

素粒子の標準模型とその高エネルギーでの姿

小原 怜

首都大学東京大学院
理工学研究科物理学専攻
素粒子理論研究室

2013年2月27日

概要

標準模型は、現在の素粒子物理学における最も確立された理論のひとつであり、その予言と明らかに矛盾する実験結果はほとんどないと言ってよい。さらに最近の LHC 実験において、標準模型で存在が示唆される「ヒッグス粒子」らしき粒子が発見されたことにより、その地位はさらに確固たるものとなってきた。標準模型において粒子が質量を持つためには、「電弱対称性」と呼ばれる対称性が自発的に破れるような機構がなくてはならない。この「電弱対称性の自発的破れ」を起こす物理が標準模型におけるような最小限のもので良いかどうかは実験的には決定されていない。また、標準模型はいくつかの解決していない問題を抱えているため最終理論であるとは考えられておらず、電弱対称性の自発的破れを引き起こす物理を研究することは、「標準模型を超えた理論」を探求するための足がかりとなるだろう。

本論文では標準模型を概観すると共に、標準模型における電弱対称性の破れを引き起こす物理を量子補正を考慮して考察することにより、標準模型の高エネルギーでの姿を推測しその限界について定性的に議論する。

目次

1	導入	5
2	ゲージ対称性とその自発的破れ	7
2.1	ゲージ対称性	7
2.2	対称性の自発的破れ	9
3	標準模型	14
3.1	弱い相互作用	16
3.2	電弱相互作用	18
3.2.1	ヒッグス機構	19
3.2.2	G_F の導出	21
3.2.3	小林-益川理論	23
3.2.4	GIM 機構	25
3.3	理論の検証と問題点	26
4	高エネルギーでのポテンシャルの振る舞い	29
5	まとめ	36

図目次

1	ポテンシャル	6
2	μ -decay のファインマン図	16
3	τ -decay のファインマン図	17
4	W ボソンが媒介する相互作用のファインマン図	22
5	$K^0 - \bar{K}^0$ mixing のファインマン図	25
6	ヒッグス場とトップクォークの 1-loop ファインマン図	30
7	トップクォークの質量のみ考慮した結合定数の振る舞い	31
8	λ が負の時のポテンシャル	32
9	強い相互作用を考慮した結合定数の振る舞い	33
10	すべてのゲージ相互作用を考慮した λ の振る舞い	33
11	すべてのゲージ相互作用と μ の値を考慮した λ の振る舞い	34
12	トップクォークの質量を 2[GeV] ずつ変化させた結合定数の振る舞い	34

表目次

1	素粒子の対称性に関する表現	15
---	---------------	----

1 導入

素粒子物理学とは、物理法則の起源を探求する、物理学の最も基盤となる研究分野の1つである。しかしながら、素粒子の世界を覗くためには非常に高いエネルギーな実験が必要となり、理論の正当性や新たな理論へのヒントを探る実験を行うことは極めて困難になりつつある。現在最も信頼されている理論の一つは標準模型であるが、これを拡張してより大きいエネルギースケールの物理を記述した理論がいくつも提唱されてきた。しかしそれらを実証する実験結果は見つからず、ほぼすべて標準模型で矛盾なく説明出来てしまっている。それでも、標準模型には階層性の問題やニュートリノの質量の問題などいくつかの解決できない問題が存在し、ダークマターの正体や重力相互作用についても言及していないことから、それらを説明するさらなる上の理論が存在することが予想される。

長い間、標準模型を超えると期待されるエネルギースケールでの実験はできなかったが、2011年から大型加速器実験 LHC 実験が稼働し始めた。この実験は陽子と陽子を衝突させるもので、2012年には8TeVの衝突エネルギーの実験が行われた。今のところ「標準模型を超える物理」の発見には至っていないが、2012年に標準模型で存在が予言されていた「ヒッグス粒子」らしき粒子を発見するという大きな成果を出した [1][2]。さらに今後は14TeVという未知の高エネルギー領域に到達する実験を行うことが予定されているので、「標準模型を超える理論」の発見と共に素粒子理論の新たな時代の幕開けが期待されている。

標準模型は $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ対称性からなる理論であり、対称性によって許されるすべての項を書き下すことによってラグランジアンを導くことができる。ラグランジアンを構成する粒子は12種類のクォーク、レプトンと、3種類の相互作用を媒介するゲージ粒子、「電弱対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の自発的に破れ」に関連して予言されるヒッグス粒子となっている。ラグランジアンにゲージ対称性を要請すると、ゲージ場が質量を持つことができない。しかし現在の自然のエネルギースケールでは弱い相互作用を担うゲージ粒子は質量を持っているため、「対称性の自発的に破れ」によって弱い相互作用を担うゲージ粒子が質量を得る、いわゆるヒッグス機構 [3] が必要となる。

「対称性が自発的に破れる」という現象は、ラグランジアンに課せられている対称性を真空が破ることで、対称性の物理的帰結が現実世界に現れないことである。この「対称性の自発的破れ」を引き起こす機構の一つに、特定のポテンシャルをラグランジアンに加えることで真空を再定義する手法がある。それによってもともとラグランジアンに存在していた対称性が見えなくなる。

標準模型では、この「ポテンシャルを加える方法」を用いて $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ の様に対称性を自発的に破る。その結果、弱い相互作用を媒介するゲージ粒子は質量を持つことになり、これをヒッグス機構と呼ぶ。この時にラグランジアンに加える項をヒッグスセクターと呼ぶ。標準模型では、ヒッグスセクターを複素スカラー場 Φ を使って最低限の形で

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V \quad (1)$$

としている。ここでポテンシャルは図1の様に表すことができ、この形をワインボトル型と呼

ぶ。このポテンシャルの極値は $\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0$ となる点で取ることができるが、 $\Phi = 0$ は安定ではないため、残りの点が真空とならなければならない。ここで $\Phi = 0$ では図 1 のポテンシャルは回転対称だが、残りの点では対称ではないことがわかる。よってこのラグランジアンに存在していた対称性が「自発的に破れた」こととなる。

この理論は多くの実験を矛盾なく説明できている、さらに LHC 実験において、予言されていたヒッグス粒子と解釈できる粒子が発見されたことにより、さらに理論の説得力は強いものとなった。しかしながら、ヒッグスセクターについてはこの形である必然性はなく、これまで提唱されてきた「標準模型を超える理論」では異なるヒッグスセクターを必要とする理論もあり、この形を決めることは新たな理論への制約をつけるためにも必要不可欠である。

