

# 長基線ニュートリノ振動実験による地球物質密度測定

首都大学東京理学研究科物理学専攻  
内波生一

## 概要

ニュートリノ振動現象の発見からさらに進められてきた現在のニュートリノ物理学の目標は、その姿をより詳しく明らかにすることである。その一つとして、未だ測られていない混合パラメータの測定がある。これを目的とする将来的な振動実験計画の一つに、ニュートリノファクトリーと呼ばれる長基線実験が存在する。ニュートリノが地球内部を数千 km 伝播するようなこうした実験では、ニュートリノと物質との相互作用によって生まれる効果が振動確率に与える影響が非常に重要となる。本研究では、このような物質効果の寄与の不定性を生み出す地球の物質密度を、地球物理学的な見地からとは独立に、ニュートリノファクトリーにおける振動実験の観測のみによってどの程度精密に測定できるかを考察したものである。特に、検出器を魔法基線と呼ばれる特別な距離においた観測では、自然の持つ振動パラメータ  $\theta_{13}$  及び  $\delta$  の広い範囲で非常に高い物質密度決定精度を持つことを示した。

# 目次

第 1 章 導入	4
第 2 章 ニュートリノ振動	6
2.1 MNS 混合行列とニュートリノ振動	6
2.2 物質中でのニュートリノ振動確率	7
2.2.1 MSW 効果	7
2.2.2 厳密な振動確率と摂動公式	8
2.2.3 魔法基線	10
第 3 章 ニュートリノファクトリー	11
3.1 ニュートリノフラックス	11
3.2 検出と断面積	12
3.3 実験パラメータの最適化	13
3.4 物質密度不定性と振動パラメータ決定精度の関係	13
第 4 章 地球物理学による内部構造の把握	15
第 5 章 地球密度測定	19
5.1 振動確率の密度依存性	19
5.1.1 エネルギースキャンと基線距離	19
5.1.2 エネルギーピン分解	21
5.2 解析方法	22
5.2.1 カイ二乗解析	23
5.2.2 系統誤差	23
5.2.3 $\delta$ 不定性の導入	25
5.3 解析結果	26
5.3.1 密度決定精度	26
5.3.2 魔法基線における密度感度の $\delta$ 依存性	27
5.3.3 中距離基線実験を併用することの重要性	30
第 6 章 結論	32
付録 A	34
A.1 木村-高村-横枕 公式	34
A.2 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ 摂動公式	37

A.3 ミューオン崩壊 . . . . .	39
-----------------------	----

# 第1章 導入

素粒子物理学では先人たちの様々な研究によって数々の優れた理論が発見され、その中でも「標準模型」は非常に優秀な理論である。その理論は現在までの様々な実験結果の値をとともよく説明してくれ、この世界のより深い姿を我々に理解できる形でさらけ出してくれた。

しかし、一方でこの標準模型は重力相互作用を含まないことや階層性の問題が存在するなど、多くの素粒子物理学者が目指す万物理論、すなわちこの世界を完全に記述するおそらくたった一つの理論には遠い。よって現在の素粒子物理学の次なる目標とは、標準模型を含むこうした先人たちの発見を内包しながら、より大きくより深い、この世界を無理なく説明する理論を探ることである。

ところが、この標準模型は優れた理論であるがゆえに実際に観測される自然と矛盾する点が今のところほとんど見られない。これまでの物理学における発見が、良く知られていない自然の振る舞いを説明しようとして生まれてきたことを考えるならば、この理論の不一致の少なさは次なるステップの足がかりが数少ないことを意味している。

そんな中、近年において標準模型には組み込まれていないニュートリノの質量の存在を示唆するニュートリノ振動現象が様々な実験で確認された。

その代表的な例として太陽ニュートリノ欠損とよばれる、それまで知られていた太陽モデルから予言される  $\nu_e$  イベント数よりも実際に検出されるイベント数が少ないという事実が存在した。それはすでに '60 年代に R. Davis によって指摘されていた [1] ものであり、その後の様々な実験によって、これがニュートリノ振動という、ある種類のニュートリノが別の種類のニュートリノへと確率的に姿を変える現象によって説明されることが強く支持された。

またこの太陽ニュートリノ以外にも、宇宙から振ってくる高エネルギー粒子、宇宙線と地球大気の反応によって作られるいわゆる大気ニュートリノの振る舞いにおいても、この振動現象が矛盾なく支持されてた。また、このような自然に存在するニュートリノの観測のみならず、加速器によって人工的に作り出したニュートリノを用いた実験や原子炉で生まれるニュートリノを使った実験においても、やはり振動現象が見られている。

先に述べたとおり、こうしたニュートリノ振動現象が示すニュートリノ質量の存在は現在の標準模型との不一致であり、すなわちより根源的な高エネルギーの理論への貴重な足がかりである。ニュートリノの質量と混合構造を生み出すメカニズムを探ることによって、理論の発展を進めていくことが可能となるのである。しかし、そのためにはそのフレーバー混合構造自体をより厳密な形で理解しておく必要がある。

現在までの観測によって次のような振動パラメータがかなりの範囲で分かっている。

- 1) 質量固有状態のニュートリノの質量二乗差  $m_i^2 - m_j^2$
- 2) 質量固有状態とフレーバー固有状態を繋げる 3 つの混合角  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$

ただし

- 1) については  $m_3^2$  が他の二つより重いか軽いかはまだ明らかになっておらず、前者を順階層的な質量階層、後者を逆階層的な質量階層と呼んでいる。
- 2) については  $\theta_{13}$  が CHOOZ 実験による上限しか与えられておらず [2]、どの程度の小ささかは分かっていない。

またこの二つ以外に振動現象に効果を及ぼす、粒子反粒子との関係に関わる CP 位相  $\delta$  についてはその片鱗も見えておらずまったく情報がない状態である。

こうした現状の中、これらの未知のパラメータをより詳しく測るために様々なニュートリノ振動実験が計画されており、その将来的な振動実験計画の中に、ニュートリノファクトリーとよばれる長基線振動実験が存在する。

これは人工的に作り出した高エネルギーミュオンの崩壊からくる大量のニュートリノを、数千 km 離れた地点で検出することにより振動現象を観測し、 $\theta_{13}$  及び  $\delta$  を測定しようとするものである。具体的には 3000 km から 4000 km の基線距離がそれらの測定に有効であると思われるが、7000 km 以上のさらなる長距離での観測も視野に入れた研究が昨今盛んになされている。

そのような超長距離振動実験においては、ニュートリノが地球内部を通過する際に受ける物質効果が非常に強い寄与を及ぼすことが予想されているが、その場合、物質効果の不定性すなわち地球物質密度不定性が 5% よりはるかに大きくなると、最終的に測定する振動パラメータの決定精度に致命的な悪影響を及ぼすことが知られている。地球物質密度については、地震波などの地学的見地からの測定によって様々なことが判明しているものの、これを 5% 以下の精度でだけっていえるかどうかについては大いに疑問とされている。

この問題を解決するための最も有力な方法は、ニュートリノ振動パラメータを決定する実験自身によって自己完結的な方法で地球物質密度を測定してしまうことである。この目的のため、本研究では、長基線振動実験ニュートリノファクトリーにおける地球物質密度の測定がどの程度の精度で行われるかを定量的に解析し、この密度決定の不定性が、こうした長基線振動実験がニュートリノ混合パラメータ決定能力を有すると言える 5% 程度以下に抑えられるかどうかを確かめる。

## 第2章 ニュートリノ振動

本研究は、人工的に作り出したニュートリノビームを別の離れた地点で観測することによりニュートリノの振動現象を観測する振動実験についての研究である。この章ではまず、その振動実験において最も基礎となるニュートリノ振動について、その振動確率の振る舞いを見ていく。初めに良く知られている真空中での振動を解説し、その発展として物質中での振動確率の変化を考察する。なお、この研究はニュートリノの相互作用は標準模型の中のものだけしか存在しないと仮定して行われた。

### 2.1 MNS 混合行列とニュートリノ振動

まず3世代ニュートリノの真空中での振動確率を求める。

ニュートリノのフレーバー固有状態は、MNS (牧・中川・坂田) 行列 [3] による質量固有状態の混合によって表される。すなわち

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U^{MNS} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

という関係である。

その混合行列を具体的に書き表すと、標準的な表記法として

$$U^{MNS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

となる。ここで、 $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ 、 $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$  であり、 $\delta$  は CP 位相である。

質量固有状態のニュートリノの方程式を考えると、ニュートリノが超相対論的な運動を行っているという仮定により  $E = \sqrt{p^2 + m^2} \simeq p + m^2/2p$  と近似することができ、シュレディンガー的な形から、

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu_i\rangle = \left( p + \frac{m_i^2}{2p} \right) |\nu_i\rangle \quad (2.3)$$

と書くことができる。さらに先ほどの混合行列を用いて、ニュートリノの発展方程式を質量固有状態からフレーバー固有状態へとうつすことが可能である。すなわちニュートリノ振動に関わるフレーバー固有状態の発展方程式は、

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu_\alpha\rangle = \sum_{\beta} \sum_i U_{\alpha i}^* \frac{m_i^2}{2E} U_{\beta i} |\nu_\beta\rangle \quad (2.4)$$

$$= H_{\alpha\beta}^{\text{vac}} |\nu_\beta\rangle \quad (2.5)$$

となることわかる。ここで  $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$  であり、 $p = E$  とした。

ニュートリノの場の混合と状態の混合の関係に注意し、式 (2.3) より時間変化を距離  $L$  の変化と置き換えてやると

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(L)\rangle &= \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i(L)\rangle \\ &= \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iEL} e^{-i\frac{m_i^2 L}{2E}} |\nu_i(0)\rangle \\ &= \sum_i \sum_\beta e^{-iEL} U_{\alpha i}^* e^{-i\frac{m_i^2 L}{2E}} U_{\beta i} |\nu_\beta\rangle \end{aligned}$$

これはすなわち、 $\nu_\alpha$  が真空中で距離  $L$  伝播した際には、3つのフレーバー固有状態の重ね合わせとなっていることを意味する。よってその際の  $\nu_\alpha$  から  $\nu_\beta$  への振動確率は

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(L) \rangle|^2 \\ &= \left| \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-i\frac{m_i^2 L}{2E}} U_{\beta i} \right|^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) - 2 \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} J \sin \left( \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。cyclic 和は  $(i, j)$  について  $(1,2), (2,3), (3,1)$  をとる。ここで、第三項目の係数部分は Jarlskog 因子 [4] と呼ばれる不変量、 $J \equiv \text{Im} U_{e1} U_{\mu 2} U_{e2}^* U_{\mu 1}^*$  で表されることが知られている。なおその場合、 $(\alpha, \beta)$  が  $(e, \mu, \tau)$  の反巡回的な組である際は符号が反転する。

## 2.2 物質中でのニュートリノ振動確率

ニュートリノは物質中を通過する際、物質との相互作用によりその振動確率が真空中とは異なる値になることが、太陽ニュートリノの研究によって理解された MSW (Mikheev-Smirnov-Wolfenstein) 効果 [5] として知られている。この節ではその物質中での振動確率とその効果を見る。

### 2.2.1 MSW 効果

ニュートリノが物質中を伝播する上での、重要な物質との相互作用は図 2.1 で示すような、(反)電子ニュートリノと電子との弱い相互作用 (charged current) である。この相互作用によって生じる有効ハミルトニアンは適当な Fierz 変換を行い、

$$H_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \quad (2.7)$$



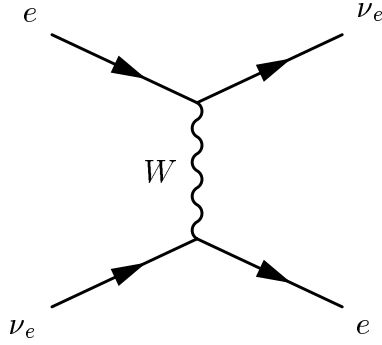


図 2.1: charged current 相互作用

のように書き表すことができる。物質が静止しているとして  $\langle \bar{e}\gamma_i e \rangle = 0, (i = 1, 2, 3)$  とし、 $\langle \bar{e}\gamma_0 e \rangle = n_e$  (ここで  $n_e$  は電子の個数密度) を考える。これは、式 (2.4) のハミルトニアン  $e - \nu_e$  項に  $v \equiv \sqrt{2}G_F n_e$  のようなポテンシャルが加わったと考えることができる。

すなわち、物質中でのフレーバー固有状態の発展方程式は

$$H_{\text{matt}} = H_{\text{vac}} + \text{diag}(v, 0, 0) \quad (2.8)$$

$$= U^* \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} U^T + \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

としたハミルトニアンで表せる。

なお、これまで電子-電子ニュートリノの charged current のみに注目してきたのは、通常物質中にはミューオン及びタウレプトンは存在しないとし、neutral current は  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  に同一の効果を及ぼし式 (2.9) に定数倍の単位行列が加わるだけとなるためである。そのような項は、混合行列がユニタリである限り振動確率からは消去される。なお、反ニュートリノの場合はこの逆符号の効果を受ける。

また、電子数密度と物質密度との関係は次のような式によって理解することができる。

$$n_e = \frac{\rho}{m_N} Y_e \quad (2.10)$$

ここで、 $\rho$  が物質密度をあらわし  $m_N$  は核子の質量である。また、 $Y_e$  は物質中での核子一個あたりに対する電子の割合であり、普通地球内部を通る際は  $1/2$  として現実とほぼ相違はない。

## 2.2.2 厳密な振動確率と摂動公式

電子密度が一定の場合における、物質中での厳密な振動確率を KTY(Kimura-Takamura-Yokomakura) [6] 公式を用いて示す。

式 (2.9) より、物質中でのハミルトニアンを対角化すると

$$H_{\text{matt}} = \tilde{U}^* \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tilde{U}^T \quad (2.11)$$

