

# 修士学位論文

題名 MINOS実験の解析の再考

指導教員

安田修

教授/准教授

2019 年 1 月 8 日 提出

首都大学東京大学院

理工学研究科

物理学専攻

専攻

学修番号

17879319

氏名

鈴木 啓介

# MINOS 実験の解析の再考

素粒子理論研究室  
鈴木啓介

素粒子物理学においてニュートリノと呼ばれる素粒子が存在する。この素粒子粒子としての性質のみではなく波としての性質を持つ。この波としての性質に着目した場合に3つの固有状態（質量固有状態）に分けられると考えられている。ニュートリノはこの3つの要素が干渉した状態で存在している。混ざり合った状態は電弱相互作用によって、質量固有状態とは別の3つの固有状態（フレーバー固有状態）として観測されている。我々が観測出来るのはフレーバー固有状態でのニュートリノだけであるので、常に質量固有状態の波が合成されたニュートリノ波を観測しているということであるため、うなりのある波を観測していることを意味する。質量固有状態は位相を持ち、時間・空間発展するためうなりが変化する。フレーバー固有状態のニュートリノの種類が変化して見える現象が生まれる。ニュートリノのフレーバーの変化を観測することで、フレーバー固有状態を形成する質量固有状態の混ざり方や質量固有状態の質量（振動パラメータ）を観測できる。そのため、振動パラメータを観測するための実験が世界中で行われている。

私はこの中で、アメリカのフェルミラボが行った MINOS 実験について研究を行った。MINOS 実験は加速器によって人工的に生成したニュートリノを検出器に飛ばし、その変化を観測する実験である。MINOS 実験の結果に対して、本来 1 に近づくほど精度の良い実験であることを示す実験の指標値が 1 から外れた値を持ち、精度が良くないと言われている。また、論文に振動パラメータが、重みのない範囲のみで書かれていることから、本研究ではニュートリノとその反粒子である反ニュートリノに対して、その指標値を改善することを動機として、現象論的に補正を入れて解析を再度行った。また、その解析から得られた振動パラメータが T2K や NOvA といった他の実験が出した最新の結果と比べて如何様なものとなるかを調べた。

# MINOS 実験の解析の再考

鈴木啓介

## 目次

1	ニュートリノ	2
1.1	elementary particle としてのニュートリノ	2
1.2	ニュートリノ振動	2
2	MINOS 実験	4
2.1	MINOS 実験の概要	4
2.2	MINOS 実験と他のニュートリノ振動実験	10
3	カイ二乗検定を用いた評価によるニュートリノ振動パラメータの best-fit の導出	11
3.1	解析手法	11
3.2	イベント数の理論値の再導出	11
3.3	ニュートリノの持つエネルギーを考えた場合の bin への補正	17
3.4	カイ二乗と物理量の導出	18
4	結果	18
5	結論	24
付録 A		24
A.1	尤度関数と逸脱度	24
A.2	カイ二乗とカイ二乗検定	25
A.3	散逸度に対するカイ二乗検定の応用	26
A.4	ポアソンの適用	27

# 1 ニュートリノ

## 1.1 elementary particle としてのニュートリノ

100 年の間で物質を構成する 'elementary particle' の定義は大きく変わってきた。19 世紀後半までは、物質の最小単位が原子であると考えられていたが、1897 年に電子の存在が発見されることで、原子の内部構造が存在することが明らかになった。その後、1911 年には原子核が発見され、1932 年までに陽子と中性子の存在が明らかになり、原子核の構成要素も明らかになった。その後、加速器技術などの発達により、より小さな粒子の存在が徐々に明らかになり、現在はハドロンとレプトンと呼ばれる 2 つの粒子分類群が素粒子と呼ばれている。その中でレプトンに属するニュートリノは 3 つのフレーバーによって構成される。

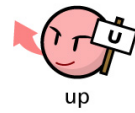











		電荷 Charge	世代 Generation
		スピン Spin	I      II      III
クォーク Quarks	$+2/3$	$1/2$	 up  charm  top
	$-1/3$	$1/2$	 down  strange  bottom
	$-1$	$1/2$	 electron  muon  tau
レプトン Leptons	0	$1/2$	 electron neutrino  muon neutrino  tau neutrino

図 1 物質を構成する粒子

このニュートリノの存在が初めて予言されたのは、1930 年にオーストリアのパウリが放射性元素の原子核が出す放射線のエネルギー分布を研究において、エネルギーの消失が観測され、その原因を当時の理論には存在しない電気中性の粒子の存在が示唆されたことである。現在ではよく知られていることだが、弱い相互作用のみに反応性を持つことから他の素粒子に比べ反応性が低い。その性質により、実際に存在が確認されるまで 26 年の歳月が費やされた。

## 1.2 ニュートリノ振動

ニュートリノは大きく分けて 2 つの固有状態をもつ。1 つ目は前述のフレーバーの固有状態 ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) である。我々が実験において観測しているニュートリノはこの固有状態で観測される。2 つ目は空間を伝搬して

いる際のニュートリノの状態である。これは、質量固有状態 ( $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ ) とされている。

フレーバー固有状態は質量固有状態の混合状態として記述できる。Unitary matrix によって次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

ここで、

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} \cos \theta_{13} & \sin \theta_{12} \cos \theta_{13} & \sin \theta_{13} e^{-i\delta} \\ -\sin \theta_{12} \cos \theta_{23} - \cos \theta_{12} \sin \theta_{23} \sin \theta_{13} e^{i\delta} & \cos \theta_{12} \cos \theta_{23} - \cos \theta_{12} \sin \theta_{23} \sin \theta_{13} e^{i\delta} & \sin \theta_{23} \cos \theta_{13} \\ \sin \theta_{12} \sin \theta_{23} - \cos \theta_{12} \cos \theta_{23} \sin \theta_{13} e^{i\delta} & -\cos \theta_{12} \sin \theta_{23} - \sin \theta_{12} \cos \theta_{23} \sin \theta_{13} e^{i\delta} & \cos \theta_{23} \cos \theta_{13} \end{pmatrix}$$

我々がニュートリノを観測するとき、質量固有状態の混合の状態であるフレーバー固有状態を観測しているが、このフレーバーがニュートリノの持つ量子効果により変化してしまう現象がある。このような現象をニュートリノ振動という。

具体例として、 $\nu_\alpha$  と  $\nu_\beta$  の 2 フレーバー間のニュートリノ振動について議論を行う。議論のスタート地点として

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

から議論を始めることにする。

ここで、それぞれの時刻における弱い相互作用の固有状態を質量の固有状態によって記述できる。

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t)\rangle &= \cos \theta |\nu_1(t)\rangle + \sin \theta |\nu_2(t)\rangle, \\ |\nu_\beta(t)\rangle &= -\sin \theta |\nu_1(t)\rangle + \cos \theta |\nu_2(t)\rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

さらに、質量の固有状態に対してディラック方程式を解くことで得られる

$$\begin{aligned} |\nu_1(t)\rangle &= e^{-iE_1 t} |\nu_1(0)\rangle, \\ |\nu_2(t)\rangle &= e^{-iE_2 t} |\nu_2(0)\rangle \end{aligned}$$

を (1.2) に代入すると、

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t)\rangle &= \cos \theta e^{-iE_1 t} |\nu_1(0)\rangle + \sin \theta e^{-iE_2 t} |\nu_2(0)\rangle, \\ |\nu_\beta(t)\rangle &= -\sin \theta e^{-iE_1 t} |\nu_1(0)\rangle + \cos \theta e^{-iE_2 t} |\nu_2(0)\rangle \end{aligned} \quad (2.2)'$$

ここで、 $t = 0$  の場合における (1.2) の  $\nu_1$ 、 $\nu_2$  についての関係式を (2.2)' に代入すると、

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t)\rangle &= \cos \theta e^{-iE_1 t} (\cos \theta |\nu_\alpha(0)\rangle - \sin \theta |\nu_\beta(0)\rangle) + \sin \theta e^{-iE_2 t} (\sin \theta |\nu_\alpha(0)\rangle + \cos \theta |\nu_\beta(0)\rangle) \\ &= (e^{-iE_1 t} \cos^2 \theta + e^{-iE_2 t} \sin^2 \theta) |\nu_\alpha(0)\rangle + \cos \theta \sin \theta (e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}) |\nu_\beta(0)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\nu_\beta(t)\rangle &= -\sin \theta e^{-iE_1 t} (\cos \theta |\nu_\alpha(0)\rangle - \sin \theta |\nu_\beta(0)\rangle) + \cos \theta e^{-iE_2 t} (\sin \theta |\nu_\alpha(0)\rangle + \cos \theta |\nu_\beta(0)\rangle) \\ &= \cos \theta \sin \theta (e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}) |\nu_\alpha(0)\rangle + (e^{-iE_1 t} \sin^2 \theta + e^{-iE_2 t} \cos^2 \theta) |\nu_\beta(0)\rangle \end{aligned}$$

時刻  $t = 0$  から  $t$  までの弱い相互作用の固有状態の変化について記述することができた。この式を用いて変化率も記述することが出来る。 $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  の変化率は

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |\langle \nu_\beta(t) | \nu_\alpha(0) \rangle|^2 \\ &= |\cos \theta \sin \theta (e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t})|^2 \\ &= \sin^2 2\theta \times \sin^2 \left( \frac{E_2 - E_1}{2} t \right). \end{aligned}$$

と書ける。この式から分かるようにニュートリノが位相を持ち、その位相が時間発展するために場所場所で異なるフレーバーのニュートリノが観測されている。

3 フレーバー間の振動は多くの場合 2 フレーバー間の振動現象として近似することができる。前述の操作を行うと、今回の研究で扱う MINOS の  $\nu_\mu$  disappearance は次のような式で与えられる。