ここで (1) 式におけるスカラー場 Φ の自己相互作用の結合定数 λ について考える。この結合定数には量子補正の計算で出てくる無限大 (発散) を繰り込まなければならない。一般的に繰り込みの手法にはいくつかの任意性があり、その任意性によって繰り込んだ量は変化してしまうが、観測される物理量は繰り込みの手法によって変化することはないはずである。つまり「観測する物理量に手法による任意性はない」という繰り込みに対する制限を付けることができ、それは繰り込み群方程式と導く。繰り込み群方程式を解くと、発散項を繰り込んだ結合定数が、それを観測するエネルギースケールに依存して変化することを表す式を導くことができる。この変化する結合定数を「ランニングカップリング」と呼び、結合定数の高エネルギーでの振る舞いを見ることでその理論の正当性や記述できるエネルギースケールの限界などを定性的に議論することができる。

本論文は第 2 章で、標準模型を理解する上で非常に重要なゲージ対称性について説明し、3 章で標準模型についてまとめる。第 4 章で標準模型の繰り込みと繰り込み群方程式を計算し、(1) 式のヒッグスセクターを用いた標準模型の高エネルギーでの振る舞いを定性的に議論する。厳密には (1) 式のポテンシャルへの有限の量子補正についての議論も必要となるが、本論文では考えない。

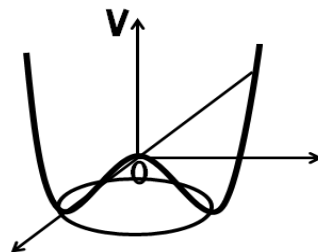


図 1: ポテンシャル

2 ゲージ対称性とその自発的破れ

素粒子物理は対称性を用いて理解されることが多く、対称性の概念を理解することは重要である。このセクションでは標準模型について概観する前に、ゲージ対称性と対称性の自発的破れについて説明する。

2.1 ゲージ対称性

対称性は時空の対称性と内部対称性に分けられ、それぞれについて大局的対称性と局所的対称性とに分類できる。つまり合計4種類の対称性に分けられるわけだが、ここでは特に局所的内部対称性である局所ゲージ対称性にスポットを当て説明する。

まずある場 $\phi_i, i = 1, 2, 3, \dots$ について次の様な大局的微小変換を考える。

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \theta^a (\delta\phi_i)^a. \quad (2)$$

ここで、 $\theta^a, a = 1, 2, 3, \dots$ は x に依らない変換のパラメーターである。この時、系のラグランジアンが不変であるならば、

$$J_\mu^a \equiv \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} (\delta\phi_i)^a \quad (3)$$

のように定義されるカレントが保存する:

$$\partial^\mu J_\mu^a = 0. \quad (4)$$

この時、カレントの時間成分を使って

$$Q^a \equiv - \int d^3x J_0^a \quad (5)$$

のように定義される電荷が保存する:

$$\frac{d}{dt} Q^a = 0. \quad (6)$$

場の量子化の手続きによりこの電荷 Q^a は演算子となり、演算子としての場 ϕ_i の変換を次のように生成する。

$$[iQ^a, \phi_i] = (\delta\phi_i)^a. \quad (7)$$

この演算子としての電荷を変換の生成子と呼ぶ。生成子 Q^a で生成される変換に対し、演算子としてのラグランジアン \mathcal{L} が不変であるということは、

$$[iQ^a, \mathcal{L}] = 0 \quad (8)$$

と表すことができる。

次に局所ゲージ変換を考える。

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \theta^a(x)(\delta\phi_i)^a. \quad (9)$$

ここで、 θ^a が x に依っていることに注意する。もし θ^a が x に依らない変換でラグランジアン \mathcal{L} が不変であるなら大局的対称性があるということであるが、そのような変換は、全宇宙の過去から未来まですべてに対して同じ位相変換を行うことに対応している。これはあまり自然とは言えず位相が x に依る変換のほうが自然だと考える。この様な、局所ゲージ変換に対してラグランジアンが不変であると要求することをゲージ原理と呼ぶ。この変換の下でのラグランジアンの変換は (3) 式で定義されたカレント J_μ^a を使って、

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + (\partial^\mu \theta^a(x)) J_\mu^a \quad (10)$$

と書ける。ラグランジアンが不変であるためには、第2項を打ち消すような変換を受ける項をラグランジアンに付け加える必要がある。そこで導入するのがゲージ場である。導入するゲージ場の性質と加える項の形はカレント J_μ^a の変換性によって異なる。

簡単な例として、次のようなラグランジアンに従うフェルミオン場 Ψ を考える。

$$\mathcal{L} \equiv \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi. \quad (11)$$

さらに、局所ゲージ変換

$$\Psi \rightarrow e^{i\theta(x)} \Psi \quad (12)$$

を考える。カレントは次のように計算できる。

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Psi)}(i\Psi) = -\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi. \quad (13)$$

このカレントは (12) 式の変換の下で不変である。このように保存カレントが変換に対して不変な時は、

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta(x) \quad (14)$$

のように変換するゲージ場を加え、

$$\mathcal{L}_{\text{new}} = \mathcal{L} + g A^\mu(x) J_\mu(x) \quad (15)$$

とすればよい。実際にこれを (8) 式のラグランジアンに適用し、(9) 式の変換を行うと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{new}} &= (\bar{\Psi}(x) e^{-i\theta(x)}) i \gamma^\mu (\partial_\mu e^{i\theta(x)} \Psi(x)) + e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} \bar{\Psi}(x) i \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi(x)) \\ &\quad + g (A^\mu - \frac{1}{g} \partial^\mu \theta^a(x)) (e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} \bar{\Psi}(x) i \gamma_\mu \Psi(x)) \\ &= \bar{\Psi}(x) i \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi(x)) + g A^\mu \bar{\Psi}(x) i \gamma_\mu \Psi(x) \end{aligned} \quad (16)$$

と不変であることがわかる。共変微分

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \quad (17)$$

を導入すれば、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{new}} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu D_\mu \Psi. \quad (18)$$

となり、

$$D_\mu \Psi = D_\mu \Psi' = e^{i\theta(x)} D_\mu \Psi \quad (19)$$

と変換することから、その不変性は明らかである。

ここで、導入したゲージ場の運動項として、次のようなラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L}_A \equiv -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (20)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (21)$$

