} - m_D$ がおおよそ m_π であるから生成される π 中間子の持つ運動量が小さく、Lagrangian (4.2.29) を用いるには最適である。 $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$ の全崩壊幅を $1/M$ 補正も含めて計算し、 $P^* P \Pi$ の結合定数が $\lambda = 0.59 \pm 0.01$ であることが分かった。さらに $\bar{B} \rightarrow D^* e \bar{\nu}_e$ の形状因子がひとつの Isgur-Wise 関数で表されることが重中間子場を用いることでも再現された。このように重中間子場を用いた手法は B-factory 実験で生じる過程を扱う際に重要な役割を果たす。

将来の B-factory 実験は標準模型の精密検証を目的としており、標準模型を超える理論を構築するための手がかりが見つかることが大いに期待される。B-factory 実験は様々な可能性から標準模型を超える理論の手がかりを探る。例として、 $B^0 - \bar{B}^0$ mixing を用いた CP 対称性の破れの検証や、leptonic decay $B \rightarrow \tau \nu$ を用いた超対称性粒子の探索などが挙げられる。その他に、現在 CKM 行列要素 $|V_{ub}|$ の値が2つの解析方法によって

$$|V_{ub}| = (4.49 \pm 0.16 \begin{matrix} +0.16 \\ -0.18 \end{matrix}) \times 10^3, \quad (\text{inclusive})$$

$$|V_{ub}| = (3.72 \pm 0.19) \times 10^3 \quad (\text{exclusive})$$

のように 3σ 程度のずれがあることが知られている [11]. 将来の B-factory 実験の統計によってこのずれが無くなるか, もしくはずれがあるものと確定され, 標準模型を超える理論への手がかりとなるか, 重要な問題の内のひとつである. 以上挙げた例は全て稀な過程であり, B-factory 実験によって集められる膨大なデータによって解析することが可能となる. そして重クォーク有効理論および重中間子有効理論は, このような稀な過程を解析することができる.

本論文で議論した重クォーク有効理論および重中間子有効理論の有用性は B-factory 実験による膨大な実験データを活かすに適しており, 今後の素粒子物理学の発展に大きく貢献すると期待する.

付録 A

表記

本論文では自然単位系 $\hbar = c = 1$ を用いる.

A.1 4次元記法

ギリシャ文字 $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$ を4元テンソルの添字, i, j, k, \dots を空間成分の添字としたとき,

$$4 \text{元ベクトル: } x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i) = (t, \mathbf{x}), \quad (\text{A.1.1})$$

$$\text{計量: } g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1), \quad (\text{A.1.2})$$

$$\text{内積: } a \cdot b \equiv ab \equiv a_\mu b^\mu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{A.1.3})$$

Levi-Civita の完全反対称テンソル:

$$\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i, j, k \text{ の偶置換}) \\ -1 & (i, j, k \text{ の奇置換}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}. \quad (\text{A.1.4})$$

完全反対称テンソル:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & (\mu, \nu, \rho, \sigma \text{ の偶置換}) \\ -1 & (\mu, \nu, \rho, \sigma \text{ の奇置換}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (\text{A.1.5})$$

A.2 γ 行列

γ 行列は以下の Clifford 代数を満たす:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu \equiv \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \mathbf{1}_4. \quad (\text{A.2.1})$$

便利のため以下の表記を導入する:

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (\text{A.2.2})$$

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_5^\dagger. \quad (\text{A.2.3})$$

γ_5 と γ^μ の関係は,

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{A.2.4})$$

Pauli 行列 σ^i ($i = 1, 2, 3$) は

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.5})$$

γ 行列の具体的な表示は、スピノール表示 (カイラル表示) で

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2.6})$$

標準表示 (Dirac 表示) で

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.7})$$

A.3 Dirac スピノール

正・負エネルギー平面波解

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u(\mathbf{p}, s) &= 0, & (\not{p} + m)v(\mathbf{p}, s) &= 0, \\ \bar{u}(\mathbf{p}, s)(\not{p} - m) &= 0, & \bar{v}(\mathbf{p}, s)(\not{p} + m) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3.1})$$

u と v の関係は $u(\mathbf{p}, s) = C\bar{u}^T(\mathbf{p}, s)$ とした。ここで $C = i\gamma^2\gamma^0$ である。規格・直交性は

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s') &= 2m\delta_{ss'}, & \bar{v}(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s') &= -2m\delta_{ss'}, \\ \bar{u}(\mathbf{p}, s)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, s') &= \bar{v}(\mathbf{p}, s)\gamma^\mu v(\mathbf{p}, s') = 2p^\mu\delta_{ss'}, \\ u^\dagger(\mathbf{p}, s)v(-\mathbf{p}, s') &= v^\dagger(\mathbf{p}, s)u(-\mathbf{p}, s') = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3.2})$$

完全性は

$$\begin{aligned} \sum_{s=\pm} u(\mathbf{p}, s)\bar{u}(\mathbf{p}, s) &= \not{p} + m, \\ \sum_{s=\pm} v(\mathbf{p}, s)\bar{v}(\mathbf{p}, s) &= \not{p} - m. \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

謝辞

本論文を執筆するにあたり，多大な時間を割いて指導してくださいました安田修教授，北澤敬章助教に心より感謝いたします。また研究室のメンバーである深澤信也さん，酒井裕企さん，芝田健仁さん，柳田秀明さんには日頃から貴重な助言をいただき大変感謝しております。そして同期の大場雅男君，松坂勇志君，後輩の藤本侑貴君には普段から大変お世話になりました。最後に，いつも私のことを支えてくれた家族に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [3] A. Salam, Conf. Proc. C **680519**, 367 (1968).
- [4] H. D. Politzer and M. B. Wise, Phys. Lett. B **206**, 681 (1988).
- [5] N. Isgur and M. B. Wise, Phys. Lett. B **232**, 113 (1989).
- [6] H. Georgi, Phys. Lett. B **240**, 447 (1990).
- [7] M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, Phys. Rept. **164**, 217 (1988).
- [8] N. Kitazawa and T. Kurimoto, Phys. Lett. B **323**, 65 (1994) [hep-ph/9312225].
- [9] M. Bando, T. Kugo, S. Uehara, K. Yamawaki and T. Yanagida, Phys. Rev. Lett. **54**, 1215 (1985).
- [10] K. A. Olive *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).
- [11] C. Patrignani *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Chin. Phys. C **40**, no. 10, 100001 (2016).