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left( 1.267 \times \frac{\Delta m^2 [\text{eV}^2] \cdot L [\text{km}]}{E [\text{GeV}]} \right) \quad (2.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \sin^2 2\theta &= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} (1 - \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23}) \\ \Delta m^2 &= \Delta m_{32}^2 + \sin^2 \theta_{12} \Delta m_{21}^2 + \cos \delta_{CP} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{12} \tan \theta_{23} \Delta m_{21}^2 \end{aligned}$$

この式中出现してくる  $\theta_{ij}$  や  $\Delta m_{ij}^2$  は振動パラメータと呼ばれ、本研究で扱っている MINOS などが観測しているニュートリノの変化確率つまりニュートリノ振動の確率を知ることにより、その詳細を求めることが出来る。

また、弱い相互作用のみで相互作用を行うニュートリノではあるが、物質効果も考えられている。ここで言うところの物質効果とはニュートリノが密度の高い物質中で感じるポテンシャルのことであり、弱い相互作用の固有状態のニュートリノの中で感じるポテンシャル異なる。この効果は MSW 効果とも言われる。この効果は前述の (2.1) に項を加えることで式に取り込むことが出来る。

## 2 MINOS 実験

この章では本研究で扱う MINOS 実験がどのような立ち位置に存在しているのかの理解を深めることを目的に簡単ではあるが実験概要を示し、その結果について他の実験との比較する。

### 2.1 MINOS 実験の概要

1900 年代後半に技術の進歩により広範囲のエネルギー帯を観測できるようになり、それまで上手くいっていた標準模型だけでは説明しきれない物理の存在が明らかになった。理論では標準模型を超えた物理を記述するための理論形成が行われるようになった。実験ではさらなる未発見の物理現象の探索と提唱された新しい理論の検証が行われるようになった。MINOS 実験はそのような時代の流れの中でニュートリノ振動とニュートリノ質量に関係する現象の観測のために計画された。

この MINOS 実験はアメリカの Fermi lab にて行われた実験プロジェクトであり、長基線ニュートリノと大気ニュートリノの観測が行われていた。

長基線ニュートリノは人工的に生成したニュートリノを長距離間飛ばし、その間でのフレーバーの変化を測定するものである。また、大気ニュートリノとは宇宙から地球に降り注ぐ宇宙線が大気中の原子核と衝突することで生成されるニュートリノの振動現象を確認するものである。

本研究で扱う長基線ニュートリノでは、振動源として  $\nu_\mu$  と  $\bar{\nu}_\mu$  のビームを用意し、 $\nu_\mu$  ( $\bar{\nu}_\mu$ ) disappearance と  $\nu_e$  ( $\bar{\nu}_e$ ) appearance を観測している。より精度良く観測を行うために、式 (2.3) の振動確率を最大になるよう 3GeV のエネルギーを持つニュートリノが 735km の距離の飛行する間でのニュートリノ振動を観測した。[図 2]

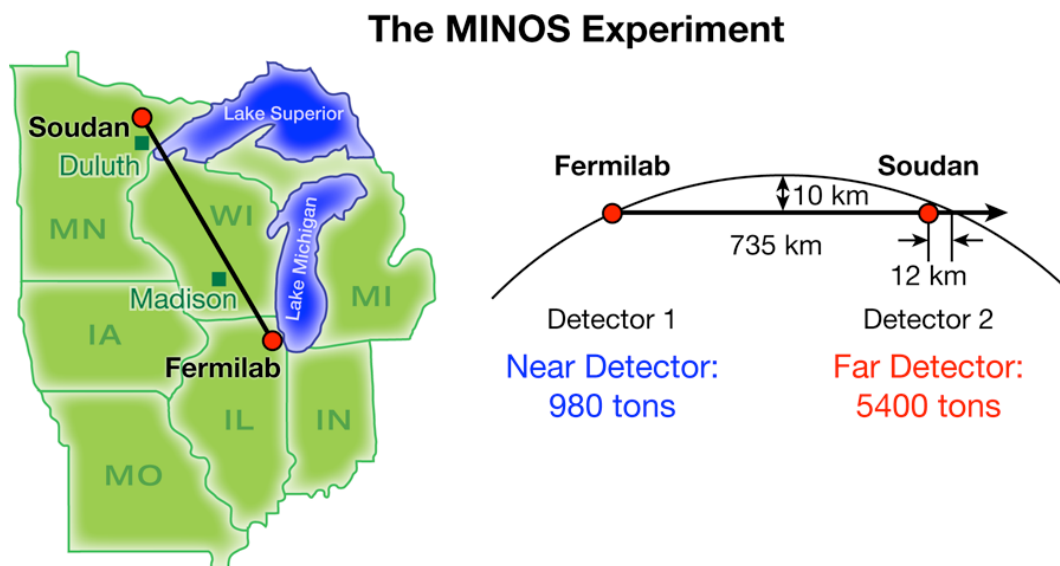


図 2 NuMI ビーム line(引用元)

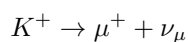
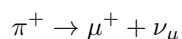
この実験では、2005 年から 2012 年までの間でデータの収集が行われた。ニュートリノについては、総計  $10.71 \times 10^{20}$  POT のニュートリノビームをデータサンプルとして集められた。さらに、反ニュートリノについてのデータ収集もニュートリノに遅れて行われ、総計  $3.36 \times 10^{20}$  POT の反ニュートリノビームをデータサンプルとして集めた。[図 3]

#### 2.1.1 MINOS 実験のニュートリノビーム

MINOS project で用いたニュートリノビームは NuMI (Neutrinos at the Main Injector) ビームを用いて作られている。このビーム生成装置は MINOS の他、NOvA や MINERvA、MINOS+ にも用いられている。

NuMI ビームは Main Injector から陽子を取り出すことから始まる。同時期に Main Injector は MINOS の NuMI 以外にも Tevatron[[2]] にも用いられた。[図 4]

次にニュートリノビームの生成機構について説明する。このビームの生成は、Main Injector にて 120GeV に加速した陽子を graphite target に照射し、炭素の原子核と衝突させることでパイオンやカイオンなどの大量のハドロンを生成させることから始まる。[図 5] 生成されたハドロンはヘリウムで満たされた decay pipe 内で崩壊現象を引き起こす。このハドロンが崩壊すると荷電レプトンを伴って、ミューオンニュートリノが生成される。



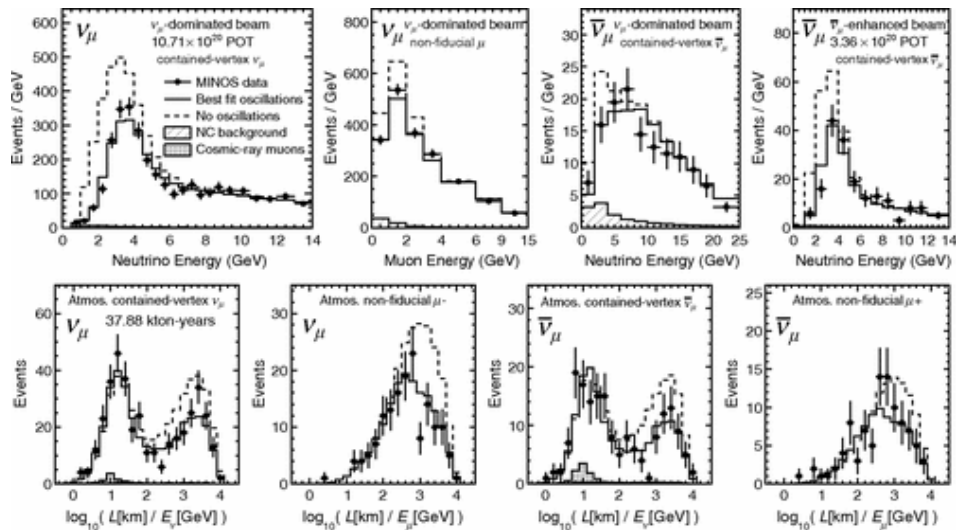


図3 MINOS イベント(上段:長基線ニュートリノ、下段:大気ニュートリノ)(引用元)

その後、実験に必要な荷電レプトンや decay pile 内で崩壊しなかったハドロンはそれぞれ shield や absorber を用いてビームから除外される。

なお、反ミューオンニュートリノに関しては主に negative ハドロンの崩壊によって生成されるが、 $K^+$  や  $K^0$  などが反電子ニュートリノに副次的に崩壊したものからも生成される。

今回 positive ハドロンと negative ハドロンは同時に生成されるためそのままではニュートリノビームと反ニュートリノビームを独立に取り出せないが、崩壊現象以前に2つの magnetic horn を用いて磁場を印加し、ハドロンを分けている。この操作のおかげで、ある程度の精度で間接的にニュートリノライクなビームと反ニュートリノライクなビームを分けることが出来ている。

### 2.1.2 MINOS 実験の検出器と検出メカニズム

この実験では振動現象を観測するために、振動の前後のニュートリノビームを観測する2つの検出器が用いられている。振動前のニュートリノビームを観測する検出器(Near Detector、いわゆる前置検出器。以後 ND)は0.98 ktの質量を持ち、フェルミラボ内のターゲットから1.04kmの場所に位置する。振動後のニュートリノビームを観測する検出器(Far Detector、いわゆる後置検出器。以後 FD)は5.4ktの質量を持ち、ターゲットから735km離れたNorthern MinnesotaのSoudan Mineの地下705mの場所に存在する。

MINOSのNDとFDは同じ機能を持ち、鋼板とポリスチレンシンチレータがサンドウィッチ状に重なりあった構造を持つ。[図7]また、2つの検出器にはともにトロイダル磁場が印加されている。