$F^{\mu\nu}$ は (14) 式の変換の下で不変である:

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{g} \partial^\mu \partial^\nu \theta(x) - \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{g} \partial^\nu \partial^\mu \theta(x) = F^{\mu\nu}. \quad (22)$$

同様にラグランジアン \mathcal{L}_A もゲージ不変である。この時ラグランジアンに質量項

$$\frac{1}{2} M_A^2 A^\mu A_\mu \quad (23)$$

を加えらとする。この項は (14) 式の変換の下で

$$\frac{1}{2} M_A^2 A^\mu A_\mu \rightarrow \frac{1}{2} M_A^2 \left(A^\mu A_\mu - \frac{2}{g} A^\mu \partial_\mu \theta(x) + \frac{1}{g^2} \partial^\mu \theta(x) \partial_\mu \theta(x) \right) \quad (24)$$

となるため、明らかにゲージ不変ではない。つまりラグランジアンにゲージ不変性を要請すると、導入されるゲージ場は質量項を持たない。

2.2 対称性の自発的破れ

系に大局的対称性や局所対称性が存在するとき、それは物理現象に反映される。その反映のされ方を表現と呼び、大局的対称性と局所対称性についてそれぞれ2種類の表現が存在する。まずはその種類と特性を簡単に説明する。

大局的対称性には次の2種類の表現がある。

$$\begin{cases} \text{Wigner phase} & (Q^a |0\rangle = 0) \\ \text{Nambu-Goldstone phase} & (Q^a |0\rangle \neq 0) \end{cases} \quad (25)$$

Wigner phase は真空が対称性を持つ表現である。この時、保存カレントによって定義される電荷 Q^a は保存する。一方、Nambu-Goldstone phase は真空が対称性を破った表現である。この場合には電荷は保存しないが、質量ゼロの南部ゴールドストーン粒子が存在する。

局所対称性の表現は次の2つである。

$$\begin{cases} \text{Wigner phase} & (Q^a |0\rangle = 0) \\ \text{Higgs phase} & (Q^a |0\rangle \neq 0) \end{cases} \quad (26)$$

Wigner phase では、上記と同様に保存する電荷 Q^a によって、場と質量ゼロのゲージ場の相互作用が決まる。Higgs phase ではゲージ場が南部ゴールドストーン粒子の自由度を吸って質量を得る。次にこれらを詳しく見ていく。

前節でも定義したが、大局的対称性が存在している時は保存カレントが存在し、その時間成分を使って電荷が (5) 式のように定義される。この空間積分が収束するなら、電荷 Q^a は well-defined である。もし Q^a が well-defined ならば、 $Q^a |0\rangle = 0$ となり、真空の電荷を定義できる。つまり真空が対称性を保存する Wigner phase であるということである。以下にそれを証明する。 Q^a は全空間積分の形で書かれているので、well-defined ならばそれは空間並進に対して不変である。また、積分の中身は保存カレントなので Q^a 自身も保存する。つまり時間並進についても不変である。すなわち、4次元の並進変換の生成子は4元運動量 P_μ なので、演算子 Q^a との交換関係は

$$[P_\mu, Q^a] = 0 \quad (27)$$

となる。真空 $|0\rangle$ に対する運動量の固有値は $P_\mu = 0$ なので、 $P_\mu Q^a |0\rangle = Q^a P_\mu |0\rangle = 0$ となり

$$Q^a |0\rangle = c |0\rangle \quad (28)$$

となる。 c は任意の定数である。さらに内積を取ると、

$$c = \langle 0 | Q^a |0\rangle = \int d^3x \langle 0 | J_0^a |0\rangle \quad (29)$$

となる。ここで保存カレント J_μ^a について考える。真空は並進不変性とローレンツ不変性を持つと仮定し、これらの不変性を合わせてポアンカレ不変性と呼ぶ。真空が並進不変性を持つとすると、 J_μ^a の真空期待値は位置に依らないので、

$$\langle 0 | J_\mu^a(x) |0\rangle = \langle 0 | J_\mu^a(0) |0\rangle \quad (30)$$

とできる。このベクトルはローレンツ変換に対しても不変でなければならない。そのようなベクトルは0しか存在しないので、

$$c = 0 \quad (31)$$

となる。よって Q^a が well-defined ならば、その時の対称性の表現は Wigner phase であり、真空が対称性を保つ。

上記において、真空が対称性を破る状態である Nambu-Goldstone phase を、 $Q^a |0\rangle \neq 0$ と表したが、これは正しくなく、厳密には Q^a は well-defined ではないため固有値を定義できないと言うべきである。この時、南部ゴールドストーン粒子と呼ばれる質量 0 の粒子が存在する。簡単な例として、複素スカラー場 Φ の次のラグランジアンについて考える。

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (32)$$

このラグランジアンは南部ゴールドストーン粒子について簡単に説明するためのラグランジアンであって、(1) 式と形は似ているが全く別のものである。

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{i\theta} \Phi \quad (33)$$

という変換を考えるとラグランジアンはこの変換の下で不変であり、保存カレント J_μ と電荷 Q は

$$J_\mu = i\Phi \partial_\mu \Phi^\dagger - i\Phi^\dagger \partial_\mu \Phi \quad (34)$$

$$Q = - \int d^3x (i\Phi \partial_\mu \Phi^\dagger - i\Phi^\dagger \partial_\mu \Phi) \quad (35)$$

となる。(7) 式より $[Q, \Phi] = i\Phi$ なので、もし Φ の真空期待値 $\langle 0 | \Phi | 0 \rangle$ が 0 ならば、 $\langle 0 | Q | 0 \rangle = 0$ となるのは明らかである。

ここで、 Φ を実数場 ϕ_1, ϕ_2 を使って

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad (36)$$

と表す。すると、場の変換は

$$\begin{aligned} \phi_1 &\rightarrow \phi_1 + \delta\phi_1 = \phi_1 - \theta\phi_2 \\ \phi_2 &\rightarrow \phi_2 + \delta\phi_2 = \phi_2 + \theta\phi_1 \end{aligned} \quad (37)$$