のような形で書くことができる。

これはすなわち、物質中のニュートリノの状態を  $\lambda_i$  という物質中の有効質量二乗と、 $\tilde{U}$  という有効的な混合行列によって表すことができるということである。もし電子数密度が一定であるならば、この有効質量と有効混合行列をそのまま式 (2.6) に代入し物質中での振動確率を得ることが可能となる。

実際にそれを行い、真空中の振動パラメータで表したものが以下の KTY 公式である。導出は付録 A.1 で行った。

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = A \cos \delta + B \sin \delta + C \quad (2.12)$$

係数  $A, B, C$  は以下の通りである。

$$A = \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} A_{ij} \sin^2 \left( \frac{\Delta\lambda_{ij}L}{4E} \right) \quad (2.13)$$

$$B = \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} B' \sin \left( \frac{\Delta\lambda_{ij}L}{2E} \right) \quad (2.14)$$

$$C = \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} C_{ij} \sin^2 \left( \frac{\Delta\lambda_{ij}L}{4E} \right) \quad (2.15)$$

ここで、cyclic は  $(i, j)$  について  $(1,2), (2,3), (3,1)$  で和をとる。

$$A_{ij} = -4 [2p_1p_2\lambda_i\lambda_j + 2q_1q_2 + (p_1q_2 + q_1p_2)(\lambda_i + \lambda_j)] \times (\Delta\lambda_{ij}\Delta\lambda_{12}\Delta\lambda_{23}\Delta\lambda_{31})^{-1} \quad (2.16)$$

$$B' = \frac{-2(p_2q_1 - p_1q_2)}{\Delta\lambda_{12}\Delta\lambda_{23}\Delta\lambda_{31}} \quad (2.17)$$

$$C_{ij} = -4 [(p_1^2 + p_2^2)\lambda_i\lambda_j + (q_1^2 + q_2^2) + (p_1q_1 + q_2p_2)(\lambda_i + \lambda_j)] \times (\Delta\lambda_{ij}\Delta\lambda_{12}\Delta\lambda_{23}\Delta\lambda_{31})^{-1} \quad (2.18)$$

$$p_1 = (\Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2 s_{12}^2) s_{23} s_{13} c_{13} \quad (2.19)$$

$$p_2 = \Delta m_{21}^2 s_{12} c_{12} c_{23} c_{13} \quad (2.20)$$

$$q_1 = -\Delta m_{31}^2 \Delta m_{21}^2 c_{12}^2 s_{23} s_{13} c_{13} \quad (2.21)$$

$$q_2 = -\Delta m_{31}^2 \Delta m_{21}^2 s_{12} c_{12} c_{23} c_{13} \quad (2.22)$$

密度一定な物質中での振動確率を厳密な形で求めたが、こうした厳密解での表記では実際の振る舞いを直感的に見出すことが難しいため、小さいパラメータ ( $\theta_{13}, \Delta m_{21}^2/\Delta m_{31}^2, \Delta_{21}/aL$ ) で展開した摂動公式 [7] を記す (付録 A.2)。

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu \text{ or } \bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu) = X_\pm \sin^2 2\theta_{13} + Y_\pm \sin 2\theta_{13} \cos(\pm\delta - \Delta_{31}) + P_{sol} \quad (2.23)$$

$$X_\pm = s_{23}^2 \left( \frac{\Delta_{31} \sin(aL \mp \Delta_{31})}{aL \mp \Delta_{31}} \right)^2 \quad (2.24)$$

$$Y_\pm = \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \left( \frac{\Delta_{31} \sin(aL \mp \Delta_{31})}{aL \mp \Delta_{31}} \right) \left( \frac{\Delta_{21} \sin(aL)}{aL} \right) \quad (2.25)$$

$$P_{sol} = c_{23}^2 \sin^2 2\theta_{12} \left( \frac{\Delta_{21} \sin(aL)}{aL} \right)^2 \quad (2.26)$$

$$\Delta_{ij} \equiv \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \quad (2.27)$$

ここで、 $a = G_F n_e / \sqrt{2}$  とし、また上下の符号は、上：ニュートリノチャネル、下：反ニュートリノチャネルを意味する。

### 2.2.3 魔法基線

式 (2.23) の摂動公式をよく見ると、ある特異な特徴があることがわかる。第2項目と第3項目には  $\sin(aL)$  という項が存在しており、もしこの  $aL$  が  $\pi$  になるような距離では、第1項目の効果しか存在せず  $\theta_{12}$ 、 $\Delta m_{21}^2$  及び CP 位相  $\delta$  の寄与がゼロとなる [8]。そのような距離とは

$$L = \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F n_e} = 7615 \left( \frac{4.3\text{g/cm}^3}{\rho} \right) \text{ km} \quad (2.28)$$

であり、これがいわゆる「魔法基線」(magic baseline[9]) である。

上記で述べたとおり、このような基線距離では  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  振動確率は (2.23) 式第一項目にしか依存せず、 $\delta$  には影響されないことになる。現在までレプトンセクターの CP 位相  $\delta$  が測定されておらず、その精密な決定には遠い道のりがあることを考えれば、この魔法基線での振動実験は  $\delta$  の不定性によらず  $\theta_{13}$  を決定することのできる理想的な実験であることがわかる。あるいは  $\theta_{13}$  だけでなく、第一項目に存在する他のパラメータについても同様に魔法基線で精密な測定が可能であり、物質効果をあらわす  $a$  もその一つである。すなわち、この魔法基線においては  $\delta$  の不定性によらず  $\theta_{13}$  や物質密度  $\rho$  を測定できることが期待される。

## 第3章 ニュートリノファクトリー

この章ではニュートリノファクトリー実験についての大まかな解説を行う。

簡単に説明するならば、ニュートリノファクトリー実験とは、人工的に作り出したミュオンを貯蔵リング内においてある一定の高エネルギー (50 GeV) でまわし、その際にミュオンの崩壊によって得られるニュートリノビームを数千 km 離れた地点で観測し、測定されたニュートリノ振動の結果から  $\theta_{13}$  及び  $\delta$  を決定しようとするものである。またその際に最も重要な振動チャンネルは  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  である。

### 3.1 ニュートリノフラックス

ニュートリノファクトリー実験では、ニュートリノのビームはミュオンの崩壊によって得られる。すなわち

$$\mu \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad (3.1)$$

という反応からくるニュートリノである。実際はミュオンと反ミュオンでの運転を別々に行うため、この過程の CP 反転からくるニュートリノビームも得られる。

ニュートリノファクトリー実験で重要な振動チャンネルは  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  であり、上記の反応から実際に得られる (反) 電子ニュートリノのフラックスは偏極の無いミュオン崩壊の場合、距離  $L$  離れた地点で

$$f_{\nu_e, \bar{\nu}_e}(E_\nu) = \frac{24n_\mu}{\pi L^2 m_\mu^6} E_\mu E_\nu^2 (1 - \beta \cos \phi) \{m_\mu^2 - 2E_\mu E_\nu (1 - \beta \cos \phi)\} \quad (3.2)$$

となることがわかる (付録 A.3)。ここで、 $m_\mu$  はミュオンの質量、 $E_\mu$  は親ミュオンのエネルギーであり、 $\beta = \sqrt{1 - m_\mu^2/E_\mu^2}$ 、 $E_\nu$  は (反) 電子ニュートリノのエネルギーである。また、 $n_\mu$  はニュートリノファクトリー実験で得られる実効的なミュオン崩壊数である。さらに、 $\phi$  はビームと検出器への方向との間の角度であり、今回の研究では  $\delta\phi = 10^{-4}$  rd で平均をとった。

本研究では、ミュオンのエネルギー  $E_\mu = 50$  GeV とし、得られる実効的なミュオン崩壊数を、ミュオン、反ミュオンとも  $3 \times 10^{21}$  個とした。この崩壊数は現在の計画ではそれぞれおよそ5年間の運転によって得られると考えられている [10]。

この値を使い、振動効果を見捨てた場合の全エネルギーのフラックスを計算すると、

$$\begin{aligned} F_{\nu_e} &= \int f_{\nu_e}(E_\nu) dE_\nu \\ &= 3.8 \times 10^8 \left( \frac{7500 \text{ km}}{L} \right)^2 \text{ cm}^{-2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

が得られる。

### 3.2 検出と断面積

ニュートリノファクトリー実験では大型鉄磁気カロリメータによってイベントが検出される [12]。検出器によって観測するイベントは、 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  振動によって作られたミュオンニュートリノと核子との charged current によるミュオン生成である。生まれたミュオンは検出器内で、長い距離を真っ直ぐ突き抜けていながらシャワーを残すイベントとして見るができる。

ニュートリノビームがミュオン崩壊から作られることを考えれば、検出されるミュオンには、振動によって現れる  $\nu_\mu$  との反応で生まれる  $\mu^-$  と、振動しないでくる  $\bar{\nu}_\mu$  から作られる  $\mu^+$  があることがわかる。しかし、この二つのミュオンは持っている電荷が異なるために、磁場をかけてやることによって見分けることが可能となる。また、他のフレーバーに変わらずそのまま飛んでくる  $\nu_e$  の charged current によって作られる電子は本来測定したいミュオンと同じ電荷を持っているが、ミュオンが真っ直ぐ飛んでいくのに比べ、電子はそのような貫通飛跡を残さないため区別することが可能となる。

しかし、ミュオンのエネルギーが低くなると上記のような綺麗な飛跡とならず電荷確認が困難となるため、ニュートリノの全エネルギーに対してイベントを確認することは不可能である。そこで本研究では 5 GeV 以上の全ニュートリノエネルギーにおいて 80% の効率でイベントを復元できるとした [13]。

ミュオンニュートリノと核子との charged current による断面積は、アイソスカラーターゲットとして  $\sigma_{CC} = \alpha E_\nu$  と近似できて

$$\sigma_{CC,\nu N} = (0.667 \pm 0.014) \times 10^{-38} \times \frac{E_\nu}{\text{GeV}} \text{cm}^2 \quad (3.4)$$

$$\sigma_{CC,\bar{\nu} N} = (0.334 \pm 0.008) \times 10^{-38} \times \frac{E_{\bar{\nu}}}{\text{GeV}} \text{cm}^2 \quad (3.5)$$

である [14]。今回の研究ではそれぞれ、ニュートリノ： $0.67 \times 10^{-38}(E_\nu/\text{GeV})\text{cm}^2$ 、反ニュートリノ： $0.34 \times 10^{-38}(E_{\bar{\nu}}/\text{GeV})\text{cm}^2$  を用いた。

こうしたこれまでの結果から、実際の振動実験によって期待されるミュオンニュートリノの charged current イベントは、

$$N_{\text{event}}(E) = N_T \sigma_{CC}(E) f_{\nu_e}(L, E) P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(L, E) \quad (3.6)$$

となることがわかる。ここで、 $N_T$  は検出器の持つ核子数である。

具体的な数値例として、以下の振動パラメータ

$$\Delta m_{21}^2 = 7.9 \times 10^{-5} \text{eV}^2 \quad , \quad |\Delta m_{31}^2| = 2.5 \times 10^{-3} \text{eV}^2 \quad (3.7)$$

$$\sin^2 2\theta_{12} = 0.86 \quad , \quad \sin^2 2\theta_{23} = 1 \quad (3.8)$$

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.01 \quad , \quad \delta = 0 \quad (3.9)$$

を用い、さらに鉄検出器の質量を 40 kt、地球物質密度を一定の  $4.3 \text{ g/cm}^3$  とした基線距離 7500 km での全イベント数を計算すると、順階層的なニュートリノチャネルの場合

$$N = \int_{E_{th}}^{E_\mu} N_{\text{event}}(E) dE = 1300 \quad (3.10)$$

が期待される。なお特別な言及がない限り、(3.7)、(3.8) 及び上記の検出器質量は本研究の以降の計算全てで使われている。

### 3.3 実験パラメータの最適化

この節ではニュートリノファクトリー実験で動かすことのできるミュオンエネルギーと基線距離について、どのような値にすれば目的となる振動パラメータの測定に有効かを考察する。

ニュートリノファクトリー実験の目的の一つ  $\theta_{13}$  の測定を考える場合、その  $\theta_{13}$  に関わる振動が極大となるような  $L/E$  を選ぶことが  $\theta_{13}$  の決定にとって良いと考えられる。ところが一方で、前節で述べた通り高エネルギーのミュオンニュートリノによるイベントが他の反応と非常に区別しやすく、バックグラウンドのない理想的な実験として観測が可能となることに注目するならば、ニュートリノの親となるミュオンのエネルギーもそうした数十 GeV の高エネルギーであることが求められる。基線距離に関しては、ニュートリノエネルギーが高エネルギーであるため  $\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}$  を振動極大の  $\pi/2$  にできるだけ近づけるために数千 km の基線距離が必要となることがわかる。

現在までの研究では、CP 位相  $\delta$  の測定も含め、3000 ~ 5000 km 程度の距離に一つと 7500 km にもう一つ検出器をおいた実験が最適であると考えられている [15]。

### 3.4 物質密度不定性と振動パラメータ決定精度の関係

この節では、物質密度不定性が振動パラメータの決定精度に与える影響について、文献 [16] を参考にそれがどの程度のものかを確認する。

ニュートリノファクトリーの主な目的は  $\theta_{13}$  及び CP 位相  $\delta$  の測定である。

まず  $\theta_{13}$  の決定精度について述べる。

式 (2.23) より、物質効果は振動確率の全ての項に入っており、 $\theta_{13}$  依存項にも当然存在することが分かる。もし統計誤差が系統誤差に比べて十分小さいようなイベント数に期待される場合、この物質効果の不定性 (物質密度不定性) は  $\theta_{13}$  の決定精度を悪化させることが予想される。 $\theta_{13}$  は振動確率の振幅を決めるような振る舞いをするため、 $\theta_{13}$  が小さくなれば実際に観測されるイベント数は小さくなる。よってイベント数が非常に少なくなるような小さな  $\theta_{13}$  であった場合は、 $\theta_{13}$  の決定精度は統計誤差が支配的となり、物質密度不定性はそれに影響を及ぼさないことが期待される。