この検出器は一般に磁化鉄検出器と呼ばれ、1980年代に標準理論の検証に用いられた高エネルギーニュートリノ実験測定器をベースとしており、性能として不必要な部分を省略し大型化することでニュートリノ振動の測定に特化させたものである。[[3]]そのため、高エネルギーミューオンとハドロンシャワーの観測に向いている。この検出器の測定可能な物理量は、荷電粒子の電荷、荷電粒子のエネルギー、ミューオンが検出器に入ってきた方向、ハドロンのエネルギーである。



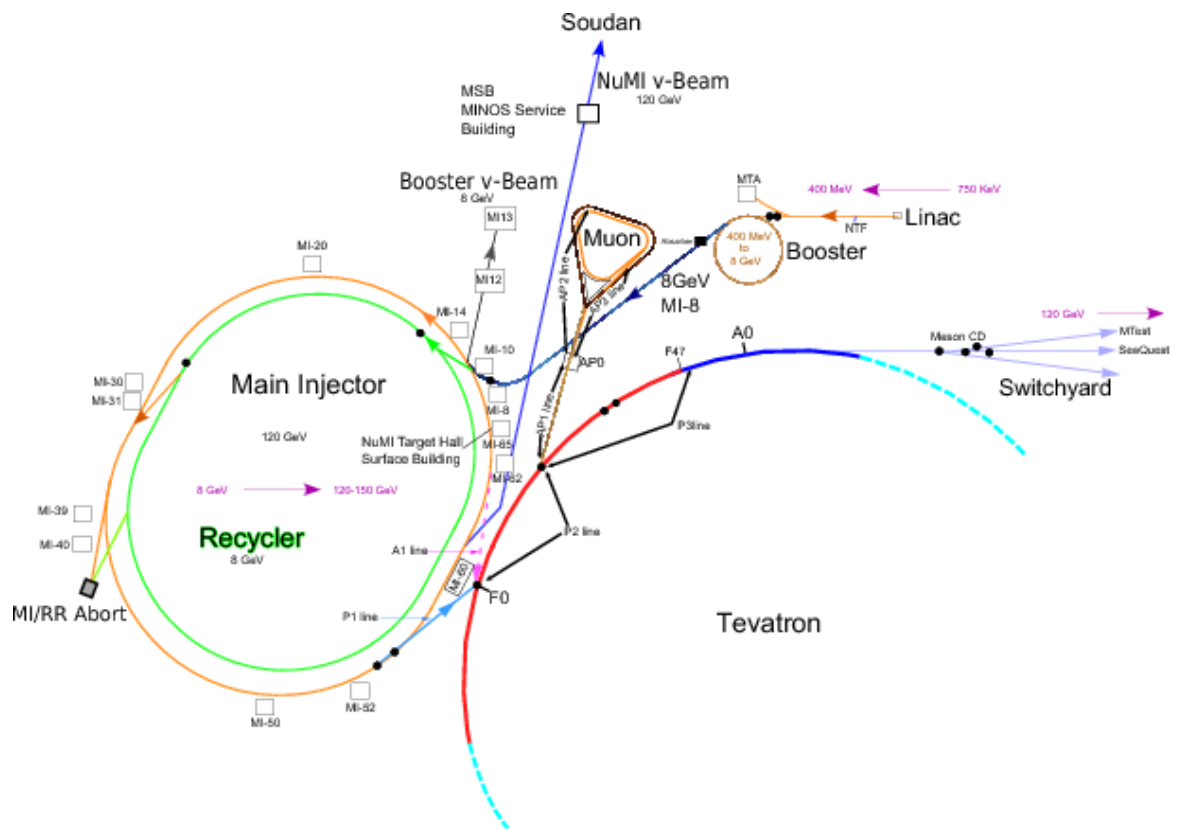


図4 MIからのNuMIビームへの陽子ビーム受け渡し(引用元)

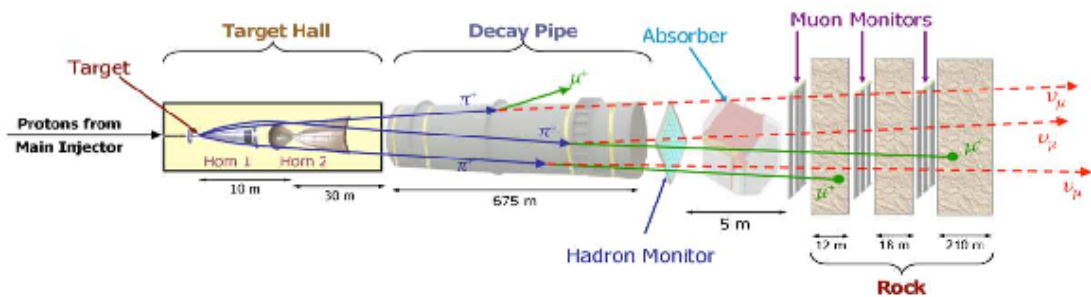


図5 NuMIビームによるニュートリノビーム形成過程(引用元)

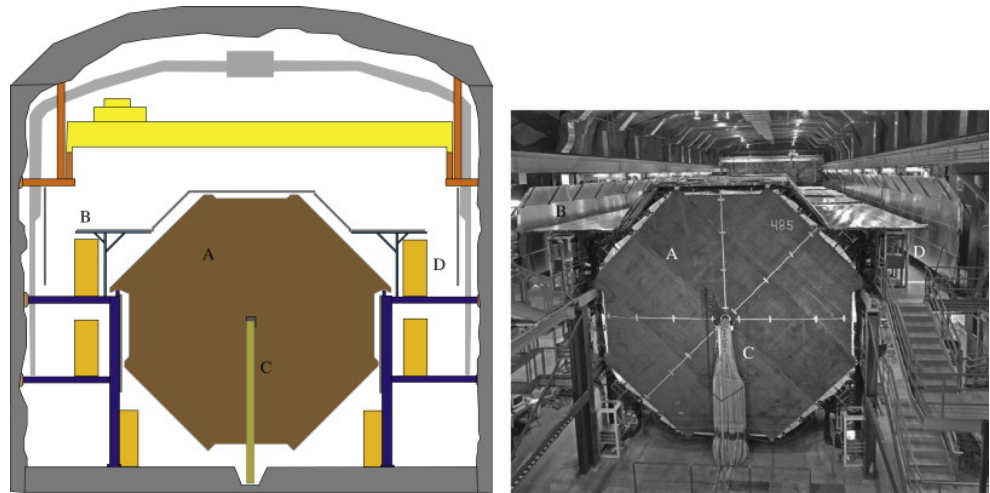


図6 FDをフェルミラボから見た図(左:模式図、右:写真)(引用元)  
 (A:鋼板、B:宇宙線の影響を減らす shield、C:電磁コイル、D:電子機器のラック)

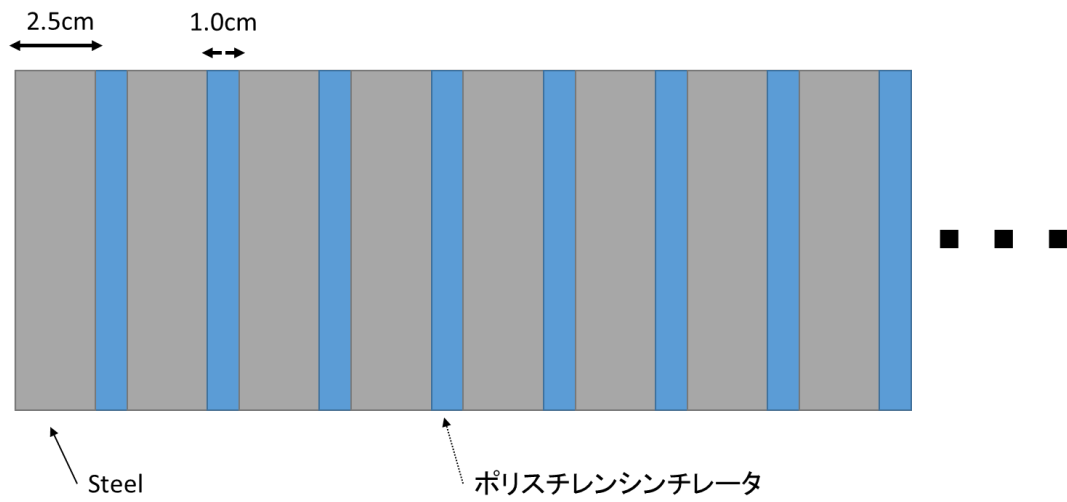
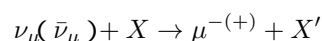


図7 サンドウィッチ構造の概要図

ここで、簡単に観測メカニズムを述べる。ニュートリノが鋼板の原子核内部に侵入すると崩壊現象を引き起こす。特に、この観測における main channel はミューオンニュートリノと反ミューオンニュートリノの CC interaction に由来するものである。この反応は以下の反応式によって記述されるものである。



この反応によって生成された荷電レプトンがシンチレータ内に入射すると、エネルギーを光（シンチレーション光）として放出しながら内部を進む。シンチレータ内に波長シフトファイバーと呼ばれるファイバーが入っており、このファイバーによって光が集められ、光電子増倍管に伝えられる。この過程によって集められた光の分布を読み解くことで、間接的にニュートリノを観測している。

### 2.1.3 ニュートリノイベントの観測と判別

ここでニュートリノイベントがどのような形で観測されるのかを具体例としてあげる。[図 8]