となるので、

$$[iQ, \phi_1] = -\phi_2 \quad (38)$$

$$[iQ, \phi_2] = \phi_1 \quad (39)$$

であることがわかる。ラグランジアンのパテンシャルは

$$V = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (40)$$

なので、

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_{1,2}} = 0 \quad (41)$$

となる点として、以下の様な真空期待値を持つ点を真空とする。

$$\langle \phi_1 \rangle = v_1 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (42)$$

$$\langle \phi_2 \rangle = 0. \quad (43)$$

さらにそれぞれの実数場の揺らぎを $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$ とする。この時、ラグランジアンは次の様に変形される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\phi}_1) (\partial^\mu \tilde{\phi}_1) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\phi}_2) (\partial^\mu \tilde{\phi}_2) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} v_1^4 + \lambda v_1^2 \tilde{\phi}_1^2 + \frac{\lambda}{4} \left((\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2)^2 + 4v_1 \tilde{\phi}_1^3 + 2v_1 \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2^2 \right) \end{aligned} \quad (44)$$

ϕ_1 が真空期待値を持ったために、この時の電荷は (39) 式の交換関係を使って、

$$\langle 0 | [iQ, \phi_2] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi_1 | 0 \rangle \neq 0 \quad (45)$$

となる。当然

$$\langle 0 | [iQ, \Phi] | 0 \rangle \neq 0 \quad (46)$$

なので、電荷 Q は well-defined でないことがわかる。この状況を対称性が自発的に破れていると言う。(44) 式を見ると、場が $\tilde{\phi}_2$ のみの 2 乗項、つまり質量項がないことがわかる。さらにカレントは

$$J_\mu = v_1 \partial_\mu \tilde{\phi}_2 + \tilde{\phi}_1 \partial_\mu \tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_2 \partial_\mu \tilde{\phi}_1 \quad (47)$$

と書け、第 1 項より明らかに $\langle 0 | J_\mu(x) | \tilde{\phi}_2 \rangle \neq 0$ となる。これは、粒子 $\tilde{\phi}_2$ がカレントに結合していることを表す。つまり、カレントに結合する質量ゼロの粒子が存在していると言える。これは次の南部ゴールドストーン定理の帰結である。南部ゴールドストーン定理は

- ポアンカレ不変性がある: $P_\mu | 0 \rangle = 0, M_{\mu\nu} | 0 \rangle = 0$
- 保存カレントが存在している: $\partial_\mu J^{\mu\nu} = 0$
- 対称性が自発的に破れている: $Q | 0 \rangle \neq 0$

これらが成り立つ時、カレントに結合する質量ゼロの南部ゴールドストーン粒子が存在するというものである。ここで、 $M_{\mu\nu}$ はローレンツ変換の生成子である。

次に局所対称性の表現を見ていく。局所対称性における Wigner phase は大局的対称性における Wigner phase 同様、その特徴は保存カレントによって定義される電荷が保存することである。ただし大きな違いとして、カレントにゲージ場が結合する。これは (15) 式のラグランジアンを見ても明らかである。この時、カレントを構成する場とゲージ場例との相互作用は g によ

て決まる。つまり異なる場であっても、ある変換に対し同じ変換性を持つ場ならば、ゲージ場との相互作用は同じであるということである。

Higgs phase は大局的対称性の Nambu-Goldstone phase に対応するもので、電荷は定義されない。その特徴はカレントに結合したゲージ場が南部ゴールドストーンボソンの自由度を吸って質量を得ることである。これがいわゆるヒッグス機構であるが、ゲージ場が質量を得る過程は 3.2.1 節で詳しく見るのでここでは省略する。

3 標準模型

標準模型はクォーク、レプトン、ゲージ粒子、ヒッグス粒子から構成される理論である。クォークとレプトンはそれぞれ6種類で、これを香りの種類、フレーバーと呼ぶ。クォークの質量と電荷は以下の通りである。

クォーク	質量	電荷
u	1.5 – 4.0 [MeV]	2/3
d	4.0 – 8.0 [MeV]	-1/3
s	80 – 130 [MeV]	-1/3
c	1.15 – 1.35[GeV]	2/3
b	4.1 – 4.4 [GeV]	-1/3
t	173 ± 5.1 [GeV]	2/3

レプトンは以下の通りである。

荷電レプトン	質量	電荷
e	0.5109989[MeV]	-1
μ	105.6583692[MeV]	-1
τ	1776.99 $^{+0.29}_{-0.26}$ [MeV]	-1
ニュートリノ	質量	電荷
ν_e	< 2.2[eV]	0
ν_μ	< 190[eV]	0
ν_τ	< 18.2[MeV]	0

上記のニュートリノの質量に対する制限は粒子の崩壊等から得られる直接的なもので、ニュートリノ振動という現象はこの制限よりずっと小さな質量を示唆している。しかしニュートリノ振動においては、それぞれの質量の2乗の差は知られているが絶対値はわかっていない。観測によりニュートリノが質量を持つことは分かっているが、標準模型におけるニュートリノは質量を持たないので、本論文では議論しない。

標準模型の相互作用は、ゲージ相互作用と湯川相互作用とヒッグス粒子の自己相互作用である。ゲージ相互作用は、 $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 局所変換に対する不変性をラグランジアンに要請した時に導入されるゲージ場を媒介粒子とする相互作用である。ここで $U(N)$ 変換は $N \times N$ ユニタリー行列による変換を表し、 $SU(N)$ は $N \times N$ ユニタリー行列で行列式が1となる行列による変換を表す。 $SU(2)$ はパウリ行列

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

を用いて表すことができ、その生成子は

$$\frac{1}{2}\tau^a, a = 1, 2, 3 \quad (49)$$

である。

前節でも述べたが、相互作用の形は場の変換性に依って自動的に決まる。これは相互作用が変換に対する表現に依ると言い換えることができる。表現とはある変換に対して、変換される場が持つ基底の数と考えられる。例えば、 $SU(2)_L$ 変換について左巻きクォークは2表現であり、生成子を用いて

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\tau^a \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (50)$$

と変換される。ここで、 u_L, d_L は次のように定義されるスピン左巻きのディラック場を表す。

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\gamma_5}{2}u \\ \frac{1-\gamma_5}{2}d \end{pmatrix} \quad (51)$$

この様に、 $SU(2)$ 変換について2表現を持つ場を $SU(2)$ の2重項と呼ぶ。左巻きクォークと左巻きレプトンは2組ずつペアで2重項を作り、表.1のように3つのグループに分けられる。このグループを世代と呼ぶ。クォークは $SU(3)_c$ について3表現に属しグルーオンを媒介して強い相互作用をする。 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称性で最終的に記述できる相互作用は弱い相互作用と電磁相互作用であり、それぞれをウィークボソンと光子が媒介する。