具体的には 3000km でのニュートリノファクトリー実験において、 $\sin^2 2\theta_{13} \gtrsim 10^{-3}$  程度の大きさを持った  $\theta_{13}$  の場合、物質密度不定性がその決定精度に影響を与えてくる。そのような  $\theta_{13}$  の値であった場合、5% の物質密度不定性を仮定した解析では、 $\sin^2 2\theta_{13}$  の決定精度はおよそ 7-9% であるが ( $2\sigma$  信頼水準)、密度不定性がその 2 倍である 10% になると、決定精度

はそれより 10-12 % に悪化する。逆に密度不定性が 1 % であった場合、 $\sin^2 2\theta_{13}$  の決定精度は 5 % の密度不定性に比べて 5-6 % に改善される。[16]

次に CP 位相  $\delta$  の決定精度を考察する。

(2.23) より、 $\delta$  も  $\theta_{13}$  と同じような形で物質効果と関係していることが分かる。すなわち、大きな  $\theta_{13}$  の場合は系統誤差として物質密度不定性がその決定精度を悪化させ、イベント数が少なくなる小さな  $\theta_{13}$  ではあまり影響がないことが予想される。

実際、 $\theta_{13}$  の時と同じく  $\sin^2 2\theta_{13} \gtrsim 10^{-3}$  程度の  $\theta_{13}$  で物質密度不定性が重要となり、密度不定性 5 % から 10 % への変化において、 $\delta$  の決定精度は数十% 悪化する ( $1\sigma$  信頼水準)。逆に密度不定性が 1 % に抑えられる場合、 $\sin^2 2\theta_{13} \simeq 0.1$  のとき  $\delta$  の決定精度は 5 % の場合の半分以下にまで抑えられる。[16]

これらの結果から見て取れるように、物質密度の不定性は振動パラメータの精密測定に重大な影響を与えうる。ところが実際の地球内部の物質密度は地震波を使った間接的な推定しかされておらず、それが 5 % 以下の精度で決定されているとは言い切ることができない。そこで本研究では、この物質密度の不定性をニュートリノファクトリー実験自身によって測定し、振動パラメータの決定に十分な決定精度が得られるかどうかを確かめることを目的とした。

## 第4章 地球物理学による内部構造の把握

この章では、地球内部の密度分布が既存の理論によってどのように考察されているかを簡単にまとめる。(参考文献 [17])

現在までに人類の手によって直接的に触れられた地球内部の深度は、高々 10 km 程度である。地球の半径が約 6400 km であることを考えると、これはほんの表層部分に過ぎず、それ以深の大部分の地球内部構造は主に地震波の測定によって間接的に見積もられている。すなわち、地上で観測される地震波を詳しく調べることにより、その波が伝播してきた部分の物性情報を推定するのである。

地球内部の構造は、深さはもちろんのことその緯度・経度にも依存した複雑な形となっているが、球対称性を仮定し地震波速度・密度分布が深度方向にのみ依存した等方地球モデルを用いた PREM(Preliminary reference Earth model)[18] が最も簡単な代表的モデルとして知られており、現在でも確からしいと考えられている。図 4.3 に PREM による密度分布を示した。

ではこのような分布を導く方法を大まかに説明する。

まず最初に、地震波がどのように伝わるかを考える。震源において発生した地震波は様々な方向へと伝わっていく。そこで、地球内部が深い地点ほど高密度になっている場合には、地震波はその媒体の変化によって速度を変え、図 4.1 のような屈折効果を受けながら地表へと到達することになる。深度に対する地震波速度変化が常に一定ならば、震源からの距離と地震波到達時間をあらかず走時曲線は、単調増加の形になるはずである。

しかし、実際の走時曲線では図 4.1 右のような地震波が観測された。これはすなわち、地震波速度が急増する不連続面があることを意味する。上層の低地震波速度層を通過する波よりも、より深部の高地震波速度層を通過してきたものが先に到達し、その後同じ地点で遅い波が観測されるのである。あるいは、走時曲線の傾きが有意に変化する。

このような不連続面の代表的なものが、地殻とマントルとの境界、モホロビッチ不連続面である。

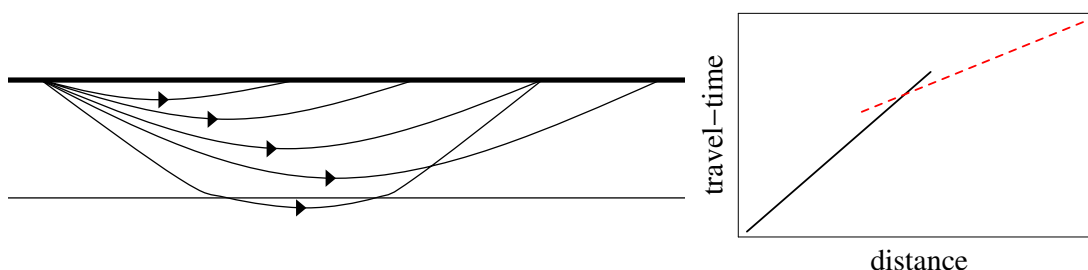


図 4.1: 左図：地殻-マントル境界例。地震波低速度層(上部)と高速度層(下部)の層構造。右図：左図の簡単な走時曲線(震源からの距離と地震波到達までの時間)。上層のみを通過してきたもの(黒実線)と下層を通過してきたもの(赤点線)



またさらに、地震波が高速度層から低速度層へと移った場合、図4のような地震波が到達しない領域が発生することがわかる。約 2900 km の深さにある核・マントル境界の不連続面がこれである。

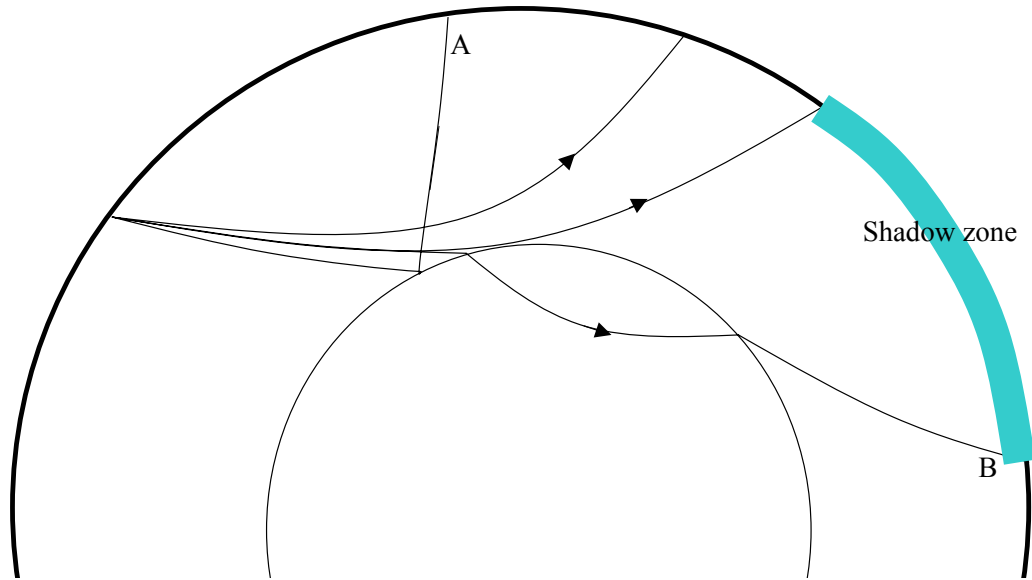


図 4.2: 核-マントルの境界例。地震波が高速度層 (上部) から低速度層 (下部) に移ったときの変化。低速度層で下方向に曲がるため (B)、地震波の到達しない領域 (Shadow Zone) が存在する。また速度変化が大きい場合反射波が存在する (A)

このような不連続面の知識から地球の層構造を基本的に把握すれば、その他の地球情報と組み合わせることで内部の構造を推定できる。

今回あげた PREM の解析では、地震波の走時と地球の質量、慣性モーメント、そして自由振動の振動数が使われた。自由振動とは、大地震の際に地球が一つの鐘、あるいは弦のように振動する現象でそのモードと振動数は地球内部の情報を含んでいる。

こうした情報を複合することにより、地球内部の地震波速度分布と密度分布を求めたのが PREM である。

ニュートリノファクトリー実験は非常に長い基線距離が考えられており、そうした実験ではニュートリノビームは地中深くマントルを通過する。魔法基線ほどの距離になるとそのほとんどの領域でマントルを通ることになるため、今回の研究ではその部分の物質密度を決定するものである。なお、密度一定の場合と地球の密度分布を考慮に入れた場合との振動確率の違いがほとんど見られないことを図 4.5 であらわした。

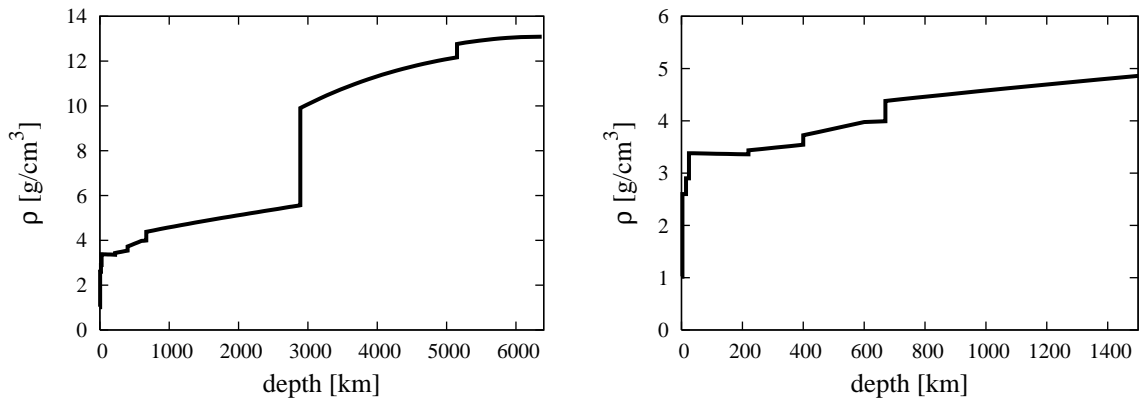


図 4.3: 一次元等方地球モデル (PREM) による地球内部の密度分布。右は 7500 km ニュートリノファクトリー実験で通過する深度 ( $\lesssim 1300$  km) に注目した場合

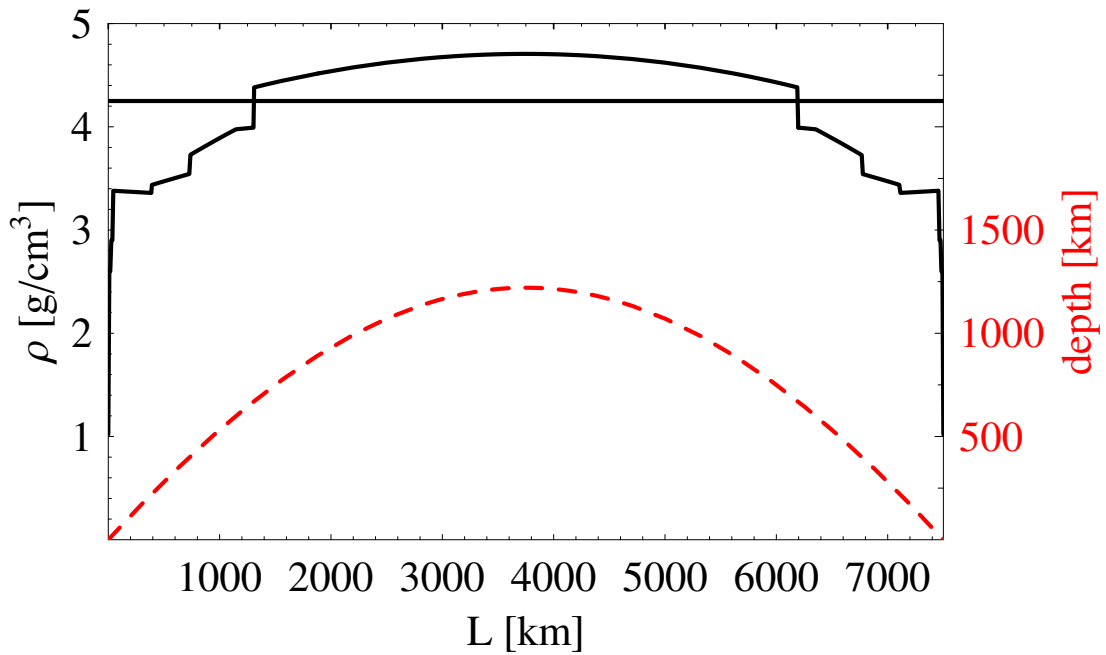


図 4.4: PREM による 7500 km ニュートリノファクトリー実験のニュートリノビームが通過する地点の密度分布と平均密度。赤い点線はニュートリノビームが通過する深さ。地殻の深さが約 30 km でそれ以深がマントルである。さらにマントルは 410 km までの上部マントル、660 km までの遷移層、以深の下部マントルに別れ、それらの境界は相転移による不連続面となっている