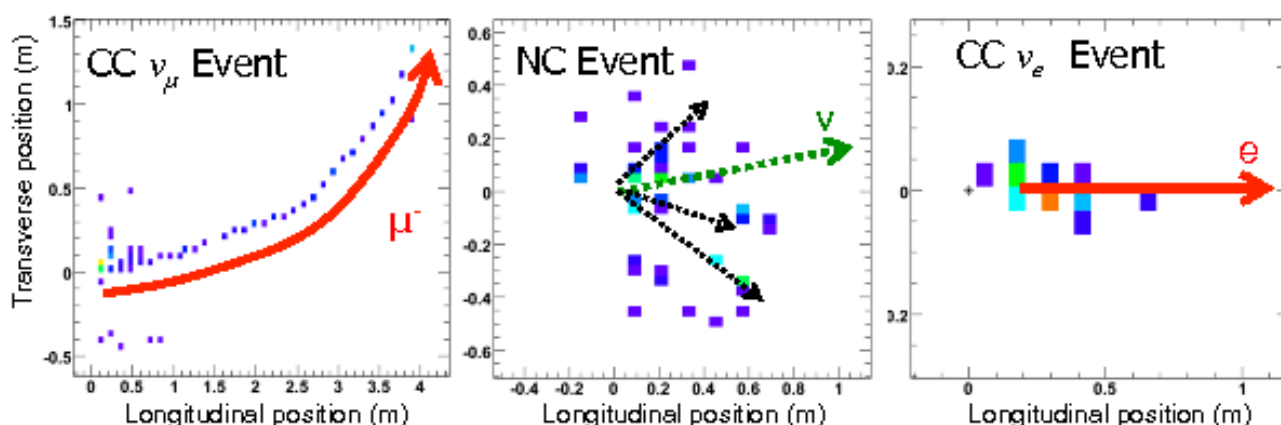
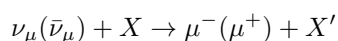


図 8 MINOS で観測されるニュートリノイベント

図 8 から  $\nu_\mu$  CC は長い軌跡として観測できる。一方で、NC では拡散するシャワー（ハドロン）が観測でき、 $\nu_e$  CC は NC と似通った形のシャワーが観測できるため、この形式の検出器では  $\nu_e$  CC を  $\nu_\mu$  と  $\nu_e$  NC と見分けるのは困難である。MINOS 実験では事象の判別のため、Library Event Matching と呼ばれる方法を用いることによってそれぞれの事象を判別している。

また、ニュートリノと反ニュートリノとはトロイダル磁場が印加されていることで CC



によって生じた荷電レプトンの曲がり方に違いが出るので、曲げられた方向によってニュートリノによるのか、反ニュートリノによるのかを区別している。

## 2.2 MINOS 実験と他のニュートリノ振動実験

前節で MINOS 実験の概要を説明した。この実験は 2012 年に終了しているが、現行のニュートリノ振動実験であり同じ振動パラメータを測定している NOvA (米) [[4]] や T2K (日) [[5]] が結果を議論する際に比較材料として用いられている。図 9 はこれらの実験についての最新の結果についてまとめられたものである。

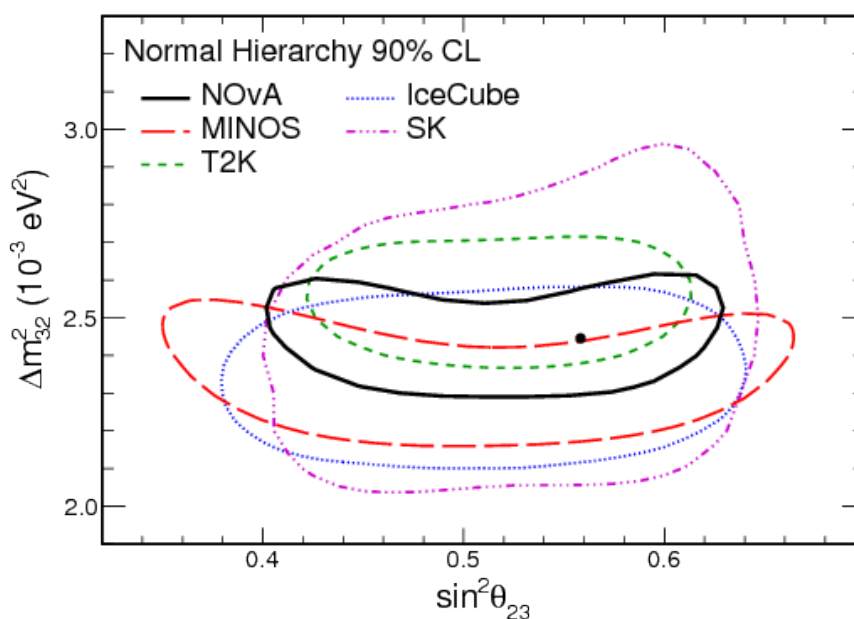


図 9 各実験における 90% C.L. における  $\Delta m_{32}^2$  と  $\sin^2 \theta_{23}$  の allowed region

### 3 カイ二乗検定を用いた評価によるニュートリノ振動パラメータの best-fit の導出

前章では MINOS 実験とその結果を紹介したが、その結果を出すために用いた解析は後に説明するカイ二乗という指標値をもってして、あまり良くない解析であると言われている。また、解析で用いられているはずの断面積の値が実験の結果を再現出来ていないと言われている。本研究ではカイ二乗を改善する解析手法を提案することで MINOS 実験の結果の解析手法を再考する。以下では、その方法について具体的に議論することにする。

#### 3.1 解析手法

まず、本研究の再解析の全体の流れについて説明する。本研究では Fermi lab が [6] にて公表している MINOS 実験の結果に対してニュートリノと反ニュートリノの両方について評価を行う。

1. 振動前のイベント数のデータを元にして、理論から振動後のニュートリノイベント数を導出する。
2. MINOS 実験の結果と合わせてカイ二乗を求める。
3. 尤度比検定を用いて点推定を行う。

尤度比検定を用いてカイ二乗の最小値を求め、カイ二乗を自由度で割った reduced カイ二乗の値が最も 1 に近づく点において、このときの  $\sin^2 \theta_{23}$  と  $\Delta m_{23}^2$  を bestfit ポイントとする。

4. 点推定で求めた基準に対して、カイ二乗検定を用いて区間推定を行う。

尤度比検定で求めたカイ二乗の最小値を基準として、カイ二乗検定を用いて 90% C.L. の範囲で振動パラメータを求めている。

このときのカイ二乗は、

$$\chi_{\text{poisson}}^2 = 2 \times \sum_i [y_i - n_i - n_i \log(y_i/n_i)] \quad (4.1)$$

で与えられる。ここで、 $y_i$  はイベント数の理論値であり、 $n_i$  は実験由来のイベント数の観測値である。

以下の節では本節で紹介した過程について、それぞれの詳細を説明する。

#### 3.2 イベント数の理論値の再導出

この節では振動前のイベント数のデータから振動後のニュートリノイベント数を導出する方法を紹介する。

Fermilab が解析に用いた振動後のイベント数の理論値は、振動がないと考えた場合のイベント数 (ND のデータ) から各種シミュレーションを用いた算出によるものである。

本研究においては ND における観測結果は用いるが、シミュレーションソフトを使わずに、ND における観測結果に対しての振動確率をかける単純計算を用いて算出した値を理論値として用いている。

この計算は以下のように記述される。

$$y_i(E_i) = y_i^0(E_i) \times P(E_i, \Delta m_{23}^2, \sin^2 \theta_{23})$$

ここで、 $y_i(E_i)$  は振動現象が存在する場合において、FD で観測されるはずのイベント数であり、 $y_i^0(E_i)$  は

ND で観測されたイベント数である。

このイベント数を求めるにはニュートリノ振動パラメータが必要になる。まず、この近似方法を評価するために MINOS の NH の bestfit パラメータ [7]

$$\text{NH かつ } \theta_{23} < \pi/4 \text{ の場合 : } \sin^2 \theta_{23} = 0.41, \Delta m_{23}^2 = 2.37 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

$$\text{NH かつ } \theta_{23} > \pi/4 \text{ の場合 : } \sin^2 \theta_{23} = 0.61, \Delta m_{23}^2 = 2.35 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

を用いて、実際にイベント数理論値を見てみる。[図 10][図 11][図 12][図 13]

これらの場合において、式 (4.1) を用いて reduced chi square を計算する。図 10、11 の場合に対して計算すると  $\chi_{red}^2 = \chi_{poisson}^2 / D.o.F. \sim 7.2 > 1$ 、図 12、13 の場合に対して計算すると  $\chi_{red}^2 = \chi_{poisson}^2 / D.o.F. \sim 14 > 1$  となり実験結果を記述しきれていないことが分かった。

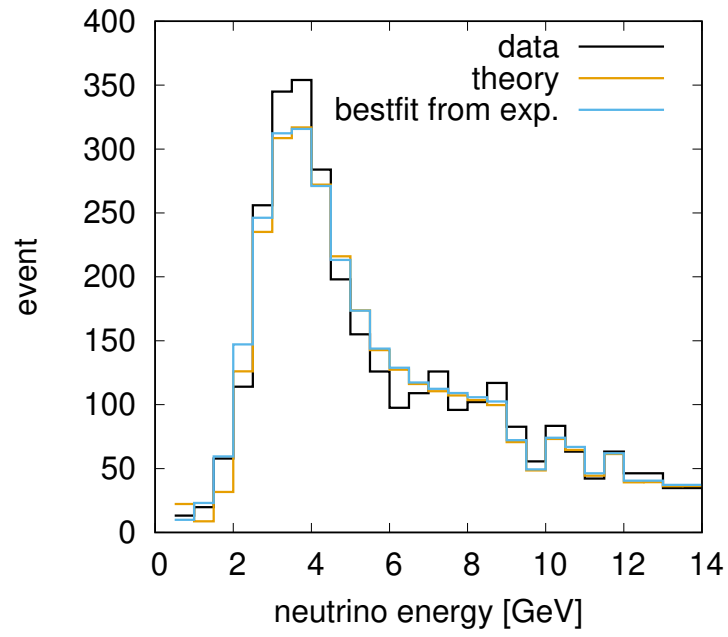


図 10  $\sin^2 \theta_{23} = 0.61$ ,  $\Delta m_{23}^2 = 2.35 \times 10^{-3} eV^2$  のときの MINOS 由来の NHbestfit 値を用いた場合のミュオンニュートリノのイベント数 (黒線: 測定データ、黄線: 自らが求めた理論値、青線: MINOS がシミュレーションを用いて算出した理論値)