湯川相互作用とヒッグス粒子の自己相互作用はどちらもヒッグス粒子が関わる相互作用であり、その詳細はわかっていない。ヒッグス粒子は、対称性を自発的に破るために入れられたヒッグスセクターを構成するヒッグス場のうち、ゲージ粒子に自由度を奪われなかった部分である。

この章では、ヒッグス機構によりゲージ場が質量を持つ過程を計算し、標準模型について弱い相互作用と電磁相互作用を中心に説明する。

表 1: 素粒子の対称性に関する表現

素粒子			表現の数		
第1世代	第2世代	第3世代	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	3	2	1/6
u_R	c_R	t_R	3	1	2/3
d_R	s_R	b_R	3	1	-1/3
$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	1	2	1/2
e_R	μ_R	τ_R	1	1	-1

3.1 弱い相互作用

ニュートリノは弱い相互作用しかしない素粒子である。つまりニュートリノが物質とほとんど相互作用しないことから、弱い相互作用がどれほど弱い相互作用なのかがわかる。また、相互作用が強い場合には寿命は短く、弱い場合には寿命が長くなることを踏まえると、強い相互作用で崩壊する ρ 中間子の寿命が $\tau_\rho \cong 4 \times 10^{-24} \text{sec}$ であるのに対し、弱い相互作用で崩壊する μ 粒子、 τ 粒子、中性子の寿命が以下の様な値になることからその弱さがわかる。

$$\begin{cases} \mu : \tau_\mu \cong 2 \times 10^{-6} & [\text{sec}] \\ \tau : \tau_\tau \cong 3 \times 10^{-13} & [\text{sec}] \\ n : \tau_n \cong 9 \times 10^2 & [\text{sec}] \end{cases} \quad (52)$$

寿命という観点から見ると、 μ 粒子、 τ 粒子、中性子の寿命は統一性があるとは言い難い。そこで本当にひとつの弱い相互作用で崩壊しているのか、それぞれの崩壊について詳しく見ていく。

まずはミューオンの寿命について考える。ミューオンは図2のファインマン図のように $\mu \rightarrow$

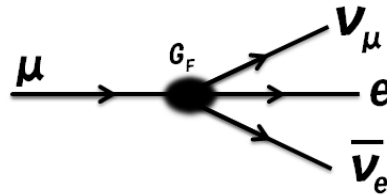


図 2: μ -decay のファインマン図

$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ と崩壊する。その崩壊幅を計算するために必要な相互作用部分のラグランジアンを、4 体フェルミ相互作用を使って次の様にしておく。

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_\mu \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \mu) (\bar{e} \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \nu_e) \equiv -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\rho^\dagger J^\rho \quad (53)$$

ここで場はそれぞれの粒子のディラック場であり、 G_F は結合定数である。(53) 式を見るとわかるように、相互作用は左巻きのディラック場のみで書かれる。つまり、弱い相互作用をするのは左巻きの粒子のみということである。これは、弱い相互作用がパリティ対称性を破るとい

う特性を持っているためである。このことは、コバルト原子核の β 崩壊で実験的に確かめられている。厳密には弱い相互作用は電荷共役変換と CP 変換についての不変性も破っていて、それは例えば K^0 中間子の崩壊を見ることで実験的に知られている。

(53) 式のラグランジアンを用いて、ミューオンの崩壊幅は

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \quad (54)$$

と計算される。 $m_\mu \cong 100[\text{MeV}]$, $\tau \cong 2 \times 10^{-6}[\text{sec}]$ ($\Gamma = 1/\tau \cong 3 \times 10^{-16}[\text{MeV}]$) を使うと、

$$G_F \cong 10^{-5} [\text{GeV}^{-2}] \quad (55)$$

と求めることができる。

次に μ -decay によって得られた G_F を使って、 τ 粒子の寿命が導かれるかどうか見ていく。 τ 粒子の崩壊は図 3 の様に 3 つのファインマン図で書くことができる。

その崩壊幅は

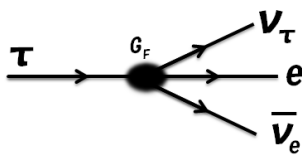


図 3.1: $\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e$

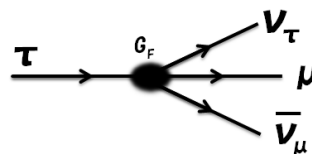


図 3.2: $\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu$

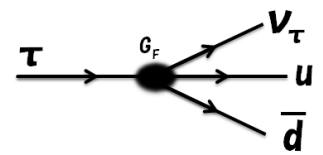


図 3.3: $\tau \rightarrow \nu_\tau u \bar{d}$

図 3: τ -decay のファインマン図

$$\Gamma_\tau = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192\pi^3} (1 + 1 + 3) \quad (56)$$

となる。ここで図 3.3 のファインマン図で表される崩壊過程の崩壊幅は、カラーの自由度を考慮して計算しなければならない。(54) 式に、 $m_\tau \cong 1800[\text{MeV}]$ 、 $G_F \cong 10^{-5}[\text{GeV}^{-2}]$ を入れると、

$$\Gamma_\tau \cong 2 \times 10^{-9}[\text{MeV}] \implies \tau \cong 3 \times 10^{-13}[\text{sec}] \quad (57)$$

となり、 μ 粒子と同じ G_F の値で τ 粒子の寿命を求めることができる。中性子崩壊についても同様の議論ができ、それぞれの粒子の寿命が同じ相互作用によって支配されているという重要な結果が得られる。正確な G_F の値は μ -decay の実験で、 $G_F = 1.16637(1) \times 10^{-5}[\text{GeV}^{-2}]$ と精密に測定されている。

ここでもう一度 (53) 式のラグランジアンを見てみる。カレント J_μ は (51) のように定義される左巻きのディラック場と、パウリ行列 τ を使って次の様に表せる。

$$J_\nu = \left[\left(\bar{\nu}_e \quad \bar{e} \right)_L \gamma_\nu (\tau^1 - i\tau^2) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L + \left(\bar{\nu}_\mu \quad \bar{\mu} \right)_L \gamma_\nu (\tau^1 - i\tau^2) \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \right]. \quad (58)$$