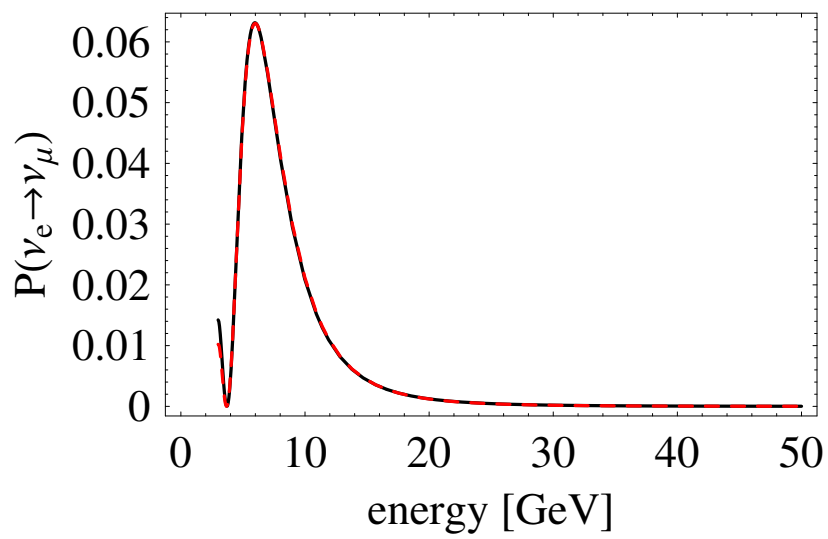


図 4.5: 左図: 物質密度一定  $4.5\text{g/cm}^3$  (黒実線) と PREM の密度分布を使った場合 (図 4.4) の (赤点線)  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  振動確率。順階層的な質量階層性を仮定した。 $\delta = 0, \sin^2 2\theta_{13} = 0.01$

## 第5章 地球密度測定

これより、ニュートリノファクトリー実験における地球密度の測定を考察する。

これは物質効果によるニュートリノ振動確率の変化不定性がどの程度存在し、測るべき振動パラメータをどの程度精密に決定できるかを知るためである。

### 5.1 振動確率の密度依存性

この節では、振動確率およびイベント数の密度依存性について考察する。

まず始めに、式 (3.10) で求めたような全イベント数が物質効果にどのように応答するか、すなわち  $\Delta N/N$  に注目し、その効果の最も大きな距離を探る。

#### 5.1.1 エネルギースキャンと基線距離

$\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  振動確率を式 (2.23) の近似公式を使い、ニュートリノエネルギーの高エネルギー極限 ( $\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \ll 1$ ) で展開してやると

$$P_{apr}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \frac{C_1}{E^2} + \frac{C_2}{E^3} \quad (5.1)$$

が得られる。ここで

$$C_1 = \left( \frac{\sin(aL)}{aL} \right)^2 \left( \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4} \right)^2 \times (s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \pm \epsilon \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \delta + \epsilon^2 c_{23}^2 \sin^2 2\theta_{12}) \quad (5.2)$$

$$C_2 = \pm \left( \frac{\sin(aL)}{aL} \right)^2 \left( \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4} \right)^3 \times g(aL) \left[ 2s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} + \epsilon \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \delta \left( 1 \pm \frac{\tan \delta}{g(aL)} \right) \right] \quad (5.3)$$

$$\epsilon \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}, \quad g(aL) \equiv \frac{1}{aL} - \cot(aL) \quad (5.4)$$

である。

この展開した確率振動の式を使い全イベント数を計算すると

$$\begin{aligned} N &= \int N_T \sigma_{CC}(E) f_{\nu_e}(L, E) P_{apr}(L, E) dE \\ &= k \left( \frac{C_1}{6} E_\mu + \frac{C_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

と、親のミュオンエネルギーに対する簡単な一次式の形になる。ここで  $k = \frac{12n_\mu}{\pi L^2 m_\mu^2} \alpha N_T$  とした。

そこでこの親のミュオンのエネルギー変化  $E_\mu \rightarrow E_\mu + \Delta E_\mu$  に対して、イベント数がどのように応答するかを考えると

$$\Delta N \equiv N(E_\mu + \Delta E_\mu) - N(E_\mu) = \frac{dN}{dE_\mu} \Delta E_\mu = k \frac{C_1}{6} \Delta E_\mu \quad (5.6)$$

となることがわかる。ここでミュオンエネルギーを変えた時のイベント数の変化を次のような二重比で表してやると

$$\frac{\frac{\Delta N}{N}}{\frac{\Delta E}{E}} = \frac{1}{1 + 3 \frac{C_2}{E_\mu C_1}} \quad (5.7)$$

となることが分かる。

このような二重比が密度の関数として大きな傾きを持つような基線距離が、すなわち密度変化に対する大きな応答を持ち、物質密度測定に適していると言える。(5.7) 式でそのような距離を探ると比較的長い距離であることがわかるが、そのような場合最初に用いた近似式 ( $\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \ll 1$ ) が成り立たなくなる。そこで、厳密な形で計算を行った結果を図 5.1.1 に表した。親ミュオンのエネルギーを 50 GeV、そのエネルギー変化を 5 GeV にとった場合の二重比である。 $aL = \pi$  付近で傾きが最大になっていることが読み取れるが、そのような距離とはまさに 2.2.3 節で述べた魔法基線距離である。

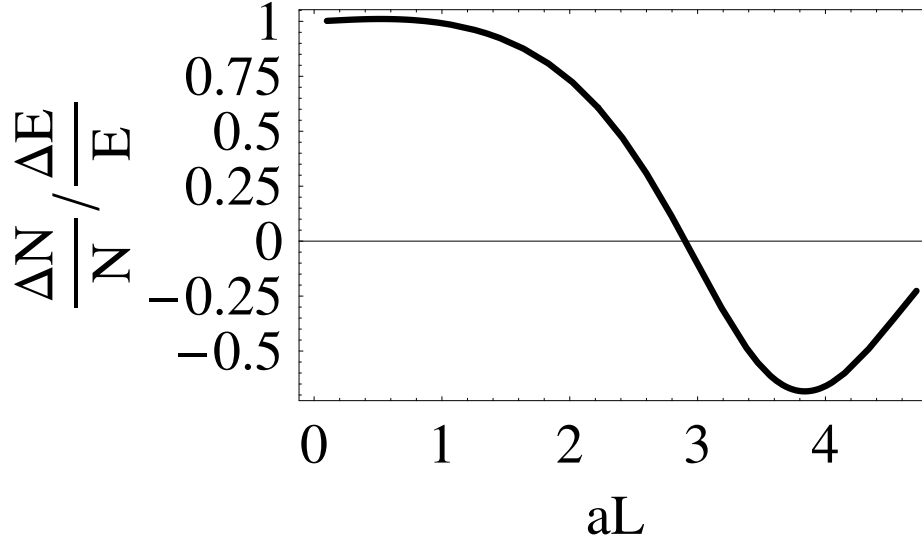


図 5.1: 厳密な確率振動を使った二重比。  $E_\mu = 50$  GeV,  $\Delta E_\mu = 5$  GeV。横軸  $aL$  であり、 $aL = \pi$  付近でその傾きが最大になっていることがわかる。すなわち、そのような距離では  $aL$  依存性が強い

こうした理由、および 2.2.3 節で示したような理由を含めて昨今注目されている [11] 実験であることから、本研究ではこの魔法基線における地球物質密度測定にとりくんだ。

### 5.1.2 エネルギービン分解

前節で物質効果測定能力が魔法基線において優れていることを示したが、そうした距離では振動確率が

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = s_{23}^2 \left( \frac{\Delta_{31} \sin(aL \mp \Delta_{31})}{aL \mp \Delta_{31}} \right)^2 \sin^2 2\theta_{13} \quad (5.8)$$

と  $\theta_{13}$  角に比例した形となってしまふ。これはすなわち、全イベント数も  $\theta_{13}$  によってスケールすることを意味する。

ニュートリノファクトリー実験の本来の目的の一つがこの  $\theta_{13}$  を測ることであることを思い出すならば、密度測定と  $\theta_{13}$  測定は互いに強く関連している。つまり、イベント数を減らすような物質密度は、大きな  $\theta_{13}$  の仮定によって打ち消され、増やすような物質密度は小さな  $\theta_{13}$  によって打ち消されることになり、全イベント数を見ているだけではこの二つを決定することができない。

そこで、振動確率がニュートリノエネルギーの関数であることから、物質効果依存性はそのエネルギーにどのように関連しているかを見る。もしエネルギーによって物質効果が振動確率に異なった寄与をするならば、そのエネルギーで分けて解析することにより、上記のような問題を解決しようとするのである。

そこで魔法基線  $aL = \pi$  で密度変化  $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$  つまり  $aL \rightarrow \pi + \epsilon$  が振動確率をどのように変化させるかを計算すると (5.8) 式の括弧に注目して、 $\epsilon$  の一次までで

$$\left( \frac{\Delta_{31} \sin(aL \mp \Delta_{31})}{aL \mp \Delta_{31}} \right)^2 = \left( \frac{\sin \Delta_{31}}{\pi \mp \Delta_{31}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin \Delta_{31}}{\pi \mp \Delta_{31}} \right)^2 \left[ \mp \cot \Delta_{31} - \frac{1}{\pi \mp \Delta_{31}} \right] \epsilon \quad (5.9)$$

となるのがわかる。ここで再び注意すると上下の符号はそれぞれニュートリノと反ニュートリノを意味する。

零次近似でわかることは、ニュートリノチャネルの場合逆階層的な場合よりも順階層的な場合の方が分母が小さくなるため、確率ひいてはイベント数が大きくなり、反ニュートリノチャネルの場合はその逆となっているということである。

さらに密度変化にたいする依存性を示す第2項目に注目すると、あるエネルギー  $E_c$  においてその符号が逆転することがわかる。そのようなエネルギーとは、順階層的な質量パターンのニュートリノでは

$$\tan\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E_c}\right) = \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E_c} - \pi \quad (5.10)$$

であり、数値を代入すれば  $E_c = 7.5$  GeV である。この臨界エネルギーより低エネルギーでは密度増加は振動確率低下を、高エネルギーでは振動確率上昇を意味することになる。さらに順階層的な反ニュートリノでは  $E_c = 17.6$  GeV となり、ニュートリノの場合と逆でそれより低エネルギーでは密度増加は振動確率を増加させ、高エネルギーでは振動確率を低下させる。なお逆階層的な質量パターンの場合はそれぞれ順階層的なニュートリノと反ニュートリノを入れ替えたものになることが直ちにわかる。

図 5.2 にイベント数のスペクトルとしてこの関係を見て取ることができる。

注意する点は、質量パターンが順階層的な場合ニュートリノチャンネルで多くのイベント数が期待でき、反対に逆階層的な場合は反ニュートリノチャンネルでイベント数が大きいことである。

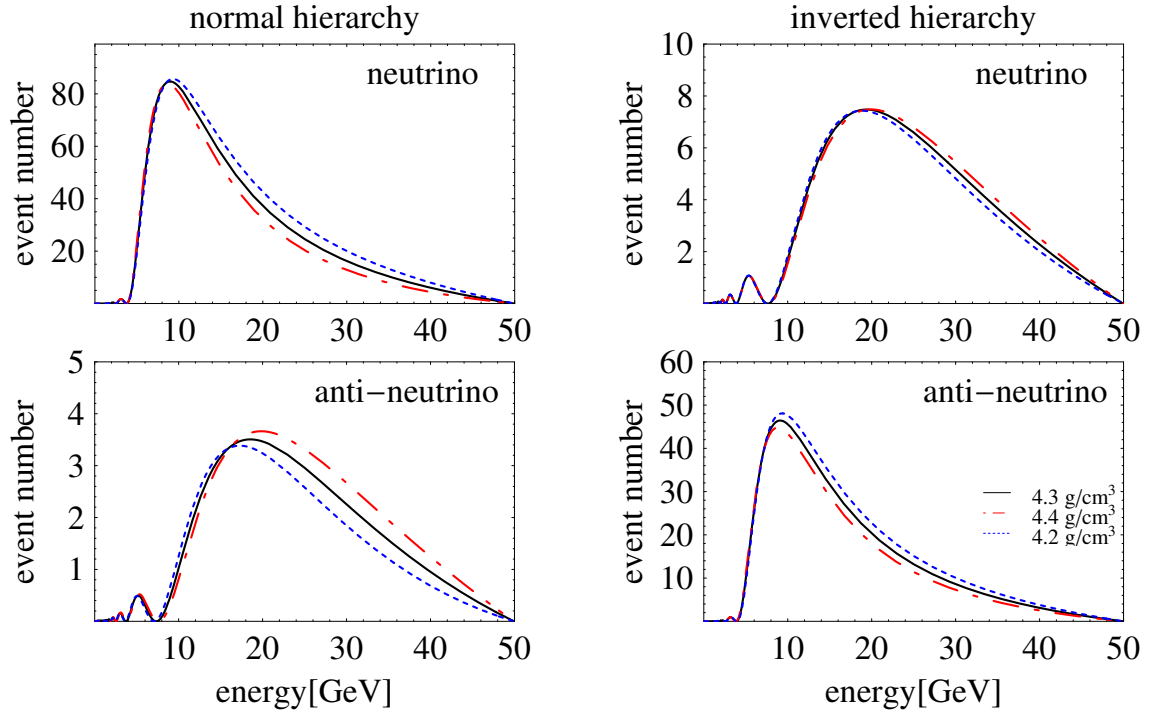


図 5.2: ミューオンイベント数のエネルギースペクトル。上2つはニュートリノチャンネルでのスペクトルで、下二つは反ニュートリノチャンネルのもの。左が順階層的な場合であり、右が逆階層的な場合。 $\sin^2 2\theta_{13} = 0.01$ 、黒い実線は地球密度が  $\rho = 4.3\text{g/cm}^3$ 、赤い破線は  $\rho = 4.4\text{g/cm}^3$ 、青い点線は  $\rho = 4.2\text{g/cm}^3$  の場合

これより、密度依存性符号の異なる範囲のイベントを別々に扱ってやることによって、先ほどの  $\theta_{13}$  によるスケール問題を回避することが可能となることがわかる。