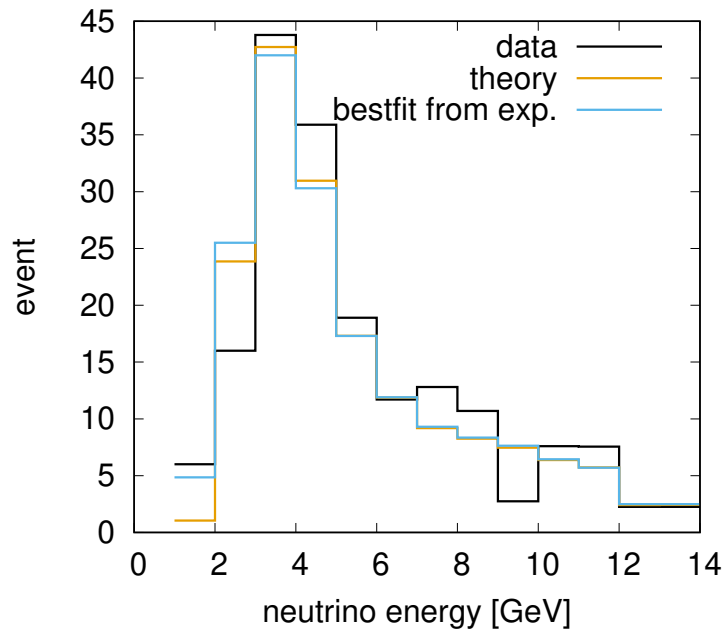


図 11  $\sin^2 \theta_{23} = 0.61$ ,  $\Delta m_{23}^2 = 2.35 \times 10^{-3} eV^2$  のときの MINOS 由来の NHbestfit 値を用いた場合の反ミュオンニュートリノのイベント数 (黒線: 測定データ、黄線: 自らが求めた理論値、青線: MINOS がシミュレーションを用いて算出した理論値)



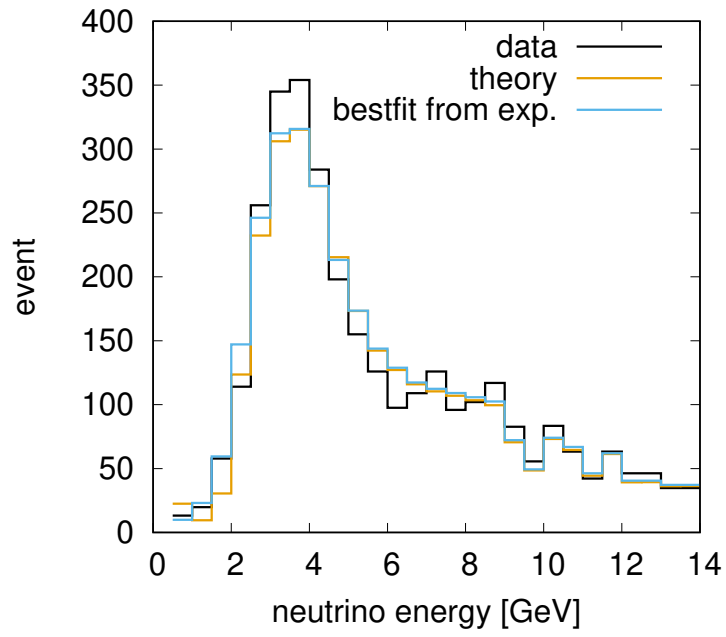


図 12  $\sin^2 \theta_{23} = 0.41$ ,  $\Delta m_{23}^2 = 2.37 \times 10^{-3} eV^2$  のときの MINOS 由来の NHbestfit 値を用いた場合のミュオンニュートリノのイベント数 (黒線: 測定データ、黄線: 自らが求めた理論値、青線: MINOS がシミュレーションを用いて算出した理論値)

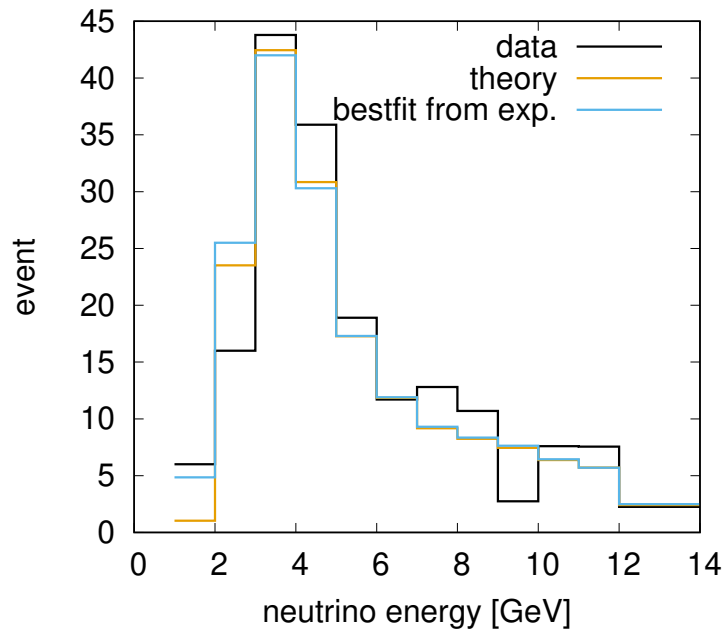


図 13  $\sin^2 \theta_{23} = 0.41$ ,  $\Delta m_{23}^2 = 2.37 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$  のときの MINOS 由来の NHbestfit 値を用いた場合の反ミュオンニュートリノのイベント数 (黒線: 測定データ、黄線: 自らが求めた理論値、青線: MINOS がシミュレーションを用いて算出した理論値)

### 3.3 ニュートリノの持つエネルギーを考えた場合の bin への補正

上記の計算で導出した値だけで議論を行うと MINOS の実験結果とは一致しない。MINOS 実験の実験値を正確に記述するためには更なる操作が必要である。また、図から実験データと理論値を比べると、この実験で最も振動現象が観測することの出来るエネルギー値でのイベント数が異なることが分かる。また、MINOS 実験の解析では断面積の実験値を再現できていないという批判があることを踏まえ、エネルギー測定に誤差があるという仮説を採用し、現象論的に補正を考え再解析を行う。

補正の方法について具体的に記す。全部で  $n$  個の bin のデータが存在すると考える。それぞれの bin に対して、1つとなりの bin へのイベント数の移し替えのみを行う。次のようにイベント数を移し替えた。[図 14]

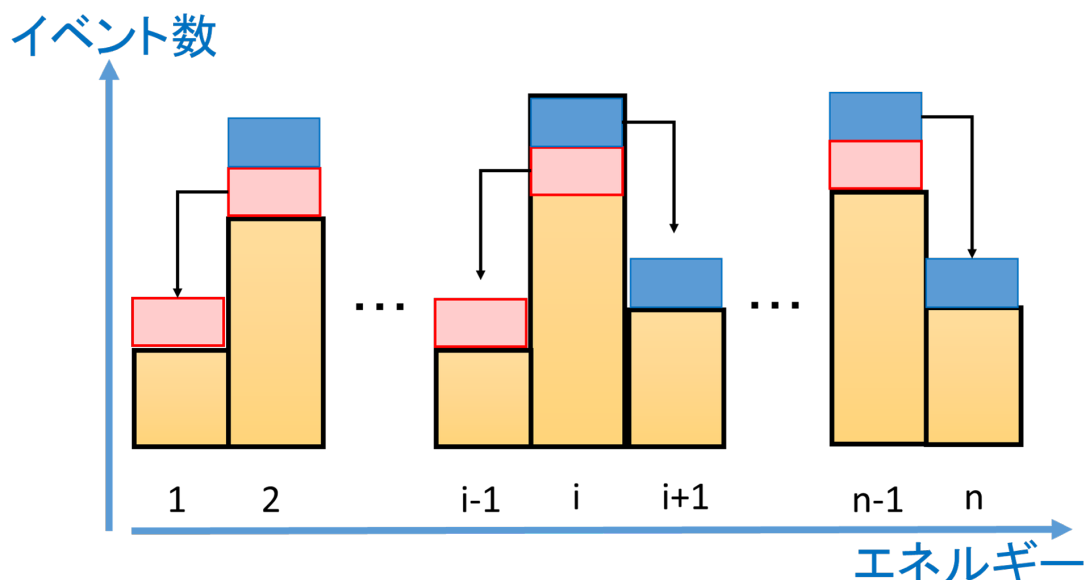


図 14 bin の取り扱い

この補正方法を数式を用いて表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 N_1^{new} &= b_1 \cdot N_2^{old} + N_1^{old} \\
 N_2^{new} &= b_2 \cdot N_3^{old} + (1 - a_1 - b_1) \cdot N_2^{old} \\
 N_i^{new} &= a_{i-2} \cdot N_{i-1}^{old} + b_i \cdot N_{i+1}^{old} + (1 - a_{i-1} - b_{i-1}) \cdot N_i^{old} \quad (i = 3, \dots, n-2) \\
 N_{n-1}^{new} &= a_{n-3} \cdot N_{n-2}^{old} + (1 - a_{n-2} - b_{n-2}) \cdot N_{n-1}^{old} \\
 N_n^{new} &= a_{n-2} \cdot N_{n-1}^{old} + N_n^{old}
 \end{aligned}$$