この様にニュートリノと荷電レプトンはペアを組んで書ける。またパウリ行列は SU(2) 変換の生成子を表すものなので、このカレントは SU(2) 変換の保存カレントの (1成分) - i (2成分) で書けているとも言える。つまりこのラグランジアンには SU(2) 変換に対する対称性がある理論から導かれるのではないかと期待できる。この対称性を弱アイソスピン対称性と呼び、SU(2)_L 対称性と記す。ここで SU(2)_L の 2 重項である $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$ を見ると、上成分と下成分で電磁気相互作用の電荷 Q の値が異なることがわかる。つまり電磁対称性 U(1)_Y と弱アイソスピン対称性 SU(2)_L は互いに独立に存在できないことがわかる。ファインマン図を見てもカレントの電荷が保存していないことは明らかで、これは弱い相互作用がフレーバーを変えるという特性を持つためである。よって電磁気相互作用と弱い相互作用は密接に関係していると考えられる。

3.2 電弱相互作用

ここでは電弱統一理論、いわゆるワインバーグ・サラム模型 [4] について説明する。この理論は弱アイソスピン対称性に、それと独立な弱ハイパーチャージ対称性 U(1)_Y を導入し、電弱対称性という SU(2)_L × U(1)_Y ゲージ変換に対する不変性をラグランジアンに要請する理論である。このゲージ対称性から導かれるラグランジアンは次の様になる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ & + \bar{q}_L^i i\gamma^\mu D_\mu q_{Li} + \bar{u}_R^i i\gamma^\mu D_\mu u_{Ri} + \bar{d}_R^i i\gamma^\mu D_\mu d_{Ri} + \bar{l}_L^i i\gamma^\mu D_\mu l_{Li} + \bar{e}_R^i i\gamma^\mu D_\mu e_{Ri} \\ & + \bar{q}_L^i (g_y^{(u)})_i^j \tilde{\Phi} u_{Rj} + \bar{q}_L^i (g_y^{(d)})_i^j \Phi d_{Rj} + \bar{l}_L^i (g_y^{(e)})_i^j \Phi e_{Rj} + h.c. \\ & + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \end{aligned} \quad (59)$$

1 行目がゲージ場、2 行目がフェルミオン、3 行目が湯川相互作用と呼ばれる相互作用のラグランジアンで 4 行目がヒッグスセクターである。添え字 i は世代数、 Φ はヒッグス場、 q と l は左巻きのクォークとレプトンの SU(2)_L 2 重項、 u_R 、 d_R 、 e_R はそれぞれの右巻きのクォークとレプトンを表わす。そして $\tilde{\Phi}$ と、ゲージ場のテンソル、共偏微分は以下のように定義される。

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ D_\mu = \partial_\mu - ig_2 W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} - ig_1 Q_Y B_\mu, \\ \tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*. \end{cases}$$

ここで、 ε^{abc} 、 $a, b, c = 1, 2, 3$ はレヴィ・チヴィタ記号、 τ はパウリ行列、 Q_Y は U(1)_Y 電荷である。この時点では電弱対称性は保たれていて、ゲージ場が質量項を持たないことは明らかである。

3.2.1 ヒッグス機構

系のラグランジアン、(59)式、のヒッグス場 Φ のポテンシャル部分に注目する。

$$V = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (60)$$

ここで、4つの実スカラー場の $\sigma, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ を使って

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pi_1 + i\pi_2 \\ \sigma + \pi_3 \end{pmatrix} \quad (61)$$

と書き、 σ が真空期待値

$$\langle \sigma \rangle \equiv v = \sqrt{\mu^2 / \lambda} \quad (62)$$

を持つようにゲージを決める。すると Φ の真空期待値は

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (63)$$

となり、この Φ が

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0 \quad (64)$$

を満たすことは明らかである。このような真空でのラグランジアン、つまり対称性が自発的に破れた状況での、系のラグランジアンを考える。真空での Φ は真空期待値にゆらぎを加え、

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \phi_0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

と置き換えることができる。この時導入した ϕ_0 がヒッグス粒子である。また、 $\pi_{1,2,3}$ は南部ゴールドストーンボソンで最終的にゲージボソンの縦波成分となるため 0 とした。この Φ をラグランジアンに入れると、ヒッグスセクターの $D_\mu \Phi$ は、

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v + \phi_0 \end{pmatrix} - ig_2 W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \phi_0 \end{pmatrix} - ig_1 Q_Y B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v + \phi_0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

となる。 $D_\mu \Phi$ において v と ϕ_0 は線形結合として含まれるので別々に書き、 $(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)$ のうち v^2 に比例する項に注目する。すると W_μ^a の 2 乗と B_μ の 2 乗から、それぞれの場の質量項が現れることは明らかである。しかし、 $W_\mu^a \times B^\mu$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\subset -\frac{g_1 g_2}{2} v^2 Q_Y (W_\mu^{3\dagger} B^\mu + B_\mu^\dagger W^{3\mu}) \\ &= -g_1 g_2 v^2 Q_Y W_\mu^3 B^\mu \end{aligned} \quad (67)$$

となるため、ゲージ場の質量項は、

$$\frac{g_2^2 v^2}{8} W_\mu^1 W^{1\mu} + \frac{g_2^2 v^2}{8} W_\mu^2 W^{2\mu} + \frac{v^2}{8} (g_2 W_\mu^3 - g_1 Q_Y B_\mu)^2 \quad (68)$$

のように書ける。3項目を見るとゲージ場 W^3, B が混合してしまっているため、対角化する必要があることがわかる。そこで、対角化したゲージ場を以下のように定義する。

$$\begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (69)$$

この時

$$\sin \theta = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (70)$$

で定義される θ をワインバーグ角と呼ぶ。さらに、(58) 式で弱い相互作用が、SU(2) カレントの (1 成分)- i (2 成分) で書けていたことを思い出し、