すなわち、順階層的な質量階層の場合、ニュートリノでは 5 GeV ~ 10 GeV のイベント数と 10 GeV ~ 50 GeV のイベント数で分けた解析を、反ニュートリノでは 5 GeV ~ 20 GeV のイベント数と 20 GeV ~ 50 GeV のイベント数で分けた解析を行う。逆階層的な質量階層の場合については、それぞれ順階層的な場合のニュートリノ・反ニュートリノのエネルギーピンを入れ替えた、ニュートリノ : 5 GeV ~ 20 GeV と 20 GeV ~ 50 GeV、反ニュートリノ : 5 GeV ~ 10 GeV と 10 GeV ~ 50 GeV で分けた解析を行う。

## 5.2 解析方法

この節では実際の統計解析の方法を説明する。

### 5.2.1 カイ二乗解析

今回の解析では少数のイベント数を含むエネルギービンに関しても、これをガウス分布で近似することにしてカイ二乗解析を行った。カイ二乗の定義は次のような形として [19]、ミューオンと反ミューオンの崩壊が別々に得られる場合

$$\Delta\chi^2 \equiv \min_{\alpha^2\text{'s}} \sum_{a=\nu, \bar{\nu}} \left[ \sum_{i=1,2} \left\{ \frac{(N_{ai}^{obs} - (1 + \alpha_i + \alpha_a + \alpha)N_{ai}^{exp})^2}{N_{ai}^{exp} + \sigma_{ai}^2(N_{ai}^{exp})^2} + \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} \right\} + \frac{\alpha_a^2}{\sigma_a^2} \right] + \frac{\alpha^2}{\sigma_{corr}^2} \quad (5.11)$$

を用いた。ここで、

- $N_{\nu 1}$  は反ミューオン崩壊から得る  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  の  $5 \text{ GeV} \leq E_\nu \leq 10(20)\text{GeV}$  のイベント数
- $N_{\nu 2}$  は反ミューオン崩壊から得る  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  の  $10(20)\text{GeV} \leq E_\nu \leq 50\text{GeV}$  のイベント数
- $N_{\bar{\nu} 1}$  はミューオン崩壊から得る  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  の  $5 \text{ GeV} \leq E_\nu \leq 20(10)\text{GeV}$  のイベント数
- $N_{\bar{\nu} 2}$  はミューオン崩壊から得る  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  の  $20(10)\text{GeV} \leq E_\nu \leq 45\text{GeV}$  のイベント数

を意味する。括弧は逆階層的な場合である。

また、*obs* の添え字は自然に存在するものと仮定して与えたある振動パラメータで得られるイベント数であり、*exp* の添え字はそこからいくつものパラメータセットですらして得るイベント数で、それらがどの程度確からしいかを求めるものである。

さらに、 $\sigma$  は実験的測定において生じる系統誤差であり次の節で詳しく説明する。

### 5.2.2 系統誤差

式 (5.11) で使われる系統誤差はそれぞれ添え字によって

- $\sigma_{corr}(\nu - \bar{\nu}$  およびビン間相関誤差) : ミューオン・反ミューオンの交換およびエネルギービンの間にも共通に作用する誤差 (例 : 検出器の大きさ不定性、基線距離誤差など)
- $\sigma_i(\nu - \bar{\nu}$  相関、ビン間非相関誤差) : ミューオン・反ミューオンの交換には共通だが、エネルギービンの間では共通しない誤差 (例 : エネルギーに依存した検出効率誤差など)
- $\sigma_a(\nu - \bar{\nu}$  非相関、ビン間相関誤差) : ミューオン・反ミューオンの交換には共通しないが、エネルギービンの間では共通の誤差 (例 :  $\nu$  と  $\bar{\nu}$  のそれぞれのフラックス誤差、親 (反) ミューオンのエネルギー誤差など)
- $\sigma_{ai}(\nu - \bar{\nu}$  およびビン間非相関誤差) : ミューオン・反ミューオンの交換およびエネルギービンの間にも共通しない誤差 (例 : エネルギーに依存した (反) ニュートリノ断面積誤差など)



を意味する。

今回の研究では具体的な値として  $\sigma_{corr} = 2\%$ ,  $\sigma_i = 2\%$ ,  $\sigma_a = 2\%$ ,  $\sigma_{ai} = 1\%$  を用いた。これらの値は、ニュートリノファクトリー実験ではミュオンエネルギー及びフラックスが非常に精密に決められることから [20][21]、現実的な値からは離れていないと思われる。さらに念のため、これらの系統誤差をすべて2倍にしたときの物質密度感度変化が大きくないことを図 5.3 で示した。

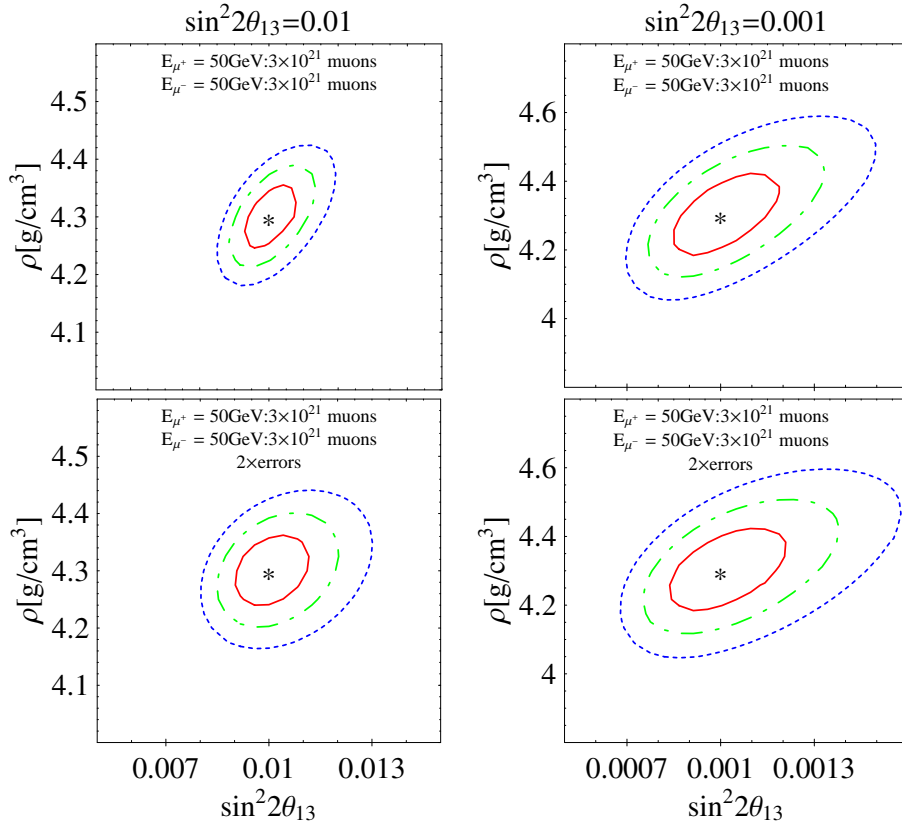


図 5.3: 順階層的で  $\delta = 0$  の場合の 2 自由度  $\sin^2 2\theta_{13}$ -密度感度の図。赤い実線が  $1\sigma(68\%)$ C.L. で、緑の破線が  $2\sigma(95\%)$ C.L.、青の点線が  $3\sigma(99.7\%)$ C.L. で内側が許される領域。7500 km の物質密度一定  $4.3\text{g}/\text{cm}^3$ 。左二つが  $\sin^2 2\theta_{13} = 0.01$  の場合で、右二つが  $\sin^2 2\theta_{13} = 0.001$  の場合。上二つは系統誤差をそれぞれ  $\sigma_{corr} = \sigma_i = \sigma_a = 2\%, \sigma_{ai} = 1\%$  とし、下二つはそれら全部を二倍した値である

この図は簡単のため CP 位相  $\delta$  を 0 に固定した場合における解析であり、本来の魔法基線では  $\delta$  に寄与する項は存在しないため、どのような値を選ぼうともこれまでの範囲では問題ないと思われる。図の詳しい意味は説明文に書いた。

この図を見れば分かるとおり、密度感度は  $\theta_{13}$  が小さくなると(すなわちイベント数が小さくなると)悪くなるが、系統誤差を2倍にしてもほとんど変わらないことがわかる。これはつまり、魔法基線においては密度感度は統計誤差に依存し、系統誤差にはほとんどよらないことを意味する。

$\theta_{13}$  の感度については、それがイベント数に依存しながら、さらに系統誤差にも大きく依存していることが分かる。図は全ての系統誤差を2倍にしたものであるが、 $\theta_{13}$  不定性の悪化には  $\sigma_{corr}$  と  $\sigma_a$  の影響が強い。 $\theta_{13}$  の測定について密度不定性を系統誤差として導入するならば、これは3.4節で議論されたように、物質密度の不定性が  $\theta_{13}$  の決定に大きく影響することを意味するものである。

### 5.2.3 $\delta$ 不定性の導入

何度も繰り返すように、魔法基線では振動確率はその近似式より  $\delta$  には依存しないことがわかる。しかし、あくまでも近似式であるため厳密な計算と合致しない部分が存在するかもしれない。そのため、以降の実際の解析には式(5.11)のカイ二乗に次のような単純な項を加えて  $\delta$  不定性も考慮に入れることにする。これは本来ならば、中距離基線での観測とを重ね合わせた解析を行う代わりに、その中距離で測定される  $\delta$  の値を魔法基線にフィードバックして解析を行うというものである。

$$\left( \frac{\delta - \delta_{\text{best}}}{\sigma_\delta} \right)^2 \quad (5.12)$$

ここで  $\delta_{\text{best}}$  は中距離基線で得られると思って勝手に与える値で、 $\delta$  は  $N^{\text{exp}}$  の中のものと一緒に動かしてカイ二乗を最小化するような値を選ぶ。また  $\sigma_\delta$  はどの程度精密に CP 位相が測られているかを意味するもので、0.35(20度)とした[22]。もし魔法基線での振動確率が完全に CP 位相によらないのであれば、 $\delta$  をどれだけ動かしても  $N^{\text{exp}}$  に変化はないはずで、その場合カイ二乗を最小化する  $\delta$  は式(5.12)をゼロにするようなものとなり、CP 位相不定性は問題にならないはずである。

## 5.3 解析結果

ここからは、これまでの方法を使って実際に得られた結果を見ていく。

### 5.3.1 密度決定精度

自然がもつ  $\theta_{13}$  の値によってどの程度の決定精度で物質密度が測定できるかに注目する。近似公式 (2.23) の  $\theta_{13}$  依存性より、 $\theta_{13}$  が小さければ振動確率も小さくなり、結果的にイベント数も少なくなることが考えられる。その場合、図 5.3 で見たように物質密度決定精度も悪くなることが予想される。

物質密度決定精度がどの程度の  $\theta_{13}$  依存性を持つかを図 5.4 に示した。横軸が自然が選んだ  $\sin^2 2\theta_{13}$  で、縦軸が物質密度決定精度誤差  $\Delta\rho/\rho$  である。線が意味するのは、物質密度の不定性  $\Delta\rho$  をそれぞれ 1 自由度 1, 2, 3  $\sigma$  の信頼水準で  $\Delta\rho/\rho$  としてプロットしたものである。

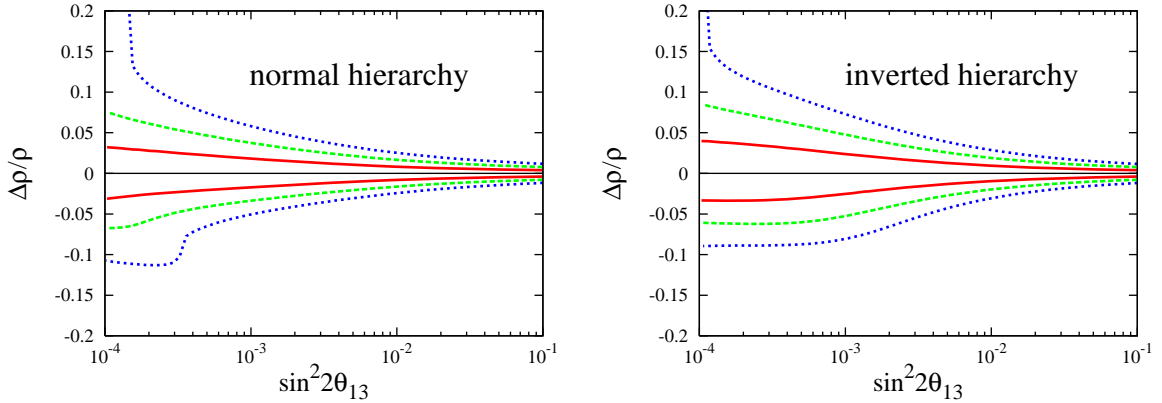


図 5.4: 1 自由度  $\Delta\rho/\rho$  決定精度 (1,2,3  $\sigma$  信頼水準)。左が  $\delta = 0$  の順階層的な場合で、右が  $\delta = 4\pi/3$  の逆階層的な場合。実線赤、破線緑、点線青がそれぞれ 1,2,3  $\sigma$  に対応

左図がニュートリノの質量パターンが順階層的で、 $\delta_{\text{best}} = 0$  であったときの結果であり、右図が逆階層的、 $\delta_{\text{best}} = 4\pi/3$  であったときのものである。

図から読み取れるように、物質密度決定精度の  $\theta_{13}$  依存性は予想通りの形をしているものの、その依存度はそれほど大きなものではない。

$\theta_{13}$  が大きい場合 ( $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1$ )、3  $\sigma$  の信頼水準においても約 1.1 % の精度となっている。さらに  $\theta_{13}$  が小さくなった場合 ( $\sin^2 2\theta_{13} = 0.001$ ) でも、1  $\sigma$  の信頼水準で約 2 (2.5) % (順 (逆) 階層的) の精度が期待できる。