このとき、 $N_i^{old}$  は移し替え前の  $i$ bin 目のイベント数であり、 $N_i^{new}$  は移し替え後の  $i$ bin 目のイベント数である。イベント数を  $i+1$  番目の bin から 1つ前のエネルギー bin に移す係数を  $a_i$  とし、1つ後ろのエネル

ギー bin に移す係数を  $b_i$  とした。この補正を行うにあたり、カイ二乗についても補正が必要であると考えた。

今回、この補正により

$$\chi_{prior}^2 = \sum_{i=0}^{n-3} \frac{a_i^2 + b_i^2}{\sigma^2} \quad (4.2)$$

という補正項を前述のカイ二乗に加え、

$$\chi_{sum}^2 \equiv \chi_{poisson}^2 + \chi_{prior}^2 \quad (4.3)$$

を指標値として考える。

このとき、 $\sigma$  はニュートリノの持つエネルギーに対する不定性を意味する。

### 3.4 カイ二乗と物理量の導出

以前までの節で説明したカイ二乗を用いて bestfit 値を求め、confidence level(C.L.) で議論を行うために「 $\Delta m_{23}^2$ 」、「 $\sin^2 \theta_{23}$ 」、「 $\sigma$ 」、「 $a_i$ 」、「 $b_i$ 」の値を変化させ、カイ二乗の最小値を見積もる必要がある。そのために以下の手順で計算を行う。

- (a) Marquardt Method[8] を用いて計算を行い、カイ二乗  $\chi_{sum}^2$  の最小値  $\chi_{min}^2$  を求める。
- (b) 最小値  $\chi_{min}^2$  の  $\Delta m_{23}^2$ 、 $\sin^2 \theta_{23}$ 、 $\sigma$  の bestfit 値と reduced chi square を求める。
- (c) 求めた  $\chi_{min}^2$  を用いて、 $\Delta\chi^2 = \chi_{sum}^2 - \chi_{min}^2 \leq 4.6$  となるように 90% C.L. の範囲を求める。
- (d) ほかの実験と比較を行う。

## 4 結果

この章では MINOS 実験に対して行った再解析の結果について現行実験である T2K の結果や NOvA 実験の結果と比較する。

そこで、まず各実験の bestfit 値を紹介した上で今回の再解析の結果について議論する。それぞれの NH での bestfit の値は次のようである。( [9] [10] )

$$\text{NOvA} : \sin^2 \theta_{23} = 0.56, \Delta m_{23}^2 = 2.44 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

$$\text{T2K} : \sin^2 \theta_{23} = 0.536, \Delta m_{23}^2 = 2.434 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

前述の計算から得られた結果は図 15 のようになる。

再解析における bestfit の値は、

$$\sin^2 \theta_{23} = 0.33, \Delta m_{23}^2 = 2.39 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

であり、reduced chi square の値は

$$\chi_{red}^2 = 1.000$$

となった。

なお、NH に対して振動パラメータが bestfit 値を取る場合に  $\chi_{red}^2$  を  $\sigma$  について関数として考えると図 16 のようになる。図 16 で reduced chi square が 1 に最も近づいたのは  $\sigma = 0.0569341$  のときである。

IH についても同様に計算を行う。前述の計算から得られた結果は図 17 のようになる。  
再解析における bestfit の値は、

$$\sin^2 \theta_{23} = 0.33, \Delta m_{23}^2 = -2.44 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

であり、reduced chi square の値は

$$\chi_{red}^2 = 1.0059$$

となった。

なお、IH に対して振動パラメータが bestfit 値を取る場合に  $\chi_{red}^2$  を  $\sigma$  について関数として考えると図 18 のようになる。図 18 で reduced chi square が 1 に最も近づいたのは  $\sigma = 0.0562341$  のときである。

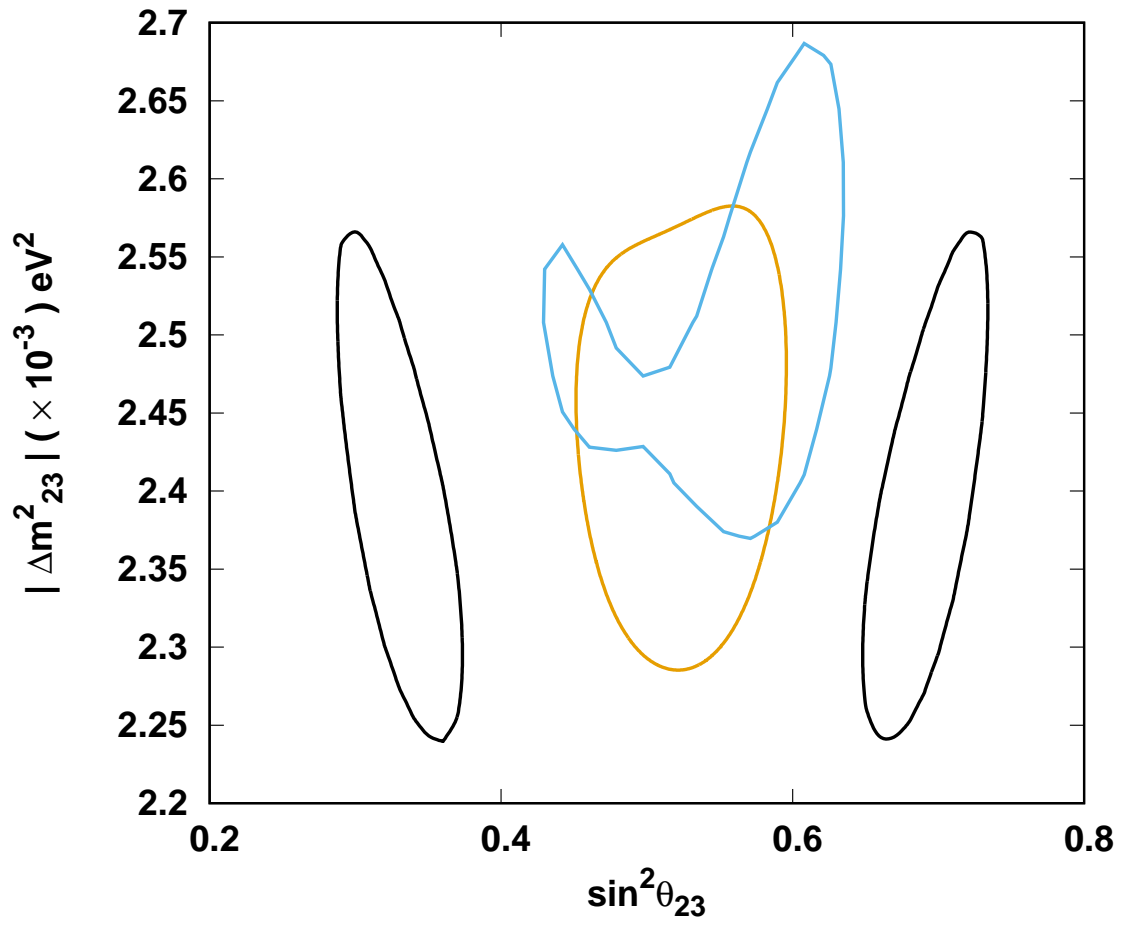


図 15 NH での  $\Delta m_{23}^2$  と  $\sin^2\theta_{23}$  に対しての二次元 90% C.L. allowed region (黒線 : 再解析、黄線 : T2K、青線 : NOvA)

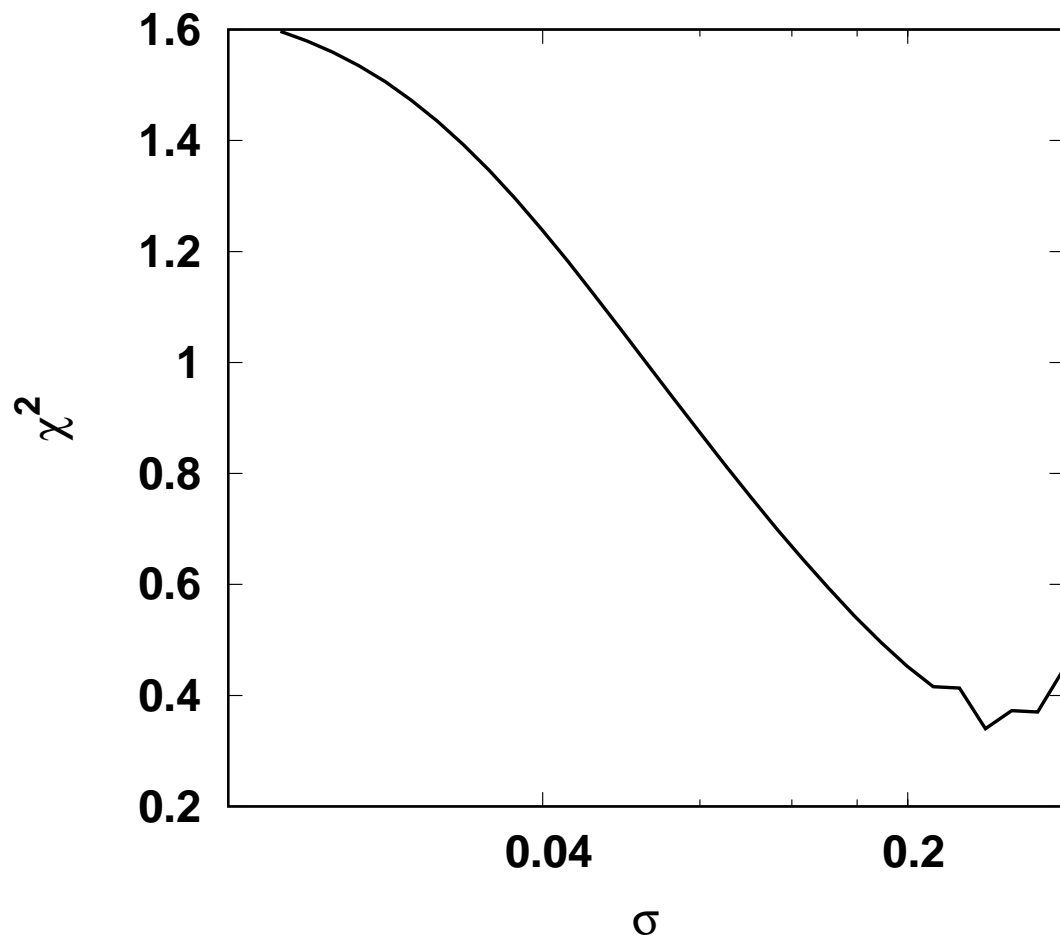


図 16  $\chi^2$  と  $\sigma$  の関係 (NH)