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (71)$$

と再定義する。これを (59) 式のラグランジアンに代入すると、ゲージ場のみを含むラグランジアンは最終的に次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge}} = & \frac{1}{2}(W^{+\mu})^\dagger(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)W^{+\nu} + \frac{g_2^2 v^2}{8}(W_\mu^+)^{\dagger}W^{+\mu} \\ & + \frac{1}{2}(W^{-\mu})^\dagger(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)W^{-\nu} + \frac{g_2^2 v^2}{8}(W_\mu^-)^{\dagger}W^{-\mu} \\ & \frac{1}{2}Z^{0\mu}(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)Z^{0\nu} + \frac{g_2^2 v^2}{8\cos^2\theta}Z_\mu^0 Z^{0\mu} \\ & + \frac{1}{2}A^\mu(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu \\ & + ig_2 \cos \theta [(\partial^\mu Z^{0\nu})(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+) \\ & \quad + (\partial^\mu W^{-\nu})(Z_\mu^0 W_\nu^+ - W_\mu^+ Z_\nu^0) - (\partial^\mu W^{+\nu})(Z_\mu^0 W_\nu^- - W_\mu^- Z_\nu^0)] \\ & + ie [(\partial^\mu a^\nu)(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+) \\ & \quad + (\partial^\mu W^{-\nu})(A_\mu W_\nu^+ - W_\mu^+ A_\nu) - (\partial^\mu W^{+\nu})(A_\mu W_\nu^- - W_\mu^- A_\nu)] \\ & - \frac{g_2^2}{2}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})W_\mu^+ W_\nu^+ W_\rho^- W_\sigma^- \\ & - \frac{g_2^2 \cos^2 \theta}{2}(2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})Z_\mu^0 Z_\nu^0 W_\rho^+ W_\sigma^- \\ & - \frac{e^2}{2}(2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})A_\mu A_\nu W_\rho^+ W_\sigma^- \\ & - eg_2 \cos \theta (2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})Z_\mu^0 A_\nu W_\rho^+ W_\sigma^- \end{aligned} \quad (72)$$

右辺 1 行目から 4 行目までが、ゲージボソンの運動項で、それ以降が相互作用項である。これを見るとゲージ場 W, Z が質量項を持っていることがわかる。この様にラグランジアンにヒッグスセクターを入れて、対称性の自発的破れを引き起こすことでゲージ場に質量項を持たせる一連の過程をヒッグス機構と呼ぶ。またこのラグランジアンにはゲージ場 A の質量項のみ無いことがわかる。これはつまり、ゲージ場 A の対称性がまだ残っていることを意味する。弱い相

相互作用と電磁気相互作用を媒介するゲージボソンのうち現在質量がないのは光子だけなので、ゲージ場 A は光子を表していると考えられる。さらに言えば、ヒッグス場の真空期待値を (63) 式のように選んだことで、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 変換である、

$$\Phi \longrightarrow e^{i\theta^a \tau^a / 2} e^{i\theta_Y / 2} \Phi \quad (73)$$

に対する対称性が破れ、 $\theta^3 = \theta_Y = \theta, \theta^{1,2} = 0$ の変換

$$\Phi \longrightarrow e^{i\theta \tau^3 / 2} e^{i\theta / 2} \Phi = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi \quad (74)$$

に対する対称性のみが $U(1)_{\text{em}}$ 対称性として残っている。電荷はそれぞれの対称性に対する電荷、 T^3 と Q_Y を使って

$$Q_{\text{em}} = T^3 + Q_Y \quad (75)$$

と表せる。例として、上記の $SU(2)_L$ 2重項 $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$ について考えると、 $Q_Y = -\frac{1}{2}$ とすれば電荷が正しく再現できることがわかる。またゲージ場 A は光子を表していると考えられるため、結合定数を e で表したい。そこで (72) 式のラグランジアンでは

$$e \equiv \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (76)$$

とした。この定義でよいことはフェルミオン場とゲージ場から構成されるラグランジアンの部分から導くことができる。光子以外のゲージ場はウィークボソンと呼ばれる粒子で、質量はそれぞれ

$$m_W^2 = \frac{g_2^2}{4} v^2, \quad (77)$$

$$m_z^2 = \frac{g_2^2}{4 \cos^2 \theta} v^2 = \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{4} v^2 \quad (78)$$

となり、

$$\rho \equiv \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta} = 1 \quad (79)$$

という関係が成り立つ。これは ρ -parameter と呼ばれ、理論の検証に用いられる。

3.2.2 G_F の導出

ヒッグス機構により、ゲージ場の質量を記述することに成功したが、この理論は対称性が自発的に破れた低エネルギーにおいて、弱い相互作用、つまり 4 体フェルミ相互作用を含まなければならない。

対称性が自発的に破れたことで、ラグランジアンフェルミオンを含む項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{fermion}} = & \bar{u}_L^i i\gamma^\mu \partial_\mu u_{Li} + \bar{u}_R^i i\gamma^\mu \partial_\mu u_{Ri} + \bar{u}_L^i \frac{g_Y^{(u)j} v}{\sqrt{2}} u_{Rj} + \bar{u}_R^i \frac{(g_Y^{(u)})^\dagger_i{}^j v}{\sqrt{2}} u_{Lj} \\
& + \bar{d}_L^i i\gamma^\mu \partial_\mu d_{Li} + \bar{d}_R^i i\gamma^\mu \partial_\mu d_{Ri} + \bar{d}_L^i \frac{g_Y^{(d)j} v}{\sqrt{2}} d_{Rj} + \bar{d}_R^i \frac{(g_Y^{(d)})^\dagger_i{}^j v}{\sqrt{2}} d_{Lj} \\
& + \bar{e}_L^i i\gamma^\mu \partial_\mu e_{Li} + \bar{e}_R^i i\gamma^\mu \partial_\mu e_{Ri} + \bar{e}_L^i \frac{g_Y^{(e)j} v}{\sqrt{2}} e_{Rj} + \bar{e}_R^i \frac{(g_Y^{(e)})^\dagger_i{}^j v}{\sqrt{2}} e_{Lj} + \bar{\nu}^i i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_i \\
& + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_{Li} W_\mu^+ + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{\nu}^i \gamma^\mu e_{Li} W_\mu^+ + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{d}_L^i \gamma^\mu u_{Li} W_\mu^- + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{e}_L^i \gamma^\mu \nu_{Li} W_\mu^- \\
& + \frac{g_2}{2 \cos \theta} \bar{u}_L^i \gamma^\mu (1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta) u_{Li} Z_\mu^0 - \frac{g_2}{2 \cos \theta} \bar{u}_R^i \gamma^\mu \frac{4}{3} \sin^2 \theta u_{Ri} Z_\mu^0 \\
& + \frac{g_2}{2 \cos \theta} \bar{d}_L^i \gamma^\mu (-1 + \frac{2}{3} \sin^2 \theta) d_{Li} Z_\mu^0 + \frac{g_2}{2 \cos \theta} \bar{d}_R^i \gamma^\mu \frac{2}{3} \sin^2 \theta d_{Ri} Z_\mu^0 \\
& + \frac{g_2}{2 \cos \theta} \bar{\nu}^i \gamma^\mu \nu_{Li} Z_\mu^0 \\
& + \frac{g_2}{2 \cos \theta} \bar{e}_L^i \gamma^\mu (-1 + 2 \sin^2 \theta) e_{Li} Z_\mu^0 + \frac{g_2}{2 \cos \theta} \bar{e}_R^i \gamma^\mu 2 \sin^2 \theta e_{Ri} Z_\mu^0 \\
& + \frac{2}{3} e \bar{u}_L^i \gamma^\mu u_{Li} A_\mu - \frac{1}{3} e \bar{d}_L^i \gamma^\mu d_{Li} A_\mu - e \bar{e}_L^i \gamma^\mu e_{Li} A_\mu \\
& + \frac{2}{3} e \bar{u}_R^i \gamma^\mu u_{Ri} A_\mu - \frac{1}{3} e \bar{d}_R^i \gamma^\mu d_{Ri} A_\mu - e \bar{e}_R^i \gamma^\mu e_{Ri} A_\mu. \tag{80}
\end{aligned}$$