ではここで、今回の解析を使った魔法基線の有効性を見てみる。

図 5.5 は、ニュートリノの質量パターンが順階層的であった場合の横軸を基線距離にとった  $\Delta\rho$  の 1 自由度 1  $\sigma$  信頼水準の線である ( $\sin^2 2\theta_{13} = 0.01, \delta_{\text{best}} = 1.745$ )。臨界エネルギーの議論は魔法基線のもののみしか扱っていないが、この図の解析ではそれぞれの距離で適当な値 (ニュートリノ : 全距離でピンに分けるエネルギー  $E_{th} = 10$  GeV、反ニュートリノ :  $E_{th} = 10$  GeV  $\sim 40$  GeV) をとり、2つのエネルギーピンに分けた解析を行った。2種類の線はそれぞれ  $\delta$  を固定したものと、不定性を導入したものである。

$\delta$  を固定した場合は 7500 km から 9000 km 付近にかけて感度の良い領域が存在する。 $\delta$  の不定性を考慮に入れると近距離の物質密度決定精度は  $\delta$  不定性を導入しない場合に比べてさらに悪くなることを見て取れる。これは魔法基線の議論で見たとおり、 $aL = \pi$  以外の場所では振動確率が  $\delta$  によるためである。魔法基線以遠において  $\delta$  不定性を導入しても精度の悪化がそれほど見られないのは、 $\delta$  依存項の係数に  $\sin(aL - \Delta_{31})$  という項が存在するためと考えられる (順階層的な場合多くのイベント数を得るのはニュートリノチャンネルである)。 $aL$  が魔法基線より遠い距離 ( $> \pi$ ) では、 $\Delta m_{31}^2$  は比較的高エネルギー域においてこの  $\sin(aL - \Delta_{31})$  を  $\sin(\pi) = 0$  に近づけ、 $\delta$  依存項を小さくする働きをするためである。

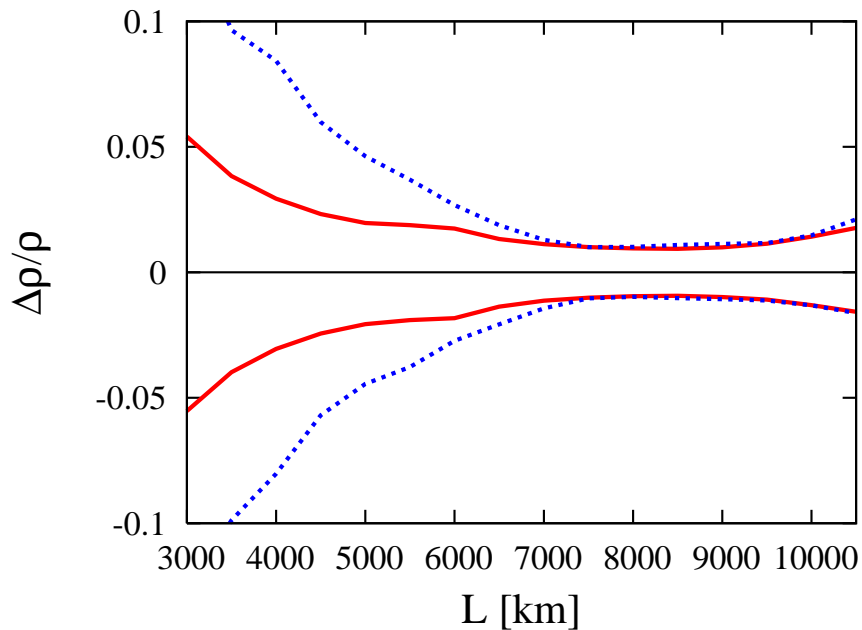


図 5.5: 物質密度決定精度の距離依存性。1 自由度の  $1\sigma$  信頼水準で、赤い実線が  $\delta = 1.74(100^\circ)$  で固定された場合のもの。青い点線は  $\delta_{\text{best}} = 1.74(100^\circ)$  で式 (5.12) を導入したもの。順階層的な質量パターンで  $\sin^2 2\theta_{13} = 0.01$  の場合

### 5.3.2 魔法基線における密度感度の $\delta$ 依存性

ところで、図 5.4 で、順階層的と逆階層的な場合について  $\delta_{\text{best}}$  をそれぞれ別の値にとって解析したことには実は理由が存在する。これまで再三、魔法基線においては  $\delta$  依存性がないことを強調してきたが、実際には  $\theta_{13}$  が非常に小さい場合においては密度決定精度に影響を与えることが分かった。

図 5.6 は、横軸を自然が持っている  $\delta$  にとり、縦軸に密度決定精度の比  $\Delta\rho/\rho$  をとった魔法基線における解析である。 $\delta$  の不定性はこれまでと同様 5.2.3 節で導入したものを使用した。線はそれぞれ様々な自然の  $\theta_{13}$  に対する、1 自由度の  $1\sigma$  信頼水準における  $\Delta\rho$  の不定性である。

左図が質量パターンが順階層的、右図が逆階層的な場合で、 $\sin^2 2\theta_{13}$  の値は図の説明にあるようにそれぞれ、0.1, 0.01, 0.003, 0.001, 0.0001 の5つの場合が開示されている。

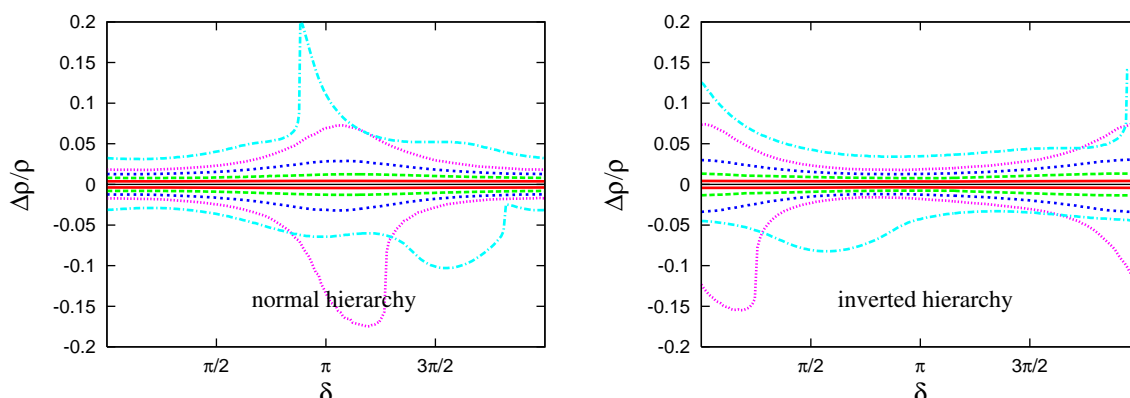


図 5.6: 1 自由度 1  $\sigma$  C.L. の密度決定精度。左が順階層的で右が逆階層的な場合。自然が選んだ真の  $\delta$  と  $\theta_{13}$  によってどの程度違いがあるかを示した。実線赤、破線緑、点線青、短点線桃、波点線水がそれぞれ  $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1, 0.01, 0.003, 0.001, 0.0001$  を意味する

図から読み取れることとして、 $\theta_{13}$  が比較的大きい場合においては魔法基線の持つ特性の期待通り、密度決定精度は  $\delta$  によらず一定の値を持っている。すなわち、 $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1, 0.01, 0.003$  ではそれぞれ  $\Delta\rho/\rho = 0.5\%, 1.3\%, 3\%$  以下になっている。しかし、ある程度  $\theta_{13}$  が小さくなると  $\delta$  の値によっては決定精度が非常に悪くなる現象が見られる。具体的には順階層的な場合、 $\delta = \pi$  付近において、逆階層的な場合、 $\delta = 0$  付近においてそうした振る舞いが見られる。

このような点でどのようなことが起こっているかを簡単に説明すると、図 5.3 で見たような感度領域が、 $\theta_{13}$  が小さく  $\delta$  が上記のような物質密度感度が悪くなる値に近づくにつれ、単一の丸い形ではなく、そこから離れた「島」ができることになる。その「島」は、さらにパラメータが密度感度が最悪になるような値に近づくにつれてももとの中央の感度領域と合体するのである。今回の解析では、「島」が離れている場合は考慮に入れずに値を求めており、それがもともと期待される感度領域と合体した時点で突然精度が悪くなる(図 5.7)。

こうした現象がなぜ起こるのかは、やはり確率振動の近似公式から読み取ることができる。簡単に言うと、図 5.8 のように特定の  $\delta$  の値を持つような場合は密度変化にたいする振動確率の応答が悪くなるために起こる。

より詳しい理解のため、振動確率の近似公式 (2.23) の第二項目までを考慮に入れた解析を行う。第三項目は魔法基線でゼロとなる  $\sin(aL)$  が二乗の形で入っているために無視する。

振動確率の密度変化に対する応答を見るため、エネルギービンに分ける際に臨界エネルギーを調べた方法、つまり式 (5.9) のような魔法基線  $aL = \pi$  からの  $\epsilon$  のずれ  $\delta P$  を第一次までで求めると

$$\begin{aligned} \delta P(\nu_e(\bar{\nu}_e) \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)) &= -\epsilon \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{12} \Delta_{21} \Delta_{31} \frac{\sin \Delta_{31}}{\pi(\pi \mp \Delta_{31})} \\ &\times \left[ \pm \cos(\delta \mp \Delta_{31}) + \frac{\pi \Delta_{31} \sin 2\theta_{13} \tan \theta_{23}}{(\pi \mp \Delta_{31}) \Delta_{21} \sin 2\theta_{12}} \left( \frac{\sin \Delta_{31}}{\pi \mp \Delta_{31}} \pm \cos \Delta_{31} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

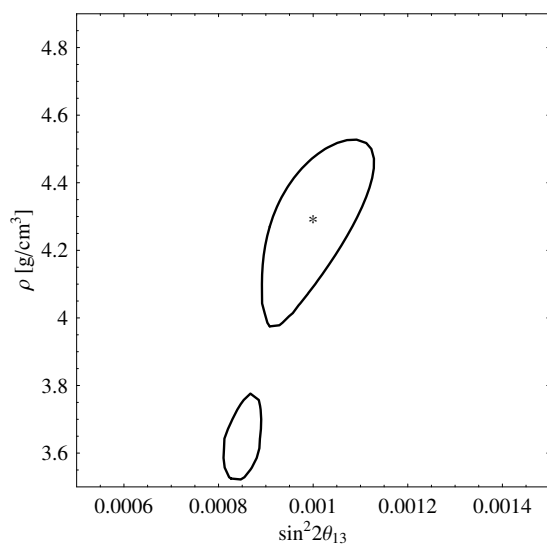


図 5.7: 順階層的な質量パターン、 $\sin^2 2\theta_{13} = 0.001, \delta = 5\pi/4$  の場合。本来期待される感度領域とは離れた場所に許容領域の「島」ができる様子が描かれている。

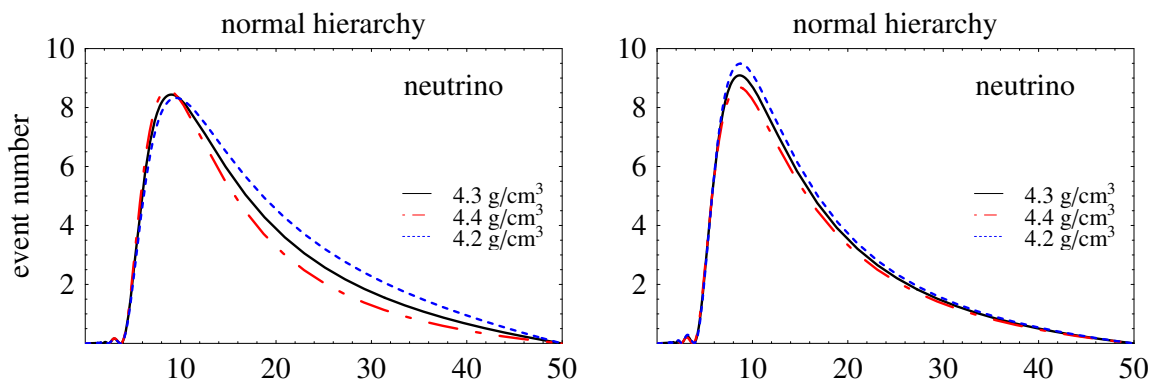


図 5.8: 真の  $\delta$  の値によるイベント数の密度依存性の違いをイベント数のエネルギースペクトルで表した。順階層的な質量パターンであったときのニュートリノチャンネル。 $\sin^2 2\theta_{13} = 0.001$  で左図は  $\delta = 0$ 、右図は  $\delta = 7\pi/6$  である (図 5.6 参照)。それぞれの線の物質効果は図 5.2 と同じ物質密度による。 $\delta$  の値によって密度変化による効果が異なることがわかる。

となる。ここで上下の符号は上：ニュートリノ、下：反ニュートリノである。

大括弧の中に注目すると、適当な振動パラメータの場合この項がゼロになることが予想される。実際、 $\Delta_{31}$  の値によるもののおおよそ 1 のオーダーと思えば、 $\theta_{12}, \theta_{23}$  の現在分かっているデータから、 $\theta_{13}$  が

$$\sin 2\theta_{13} \simeq \Delta_{21}/\Delta_{31} \simeq 0.03 \quad (5.14)$$

すなわち  $\sin^2 2\theta_{13} \sim 0.001$  以下の値になると、大括弧の第二項目は 1 以下になることがわかる。その場合、第一項目の cosine 項は適当な  $\delta$  をとることで、第二項目を打ち消すような値にすることができる。よって、そうした小さい  $\theta_{13}$  の時には、自然の選んだ  $\delta$  によっては密度変化に対する振動確率の応答が非常に小さいものになりうることを意味している。図 5.6 で  $\sin^2 2\theta_{13} = 10^{-3}, 10^{-4}$  の密度決定精度が非常に悪くなる点があるのはそうした理由である。