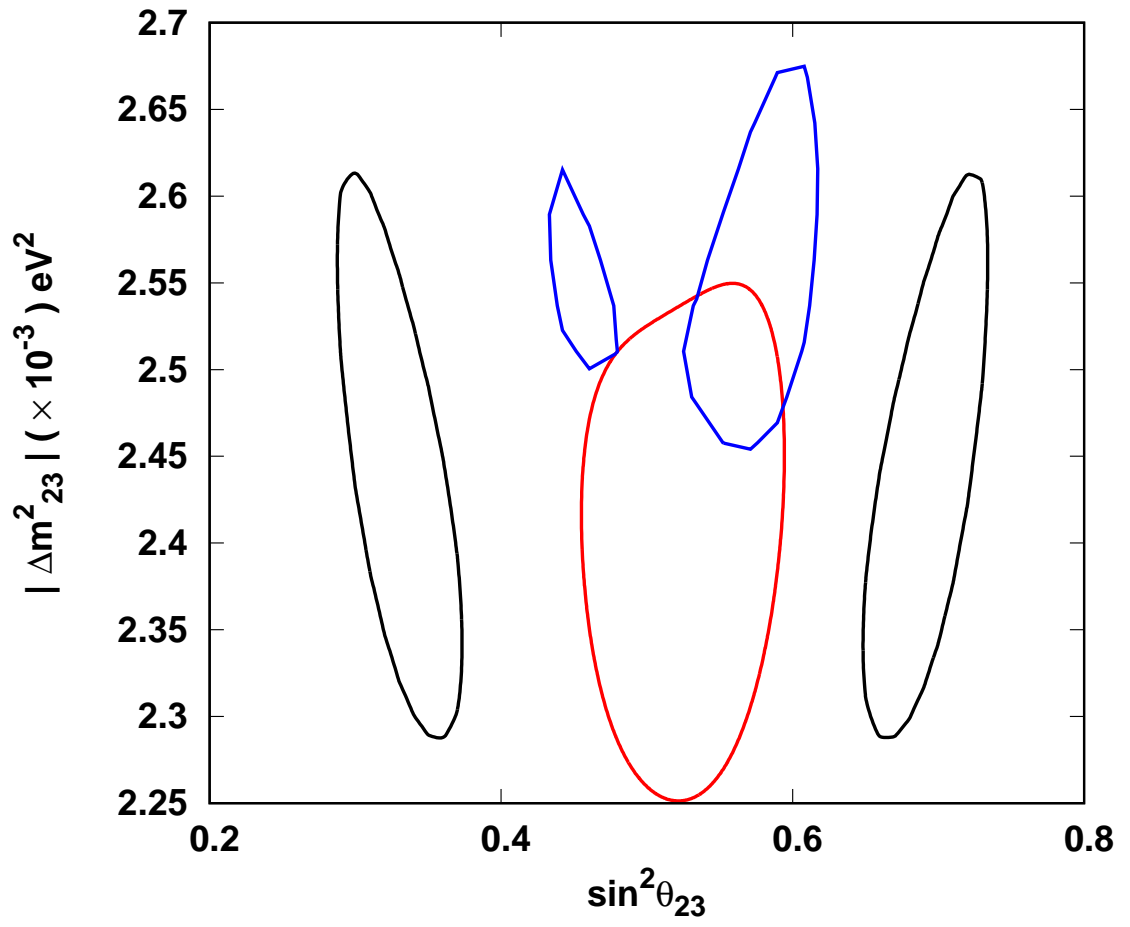


図 17 IH での  $\Delta m^2_{23}$  と  $\sin^2 \theta_{23}$  に対しての二次元 90% C.L. allowed region (黒線: 再解析、赤線: T2K、青線: NOvA)



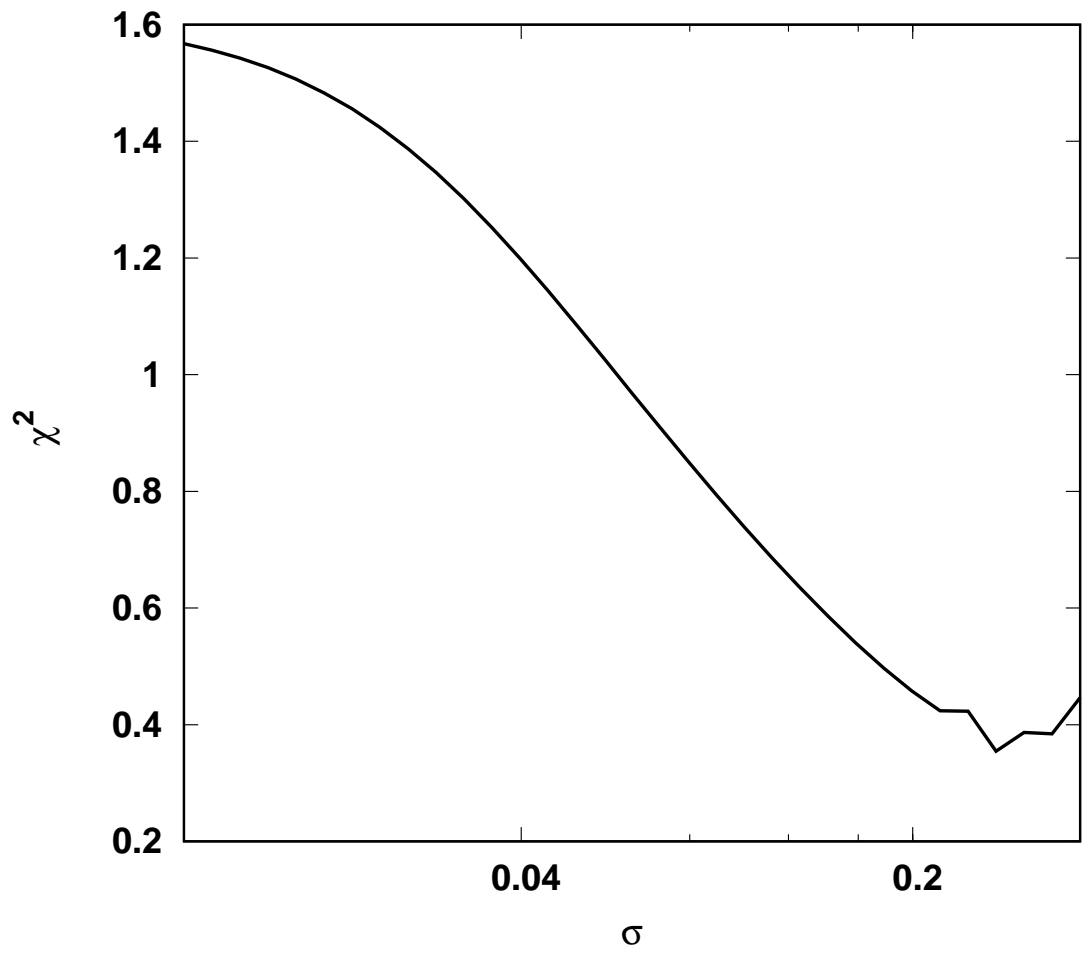


図 18  $\chi^2$  と  $\sigma$  の関係 (IH)

## 5 結論

MINOS 実験に対して、現象論的な補正を加え再解析を行った。 $\theta_{23}$  の許容領域に関しては当初の予想である  $\pi/4$  の領域とはならなかった。一方で、 $\Delta m_{23}^2$  の領域に関しては T2K・NOvA と同じ領域に解が存在している。また、カイ二乗の最小化を行うことで、MINOS 実験の数値を用いて論文での reduced chi square よりもより 1 に近い reduced chi square を導出し、reduced chi square を改善させることができた。

今後の展望としては、本研究では  $\theta_{23}$  の値を再現できなかった事実と  $\theta_{23}$  は振動現象に対してエネルギーによらないような寄与を及ぼすことを考えると、MINOS 実験のイベント数の導出方法に対して改善の余地があると考えられる。

具体的には 2 つの可能性が考えられる。1 つ目の可能性としてステライルニュートリノの寄与のように標準モデル由来の現在の 3 フレーバーのニュートリノ振動現象だけでは記述できない現象が観測に含まれている可能性がある。この場合、振動関数を新たに作り直す必要がある。振動関数が完成したら、本研究で行った計算と同様の計算を行うことでその振動関数に対しても議論ができる。もう 1 つの可能性として、振動以前のニュートリノイベント数の導出方法や過程に予期せぬ項が加わるなどして、正確なイベント数が導出されていない可能性がある。FLUX の値を用いて GLoBES など計算を行い、イベント数を導出することで確かめることが出来る。