実際、順階層的な場合解析に対して支配的なチャンネルがイベント数の多いニュートリノモードであることを考慮すると、上記のような条件を満たす  $\delta$  は、 $\sin^2 2\theta_{13} = 0.001$  において、

$$\cos(\delta - \Delta_{31}) = 1 \quad (5.15)$$

となるような値であり、 $10\text{GeV} \sim E \sim 20\text{GeV}$  付近のニュートリノエネルギーを考えると、大まかには  $\delta = \pi$  となることが分かる (図 5.6 の左図参照)。

さらに逆階層的な場合は、反ニュートリノチャンネルが支配的であることを考慮に入れると、二項目を打ち消す cosine の値は順階層的なニュートリノチャンネルのときと符号が逆転したものと

$$\cos(\delta - \Delta_{31}) = -1 \quad (5.16)$$

であり、これはちょうど順階層的な場合で求めた  $\delta$  の値と  $\pi$  だけずれることを意味する。これはまさに、図 5.6 で見た順階層的と逆階層的な場合における密度決定精度に問題を持つ  $\delta$  の値の違いに相当する。

### 5.3.3 中距離基線実験を併用することの重要性

もし自然が、このような魔法基線における密度変化に対する振動確率の応答を弱めるようなパラメータを持っていた場合どのような問題があるかを考える。

図 5.9 に注目する。 $\sin^2 2\theta_{13} = 0.001, \delta = 7\pi/6$  という前節でみた問題をもつようなパラメータにおける順階層的ニュートリノチャンネルの イベント数エネルギースペクトルである。

黒い実線が通常の  $\rho = 4.3\text{g/cm}^3$  をとった場合に期待されるイベントである。赤い破線と青い点線はそれぞれ  $\rho$  か  $\theta_{13}$  を動かした場合のスペクトルである。見て分かる通り、これら 2 つは非常によく似た振動確率変化をもつためこの 2 つのパラメータを同時に決めることが難しくなることがわかる。

こうした状況では、イベント数をより多くの細かいビンに切った解析を行っても良い改善が得られるとは考えられにくい (そもそもイベント数自体が少なく、ビンに切るとさらに統計数が減ってしまう)。このような場合はニュートリノファクトリー実験で同時に行われる中距離基線 ( $\simeq 4000\text{ km}$ ) での実験結果を同時に考慮にいれた解析を行うことが重要であると考えられる。これはごく最近の Gandhi-Winter の解析 [23] によって実証された。

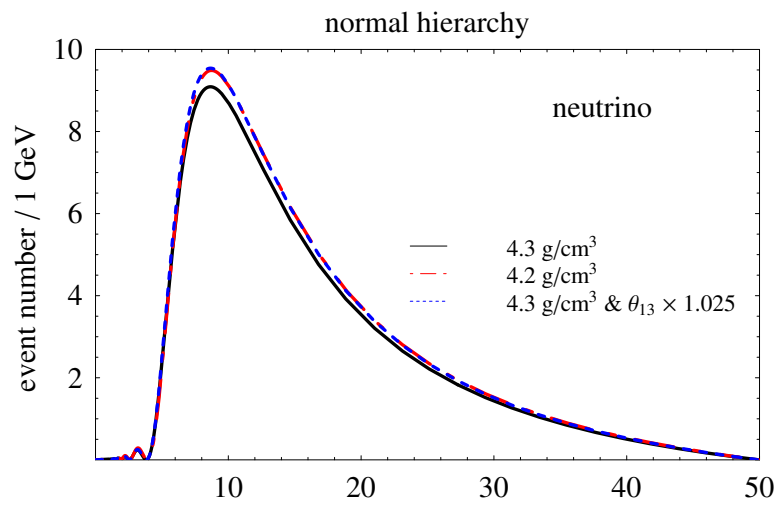


図 5.9: 魔法基線におけるニュートリノチャンネルのイベント数のエネルギースペクトル。順階層的な質量パターン、 $\sin^2 2\theta_{13} = 0.001$ ,  $\delta = 7\pi/6$  の場合。黒実線が物質密度一定で  $\rho = 4.3\text{g/cm}^3$ 、赤い破線は  $\rho = 4.2\text{g/cm}^3$ 、青い点線が  $\rho = 4.3\text{g/cm}^3$  であつ  $\theta_{13}$  を 1.025 倍したもの。  $\theta_{13}$  のスケール変化と物質密度  $\rho$  の変化が同じようなスペクトル変化をもたらす



## 第6章 結論

今回の研究では、地球内部を長距離伝播するニュートリノファクトリー実験においてどの程度精密に物質効果ないし物質密度を測定できるかを考慮した。これは長基線実験が数多く計画されているにも関わらず、振動確率に寄与する物質効果が、地球物理学的見地による物質密度推定からしか言及されていないことに端を発した。すなわち、この物質効果の不定性をニュートリノ振動実験の中で閉じた形で決定することができないか、できる場合どの程度の決定精度が得られるのかが目的となる関心事であった。

まず初めに、親ミューオンのエネルギーを変化させて運転することにより、 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  振動での総イベント数の変化からその物質効果を見ようとした。その際、 $L = \pi\sqrt{2}/G_F n_e$  という魔法基線距離において物質効果依存性が強いことを発見した。さらに、振動確率の摂動公式よりこの魔法基線では CP 位相依存性が消えることが分かっており、 $\delta$  の不定によらず物質密度が測定できることが期待された。また、魔法基線での密度変化が振動確率に及ぼす効果がある臨界エネルギーで正負に分かれることに注目し、イベント数をそのエネルギーの上下で分けて解析を行うことにより、そのまま総イベント数のみを見るよりも、魔法基線距離での解析だけで  $\theta_{13}$  と同時に物質密度を良い精度で決定できることを見た。

しかし、 $\theta_{13}$  が  $\sin^2 2\theta_{13} \lesssim 10^{-3}$  程度に小さい場合は、イベント数の低下からくる統計誤差の増加とは独立に、存在しないと思われていた CP 位相の依存性によって  $\delta$  がある範囲の値であったときに物質密度の決定精度が非常に悪くなることが判明した。その場合は魔法基線のみではなく中距離での観測結果を考慮に入れた同時解析が必要とされる。

以上のように本研究の目的は地球物質密度測定についてのものであるが、ニュートリノ物理学にとってはこれは短期的な目標に過ぎない。これまで物質効果の不定性を密度不定性として捕らえてきたが、ニュートリノの姿をより明らかにするためにはこの物質効果を生む MSW 理論のより高精度な検証こそが重要となる。なぜならば、ニュートリノが持つ相互作用に我々の知らない新しい物理が含まれていないかを確かめるには、既存の相互作用が正しいことが確認されていなければならない。また、CP 位相の測定には今のところ長基線実験が有力視されているため、その際に地中で受ける効果の理論的不定性をなくす必要があるためである。

本研究を基にして、ニュートリノの姿を完全に解明するさらなる物理学の発展に期待し努力したい。

## 謝辞

本論文の研究・作成にあたり、全面的にご指導下さった南方久和先生に感謝いたします。また、この研究のスタートにおいて協力・助言を下されたフェルミ国立研究所の Stephen Parke 氏と Olga Mena 氏にも感謝いたします。そして様々な議論に付き合っていたいただいた研究室のメンバーの皆さんに感謝申し上げます。最後に特に、私を支えてくれた家族と親類、そして友人に心よりの感謝を捧げます。

# 付録 A

## A.1 木村-高村-横枕 公式

この節では木村-高村-横枕 (KTY) 公式を導出する。

密度一定で MSW 効果によるポテンシャルが時間に依存しないならば、物質中での振動確率は、

$$H_{\text{matt}} = \frac{1}{2E} \left( U^* \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} U^T + \begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$V = 2\sqrt{2}G_F n_e E \quad (\text{A.2})$$

という物質中での有効的なハミルトニアンを対角化する有効混合行列  $\tilde{U}$  及び有効的な質量固有値  $\lambda_i$  を使って表すことができる。すなわち

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \left| \sum_i \tilde{U}_{ei}^* e^{-i\frac{\lambda_i}{2E}} \tilde{U}_{\mu i} \right|^2 \quad (\text{A.3})$$

である。

これは真空中での振動確率について、混合行列と質量 2 乗を物質中での有効的なものに置き換えたものと同じである。真空中の振動確率が最終的に  $U_{\alpha i}^* U_{\beta i}$  という混合行列の要素積 2 つの積で書き表すことができたことを考慮すると、有効的な混合行列  $\tilde{U}$  についての  $\tilde{U}_{\alpha i}^* U_{\beta i}$  の要素積と有効質量 2 乗  $\lambda_i$  を真空中の振動パラメータと物質効果項  $V$  のみで表すことができれば、物質中の振動確率もそれらのみで書くことが可能であることがわかる。

有効質量 2 乗は式 (A.1) の固有値を求めることにより、真空中の混合行列要素と  $V$  とで表されるため、有効混合行列を真空中のパラメータと  $V$  で書き表すことができるかに注目する。

そこでまず、物質中の有効ハミルトニアンの行列要素の内  $V$  が入っていない部分は真空中のものと同様であることに着目し、それらを  $p, q$  として次のように定義すると

$$H_{e\mu}^{\text{matt}} \equiv \frac{p}{2E} \quad (\text{A.4})$$

$$H_{e\tau}^{\text{matt}} H_{\tau\mu}^{\text{matt}} - H_{e\mu}^{\text{matt}} H_{\tau\tau}^{\text{matt}} \equiv \frac{q}{(2E)^2} \quad (\text{A.5})$$

これらを使って2つの行列要素の積の関係が

$$\sum_i \tilde{U}_{ei}^* \tilde{U}_{\mu i} = \sum_i U_{ei}^* U_{\mu i} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_i \lambda_i \tilde{U}_{ei}^* \tilde{U}_{\mu i} = \sum_i m_i^2 U_{ei}^* U_{\mu i} = p \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{(i,j,k)}^{\text{cyclic}} \lambda_j \lambda_k \tilde{U}_{ei}^* \tilde{U}_{\mu i} = \sum_{(i,j,k)}^{\text{cyclic}} m_j^2 m_k^2 U_{ei}^* U_{\mu i} = q \quad (\text{A.8})$$

のようになることが分かる。ここで cyclic は  $(i, j, k)$  をそれぞれ  $(1,2,3), (2,3,1), (3,2,1)$  ととる。これらは  $\tilde{U}_{ei} \tilde{U}_{\mu i}$  を未知数とする三つの方程式であり解くことができ、

$$\tilde{U}_{ei}^* \tilde{U}_{\mu i} = \frac{p\lambda_i + q}{\Delta\lambda_{ji}\Delta\lambda_{ki}} \quad (\text{A.9})$$

が得られる。ここで、 $\Delta\lambda_{ij} \equiv \lambda_i - \lambda_j$  とした。

物質中の振動公式をさらにあらわに書くと

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = -4 \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} \text{Re}(\tilde{U}_{ei}^* \tilde{U}_{\mu i} \tilde{U}_{ej} \tilde{U}_{\mu j}^*) \sin^2 \left( \frac{\Delta\lambda_{ij} L}{4E} \right) - 2 \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} \tilde{J} \sin \left( \frac{\Delta\lambda_{ij} L}{2E} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Re}(\tilde{U}_{ei}^* \tilde{U}_{\mu i} \tilde{U}_{ej} \tilde{U}_{\mu j}^*) = \frac{|p|^2 \lambda_i \lambda_j + |q|^2 + \text{Re}(pq^*)(\lambda_i + \lambda_j)}{\Delta\lambda_{ij} \Delta\lambda_{12} \Delta\lambda_{23} \Delta\lambda_{31}} \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{J} = -\frac{\text{Im}(pq^*)}{\Delta\lambda_{12} \Delta\lambda_{23} \Delta\lambda_{31}} \quad (\text{A.12})$$

である。真空中での混合行列のパラメトリゼーションを (2.2) のようにとると、 $p, q$  は次のような形になる。

$$p = p_1 e^{i\delta} + p_2 \quad (\text{A.13})$$

$$q = q_1 e^{i\delta} + q_2 \quad (\text{A.14})$$

$$p_1 = (\Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2 s_{12}^2) s_{23} s_{13} c_{13} \quad , \quad p_2 = \Delta m_{21}^2 s_{12} c_{12} c_{23} c_{13}$$

$$q_1 = -\Delta m_{31}^2 \Delta m_{21}^2 c_{12}^2 s_{23} s_{13} c_{13} \quad , \quad q_2 = -\Delta m_{31}^2 \Delta m_{21}^2 s_{12} c_{12} c_{23} c_{13}$$

よって、振動確率中にでてくる量は以下のようになる。

$$|p|^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \delta \quad (\text{A.15})$$

$$|q|^2 = q_1^2 + q_2^2 + 2q_1 q_2 \cos \delta \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Re}(pq^*) = p_1 q_1 + p_2 q_2 + (p_1 q_2 + q_1 p_2) \cos \delta \quad (\text{A.17})$$

$$\text{Im}(pq^*) = (p_2 q_1 - p_1 q_2) \sin \delta \quad (\text{A.18})$$

これにより、物質中での振動確率の式を真空中の混合パラメータを使って CP 位相を分離した形に書き下すことが可能になる。すなわち

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = A \cos \delta + B \sin \delta + C \quad (\text{A.19})$$

$$A = \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} A_{ij} \sin^2 \left( \frac{\Delta\lambda_{ij}L}{4E} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$B = \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} B' \sin \left( \frac{\Delta\lambda_{ij}L}{2E} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$C = \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} C_{ij} \sin^2 \left( \frac{\Delta\lambda_{ij}L}{4E} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$A_{ij} = -4 [2p_1p_2\lambda_i\lambda_j + 2q_1q_2 + (p_1q_2 + q_1p_2)(\lambda_i + \lambda_j)] (\Delta\lambda_{ij}\Delta\lambda_{12}\Delta\lambda_{23}\Delta\lambda_{31})^{-1} \quad (\text{A.23})$$

$$B' = \frac{-2(p_2q_1 - p_1q_2)}{\Delta\lambda_{12}\Delta\lambda_{23}\Delta\lambda_{31}} \quad (\text{A.24})$$

$$C_{ij} = -4 [(p_1^2 + p_2^2)\lambda_i\lambda_j + (q_1^2 + q_2^2) + (p_1q_1 + q_2p_2)(\lambda_i + \lambda_j)] \times (\Delta\lambda_{ij}\Delta\lambda_{12}\Delta\lambda_{23}\Delta\lambda_{31})^{-1} \quad (\text{A.25})$$