## 付録 A

ここでは 3 章でカイ二乗として導入した逸脱度の導入過程を示す。

### A.1 尤度関数と逸脱度

まず、基本的な背景から説明を始める。

今回は、ポアソン分布に従ってニュートリノイベントの観測が行われたと考えている。そのため、ポアソン分布に従う集団に対して、その集団が正しくポアソン分布に従っているかを判定するための指標について議論する必要がある。本研究ではこの評価を行うために統計学由来の処理を行った。物理学と統計学を繋ぎ合わせるために抽象的な概念から話を始める。

#### A.1.1 尤度関数

ある事象について、その事象を適切な指標によって記述することができる時、我々はその指標を変数と呼び、この事象を分布関数と呼ばれる関数として表すことができる。このように考えると、分布関数は統計学における尤度関数の一種であることが可能である。尤度関数とは、我々が最終的な結果のみを観測した場合において、その前提条件が如何様なものであったのかを予測する場合に、その前提条件から現在の観測結果になりうる尤もらしさ、いわば可能性が (ある変数で記述される) 関数として与えられると考えたものである。これは物理学において、観測した事象がどのような分布に従うのか考えることと一致する。

そのため、 $k$  コの独立な事象  $N_1, N_2, \dots, N_k$  がある任意の分布関数  $P(\theta_i)$  に従うとすると、このときの尤度関数は次のようになる。

$$L(x_i, k) = \prod_{i=1}^k P(\theta_i)$$

ここで、 $x_i$  は  $N_i$  を記述するパラメータである。

また、尤度関数  $L(\theta_i, k)$  は尤もらしい量 (最尤推定量)  $\Theta_i$  において最大値をもつ。(考える関数形によっては最尤推定量をもたない場合も考えられる。)

### A.1.2 尤度比検定

この系における最尤推定量を  $\Theta$  と表記する。この最尤推定量を求める方法を述べる。

まず、ここで、帰無仮説を立てる:

「任意の  $\theta = \theta_0$  がこの系での最尤推定量である」 (A)

前述の尤度関数を用いて、前提事象の仮説の評価に尤度比検定を用いる。

尤度比検定とは、尤度比

$$\lambda \equiv \frac{L(\theta_0)}{L(\Theta)}$$

を定義し、この  $\lambda$  に対して棄却域を設定することで最尤推定度に近いパラメータを導出する検定手法ある。

このようにできるのは前述のように尤度関数が最尤推定量で最大値をもつという特徴をもち、仮定が正しければ  $\theta_0 \simeq \Theta$  となり  $\lambda$  は 1 に近づくためである。

この検定では  $\lambda$  を直接扱わず、指標として逸脱度  $D$  を用いることが多い。逸脱度  $D$  は、

$$D \equiv -2 \log \lambda = -2 [ \log L(\theta_0) - \log L(\Theta) ] \equiv -2 [ l(\theta_0) - l(\Theta) ]$$

のように記述される。これは尤度関数の比に対数をとったものであり、尤度関数に対数をとったもの (対数尤度関数) の差としても表される。この仮定が正しければ与えた推定値が最尤推定値に近づき、尤度比もまた 1 に近づくので逸脱度は 0 に近づく。このとき、この  $D$  が最も小さなものを選ぶことができれば最尤推定値に近い値を求めることが出来たということになる。

## A.2 カイ二乗とカイ二乗検定

この節では前節とは話が変わり、区間推定を行う方法を記述する。区間推定にはカイ二乗検定を用いることにする。

### A.2.1 カイ二乗分布

まず、カイ二乗検定の説明に入る前にカイ二乗分布の定義を示す。

$n$  コのデータ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  が標準正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

に従い、互いに独立であるとする。この場合、この確率変数の平方和  $\sum_{i=1}^n X_i^2$  が従う分布が自由度  $n$  のカイ二乗分布分布と定義される。

カイ二乗分布の分布関数は次のように記述される。

$$\chi_n^2(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n/2-1} \cdot e^{-z/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

ここで、 $n$  はカイ二乗分布の自由度を、 $z$  はこの関数の変数を示す。

### A.2.2 カイ二乗検定

前述のように記述されるカイ二乗分布に従うような期待値と観測値との適合度を表す指標値（カイ二乗<sup>\*1</sup>）について、区間推定を行う方法としてカイ二乗検定がある。この検定はカイ二乗分布に対してカイ二乗分布に従うとされる指標値について点推定などによりある値をもつと示された評価する対象がその値の近傍ではどのくらいの信頼性があるのかを評価するのに用いられる。また、カイ二乗を自由度で割った値を reduced chi square といい、この値が 1 に近づくほど良い解析であるといわれている。

検定法について詳しく説明する。この検定はカイ二乗分布において変数の存在域を与え、この区間での積分値が全区間における積分値に対してどの程度の割合を占めるのかを考えるものである。その割合は存在確率となるため、その存在確率で指標を評価するものである。例えば、自由度  $n$  のカイ二乗分布に対して、 $[a : b]$  ( $b \geq a \geq 0$ ) の閉区間に存在する確率を求めるとすると

$$P(a, b) = \int_a^b dz \left[ \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n/2-1} \cdot e^{-z/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right] / \int_0^\infty dz \left[ \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n/2-1} \cdot e^{-z/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right]$$

と書ける。

多くの場合、始点として  $a = 0$  を用いる。本研究においても、点推定で求めた基準点からのズレを考えると始点を  $a = 0$  に設定し、点推定で求めた点推定値を基準としてそのズレを考えている。

### A.3 散逸度に対するカイ二乗検定の応用

A.2.2 ではカイ二乗検定を用いた区間推定の方法を述べた。A.1.2 で述べた逸脱度もカイ二乗分布に属する。実際に逸脱度を用いて導出した点推定値から区間推定を行う方法を説明する。そのため、以下では前述の仮説 (A) が正しい場合について議論を行う。

このとき、 $\theta_0 \simeq \Theta$  であるので  $\Theta$  の近傍で  $l(\theta_0)$  を 2 次の項まで展開すると次のように記述できる。

$$l(\theta_0) = l(\Theta) + U(\Theta)(\theta_0 - \Theta) - \frac{1}{2}(\theta_0 - \Theta)^T I(\Theta)(\theta_0 - \Theta)$$

このとき、 $\Theta$  は最尤推定値であるため

$$l(\theta_0) = l(\Theta) - \frac{1}{2}(\theta_0 - \Theta)^T I(\Theta)(\theta_0 - \Theta)$$

\*1 参考書では (期待値 - 観測値)<sup>2</sup>/期待値が使われることが多い。

と書き直すことができる。

よって、このとき逸脱度  $D$  は

$$D = 2 \left[ l(\Theta) - \frac{1}{2} (\theta_0 - \Theta)^T I(\Theta) (\theta_0 - \Theta) - l(\Theta) \right] = -(\theta_0 - \Theta)^T I(\Theta) (\theta_0 - \Theta)$$

と書きなおすことができる。

前述したように、この表記で表せるものはカイ二乗分布に従うので逸脱度もカイ二乗検定で扱うことが出来る。本研究では逸脱度をカイ二乗として扱うものとする。

#### A.4 ポアソンの適用

前節までの議論を利用して本研究における指標値であるカイ二乗を決定する。

本研究で扱っているニュートリノ振動現象の観測は大量の粒子を観測しても、実際に観測できる事象はとも少ない現象である。そのため、今回の実験データもこのような物理現象を良く記述できるポアソン分布

$$f_{\text{poisson}}(y_i, n_i) = \frac{y_i^{n_i} \cdot e^{-y_i}}{(n_i)!}$$

に従うと考えて議論を行う。なお、この関数は「ある単位時間内に平均  $y_i$  回発生するとされた事象が、現実において、 $n_i$  回起こる確率」を意味している。

前述の議論に対して尤度関数をポアソン分布で記述することにより、ポアソン分布に従うとした実験事象集団の評価を議論ができるので、尤度関数を

$$L_{\text{poisson}} = \prod_i \frac{y_i^{n_i} \cdot e^{-y_i}}{(n_i)!}$$

とかく。

なお、今回の場合、真の値というものは導出できないので理論値から導出される値を真の値とみなした。そのため逸脱度は観測値と理論値とのギャップとして表される。

このときのカイ二乗は

$$\chi_{\text{poisson}}^2 = 2 \cdot \sum_i [y_i - n_i - n_i \log(y_i/n_i)]$$

で与えられる。ここで、 $y_i$  はイベント数の理論値であり、 $n_i$  は実験由来のイベント数の観測値である。

## 謝辞

本研究を行うにあたり、指導をして下さった安田先生ならびに、自身が研究に打ち込むことが出来るように経済的に精神的に支えてくれた両親にこの場をかりて感謝の意を申し上げます。

## 参照

- [1]:MINOS HP
- [2]:Tevatron HP
- [3]:長島順清, 金沢大学集中講義ノート
- [4]:NOvA HP
- [5]:T2K HP
- [6]: P.Adamson et al. ,Phys. Rev. Lett. 110, 2518011 (2013) ,arXiv:hep-ex/1304.6335
- [7]: P.Adamson et al. , Phys. Rev. Lett. 112, 191801 (2014), arXiv:hep-ex/1403.0867
- [8]: Philip R. Bevington, D. Keith Robinson, Data Reduction and Error Analysis for the Physical Science (3rd edition)
- [9]: M.A. Acero et al. , arXiv:1806.00096v2 , doi.org/10.5281/zenodo.1286758
- [10]: Wascko, Morgan doi.org/10.5281/zenodo.1286752.
- [11] 基礎統計学 III 自然科学の統計学、東京大学教養学部統計学教室 編、東京大学出版会、第 12 刷
- [12] 数学シリーズ 数理統計学 第 2 版、稲垣宣生著、裳華房