を得る。

## A.2 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ 摂動公式

KTY を用いた厳密公式はさらに変形して、摂動公式を導くことが可能である。

まず最も簡単な  $B$  の形を変形する。  $x + y + z = 0$  の元では

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = -4 \sin x \sin y \sin z \quad (\text{A.26})$$

であり、この関係式を使うと

$$B = -4B' \sin\left(\frac{\Delta\lambda_{12}L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta\lambda_{23}L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta\lambda_{31}L}{4E}\right) \quad (\text{A.27})$$

である。

またさらに上と同じ条件で

$$\sin^2 x = -\sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \sin z \quad (\text{A.28})$$

であることを用いると

$$A = - \sum_{(i,j,k)}^{\text{cyclic}} (A_{jk} + A_{ki}) \cos\left(\frac{\Delta\lambda_{ij}L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta\lambda_{jk}L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta\lambda_{ki}L}{4E}\right) \quad (\text{A.29})$$

となることがわかる。

これを使い現在のところ小さいと分かっているパラメータ  $\Delta m_{21}^2$  項の依存度が分かりやすい形で表すと

$$A = \sum_{(i,j,k)}^{\text{cyclic}} \frac{-8J_r \Delta m_{21}^2 \left[ \Delta m_{31}^2 \lambda_k (\lambda_k - \Delta m_{31}^2) - A_k^{(1)} \right]}{(\Delta\lambda_{jk})^2 (\Delta\lambda_{ki})^2} \times \cos\left(\frac{\Delta\lambda_{ij}L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta\lambda_{jk}L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta\lambda_{ki}L}{4E}\right) \quad (\text{A.30})$$

$$B = \frac{8J_r \Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2 (\Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2)}{\Delta\lambda_{12} \Delta\lambda_{23} \Delta\lambda_{31}} \sin\left(\frac{\Delta\lambda_{12}L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta\lambda_{23}L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta\lambda_{31}L}{4E}\right) \quad (\text{A.31})$$

$$C = \sum_{(i,j)}^{\text{cyclic}} \frac{-4 \left[ s_{13}^2 \left\{ s_{23}^2 c_{13}^2 (\Delta m_{31}^2)^2 \lambda_i \lambda_j + C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2a)} \right\} + C_{ij}^{(2b)} \right]}{\Delta\lambda_{ij} \Delta\lambda_{12} \Delta\lambda_{23} \Delta\lambda_{31}} \sin^2\left(\frac{\Delta\lambda_{ij}L}{4E}\right) \quad (\text{A.32})$$

となる。ここで  $J_r = s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} s_{13} c_{13}^2$  とした。上付き添え字の (n) は  $\Delta m_{21}^2$  の n 次項を意味してそれぞれ

$$A_k^{(1)} = \Delta m_{21}^2 \left[ \Delta m_{31}^2 \lambda_k (c_{12}^2 - s_{12}^2) + \lambda_k^2 s_{12}^2 - (\Delta m_{31}^2)^2 c_{12}^2 \right] \quad (\text{A.33})$$

$$C_{ij}^{(1)} = \Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2 \left[ -\lambda_i (\lambda_j s_{12}^2 + \Delta m_{31}^2 c_{12}^2) - \lambda_j (\lambda_i s_{12}^2 + \Delta m_{31}^2 c_{12}^2) \right] s_{23}^2 c_{13}^2 \quad (\text{A.34})$$

$$C_{ij}^{(2a)} = (\Delta m_{21}^2)^2 (\lambda_i s_{12}^2 + \Delta m_{31}^2 c_{12}^2) (\lambda_j s_{12}^2 + \Delta m_{31}^2 c_{12}^2) s_{23}^2 c_{13}^2 \quad (\text{A.35})$$

$$C_{ij}^{(2b)} = (\Delta m_{21}^2)^2 (\lambda_i - \Delta m_{31}^2) (\lambda_j - \Delta m_{31}^2) s_{12}^2 c_{12}^2 c_{23}^2 c_{13}^2 \quad (\text{A.36})$$

である。摂動公式のためこれらを見捨て、さらに物質中の有効質量二乗に注目する。ニュートリノファクトリー実験では物質効果  $V = 2\sqrt{2}G_F n_e E$  は  $\Delta m_{31}^2$  と同程度以上に大きい。そのため、有効質量二乗のうち最も小さいものは  $\lambda_1 \simeq \Delta m_{21}^2$  として見捨て、他の二つが  $V, \Delta m_{31}^2$  とできる。すると  $\Delta m_{21}^2/\Delta m_{31}^2 < s_{13}$  のもとでは

$$A = 8J_r \cos \Delta_{31} \left( \frac{\Delta_{31} \sin(aL + \Delta_{31})}{aL + \Delta_{31}} \right) \left( \frac{\Delta_{21} \sin(aL)}{aL} \right) \quad (\text{A.37})$$

$$B = 8J_r \sin \Delta_{31} \left( \frac{\Delta_{31} \sin(aL + \Delta_{31})}{aL + \Delta_{31}} \right) \left( \frac{\Delta_{21} \sin(aL)}{aL} \right) \quad (\text{A.38})$$

$$C = 4s_{13}^2 c_{13}^2 s_{23}^2 \left( \frac{\Delta_{31} \sin(aL - \Delta_{31})}{aL - \Delta_{31}} \right)^2 \quad (\text{A.39})$$

となる。ここで  $\Delta_{ij} \equiv \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}$  であり、 $a = G_F n_e / \sqrt{2}$  である。

これらは  $A, B$  について  $\delta$  の三角関数の合成を使えば  $\cos(\delta - \Delta_{31})$  の項を得る。

$\Delta m_{21}^2/\Delta m_{31}^2 \gg s_{13}$  のような小さい  $\theta_{13}$  を考慮すると式 (A.36) の中にある  $s_{13}^2$  項がかからない  $C_{ij}^{(2b)}$  が効いてくることになる。その項はすなわち

$$C' = 4s_{12}^2 c_{12}^2 c_{23}^2 c_{13}^2 \left( \frac{\Delta_{21} \sin(aL)}{aL} \right)^2 \quad (\text{A.40})$$

であり、これらから  $c_{13}$  を適当に 1 と近似すると摂動公式 (2.23) を得る。

### A.3 ミューオン崩壊

この節ではニュートリノファクトリー実験の際に得られる、オリジナルニュートリノフラックスを表すためのミューオン崩壊を計算する。

まずはミューオンの静止系で計算し、それを実験のミューオンエネルギーにブーストすることで本来のフラックスが得られる。

その崩壊モードは

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (\text{A.41})$$

であり、ウィークボソンの伝播を潰しフェルミ結合定数で置き換えた有効ラグランジアンでは図 A.1 のようにあらわせる。

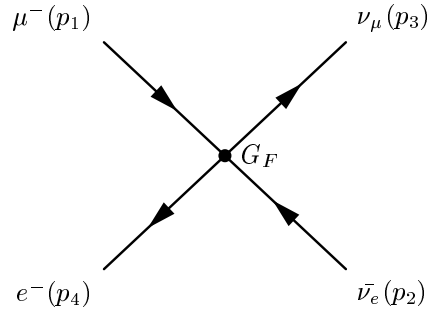


図 A.1: ミューオン崩壊

ミューオンが偏極していない時の崩壊率はスピンの平均と和をとり

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_\mu} |M|^2 \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \quad (\text{A.42})$$

ここで

$$\begin{aligned} |M|^2 &= \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{2} \sum_s \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \{ \bar{u}(p_3) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(p_1) \}^* \\ &\quad \times \sum_{s'} \bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \{ \bar{u}(p_4) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) u(p_2) \}^* \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

である。さらにスピン和の変形で

$$|M|^2 = 64 G_F^2 (p_1 p_2) (p_3 p_4) \quad (\text{A.44})$$

となることが分かる。ここで、 $(p_i p_j) \equiv g_{\mu\nu} p_i^\mu p_j^\nu$  とした。

また、電子の質量を無視すると

$$\int (2\pi)^4 (p_3 p_4) \frac{d^3p_3 d^3p_4}{(2\pi)^6 4E_3 E_4} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) = \frac{1}{16\pi} P^2 \quad (\text{A.45})$$



となる。ここで  $P^\mu \equiv p_1^\mu - p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$  である。よって、

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 (p_1 p_2) P^2}{8m_\mu \pi^4} \frac{d^3 p_2}{E_2} \quad (\text{A.46})$$

が得られる。

今、ミューオン静止系のため、 $(p_1 p_2) = m_\mu E_2$ 、 $P^2 \equiv P_\mu P^\mu = m_\mu^2 - m_\mu E_2$  であり、

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} 12x^2(1-x) \quad (\text{A.47})$$

となることが分かる。ここで  $m_\mu$  はミューオンの質量で、 $x \equiv \frac{2E_2}{m_\mu}$  である。

なお、静止した粒子の崩壊を考えているため、ニュートリノのエネルギーが親のミューオンの質量の半分までしかとれないことに注意して積分すると

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} = \frac{1}{2.2 \times 10^{-6}} [\text{s}^{-1}] \quad (\text{A.48})$$

となることが分かる。

ニュートリノファクトリーで生み出され距離  $L$  離れた地点での反電子ニュートリノのフラックスは、ミューオンエネルギーを  $E_\mu$  として式 (A.46) をブーストし、

$$\frac{d^2 N}{dE_\nu d\Omega} = \frac{24n_\mu}{\pi L^2 m_\mu^6} E_\mu E_\nu^2 (1 - \beta \cos \phi) \{m_\mu^2 - 2E_\mu E_\nu (1 - \beta \cos \phi)\} \quad (\text{A.49})$$

となることが求まる。ここで  $\beta = \sqrt{1 - m_\mu^2/E_\mu^2}$ 、 $E_\nu (= E_2)$  は反電子ニュートリノのエネルギーであり、 $\phi$  はビームの方向と検出器への方向との間の角度である。また、 $n_\mu$  は一年間で得られる実効的なミューオンの崩壊数とする。

また、 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$  崩壊でも同様の計算により  $\nu_e$  フラックスは同じ式となる。

## 参考文献

- [1] R. J. Davis, D. S. Harmer and K. C. Hoffman, Phys. Rev. Lett. **20**, 1205 (1968).
- [2] M. Apollonio *et al.* [CHOOZ Collaboration], Phys. Lett. B **466**, 415 (1999) [arXiv:hep-ex/9907037].
- [3] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [4] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. **55**, 1039 (1985).
- [5] L. Wolfenstein, Phys. Rev. D **17**, 2369 (1978);  
S. P. Mikheev and A. Y. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42**, 913 (1985) [Yad. Fiz. **42**, 1441 (1985)].
- [6] K. Kimura, A. Takamura and H. Yokomakura, Phys. Lett. B **537**, 86 (2002).
- [7] A. Cervera, A. Donini, M. B. Gavela, J. J. Gomez Cadenas, P. Hernandez, O. Mena and S. Rigolin, Nucl. Phys. B **579**, 17 (2000) [Erratum-ibid. B **593**, 731 (2001)].
- [8] V. Barger, D. Marfatia and K. Whisnant, Phys. Rev. D **65**, 073023 (2002).
- [9] P. Huber and W. Winter, Phys. Rev. D **68**, 037301 (2003).
- [10] A. Blondel, A. Cervera-Villanueva, A. Donini, P. Huber, M. Mezzetto and P. Strolin, Acta Phys. Polon. B **37**, 2077 (2006).
- [11] S. K. Agarwalla, S. Choubey and A. Raychaudhuri, arXiv:hep-ph/0610333;  
A. Y. Smirnov, arXiv:hep-ph/0610198.
- [12] A. Cervera, F. Dydak and J. Gomez Cadenas, Nucl. Instrum. Meth. A **451**, 123 (2000);
- [13] M. Ellis, "ISS Detector Working Group Report and Discussion," NuFact 06 Workshop, August 24-30, 2006.
- [14] PDG;W.-M. Yao et al., J. Phys. G **33**, 1 (2006)
- [15] P. Huber, M. Lindner, M. Rolinec and W. Winter, Phys. Rev. D **74**, 073003 (2006) [arXiv:hep-ph/0606119].
- [16] T. Ohlsson and W. Winter, Phys. Rev. D **68**, 073007 (2003) [arXiv:hep-ph/0307178].

- [17] T. Hara, *Journal of Geography* **114**, 3, 323 (2005)
- [18] A. M. Dziewonski and D. L. Anderson, “Preliminary reference Earth model,” *Phys. Earth. Planet. Inter.* **25**, 4, 297, (1981)
- [19] H. Minakata and H. Sugiyama, *Phys. Lett. B* **580**, 216 (2004) [arXiv:hep-ph/0309323].
- [20] R. Raja and A. Tollestrup, *Phys. Rev. D* **58**, 013005 (1998) [arXiv:hep-ex/9801004].
- [21] M. Apollonio *et al.*, arXiv:hep-ph/0210192.
- [22] P. Huber, M. Lindner and W. Winter, *JHEP* **0505**, 020 (2005) [arXiv:hep-ph/0412199].
- [23] R. Gandhi and W. Winter, arXiv:hep-ph/0612158.