ラグランジアン9、10行目は明らかに電磁相互作用であり、係数を比較すれば(76)式を導くことができる。

ここで、右辺4行目の2項目と4項目を使って、図4の様なファインマン図が書ける。ファ

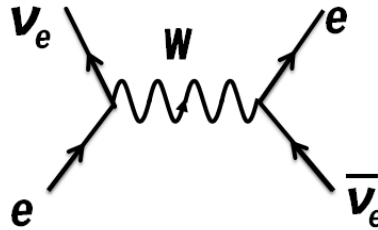


図 4: W ボソンが媒介する相互作用のファインマン図

インマン図はファインマン則と呼ばれる特定の規則を使い、数式に対応させることができる。ゲージ場の伝搬がなければ、図4は図2のファインマン図と一致するので、図4のファインマン図についてゲージ場の部分のみ計算する。Wボソンの伝搬関数は

$$\langle TW_\mu^+(x)W_\nu^-(y) \rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{M_W^2 - q^2} (g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}) e^{-iq(x-y)} \quad (81)$$

となる。これは低エネルギー極限、つまり $q \ll M_W$ において、

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{M_W^2 - q^2} (g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}) e^{-iq(x-y)} \sim \int i \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{-M_W^2} e^{-iq(x-y)} = i \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} \delta^4(x-y) \quad (82)$$

となる。よって、先ほどのファインマン図に対応する低エネルギーラグランジアンは、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \left(\frac{ig_2}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{M_W^2} (\bar{\nu}_{\mu L} \gamma_\rho \mu_L) (\bar{e}_L \gamma^\rho \nu_{eL}) \\ &= -\frac{g_2^2}{8M_W^2} (\bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e) (\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e). \end{aligned} \quad (83)$$

係数を(53)式の4体フェルミ相互作用と比べると、

$$\frac{G_f}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8M_W^2} \quad (84)$$

であることがわかる。つまりワインバーグ・サラム模型は、4体フェルミ相互作用で記述される弱い相互作用を含んだ理論である。さらにラグランジアン $\mathcal{L}_{fermion}$ を見ると、Wボソンが荷電粒子であることがわかる。加えて、中性粒子であるZボソンが媒介する、電荷が変わらない中性カレントの相互作用の項が存在する。これは4体フェルミ相互作用には無く、ワインバーグ・サラム模型が新たに予言する相互作用である。この相互作用の存在はニュートリノと電子の弾性散乱 $\bar{\nu}_e e \rightarrow \bar{\nu}_e e$ などの観測により実証され、ワインバーグ・サラム模型が支持されるに至った。

3.2.3 小林-益川理論

次に(80)式1行目のu,c,tクォークの質量項に注目する。

$$\mathcal{L}_{mass(u)} = \bar{u}_L^i \frac{g_Y^{(u)j}}{\sqrt{2}} u_{Rj} + \bar{u}_R^i \frac{(g_Y^{(u)})^\dagger_j}{\sqrt{2}} u_{Lj}. \quad (85)$$

これを見ると、湯川結合行列 $g_Y^{(u)}$ が対角的ではなく、右巻きフェルミオンと左巻きフェルミオンの世代が混合していることがわかる。つまりラグランジアン内のフェルミオン場は質量固有状態を表していない。これらの場を質量固有状態のものに移すために、湯川結合行列を対角化しなければならない。そこで、ユニタリー行列 U, V を導入し、

$$U_{(u)} g_Y^{(u)} V_{(u)}^\dagger \equiv D_Y^{(u)} \quad (86)$$

と対角化する。この時、(85) 式は

$$\begin{aligned}\bar{u}_L^i \frac{g_Y^{(u)j} v}{\sqrt{2}} u_{Rj} + \bar{u}_R^i \frac{(g_Y^{(u)})^\dagger_i{}^j v}{\sqrt{2}} u_{Lj} &= \bar{u}_L^i U_{(u)i}^\dagger{}^j \frac{v}{\sqrt{2}} D_Y^{(u)k} V_{(u)k}{}^l u_{Rl} + \bar{u}_R^i V_{(u)i}^\dagger{}^j \frac{v}{\sqrt{2}} D_Y^{(u)k} U_{(u)k}{}^l u_{Ll} \\ &= \bar{u}'_L{}^i \frac{v}{\sqrt{2}} D_Y^{(u)k} u'_{Rk} + \bar{u}'_R{}^i \frac{v}{\sqrt{2}} D_Y^{(u)k} u'_{Lk}\end{aligned}\quad (87)$$

となる。ここで、質量固有状態はそれぞれ、

$$\begin{aligned}U_{(u)i}{}^j u_{Lj} &\equiv u'_{Li} \\ V_{(u)i}{}^j u_{Rj} &\equiv u'_{Ri}\end{aligned}\quad (88)$$

と定義した。\$d, s, b\$ についても同様に、

$$\begin{aligned}U_{(d)i}{}^j d_{Lj} &\equiv d'_{Li} \\ V_{(d)i}{}^j d_{Rj} &\equiv d'_{Ri}\end{aligned}\quad (89)$$

と定義する。さらに、W ボソンとクォークの相互作用項を質量固有状態の場で書くと、

$$\begin{aligned}\frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_{Li} W_\mu^+ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}'_L{}^i U_{(u)i}^\dagger{}^j \gamma^\mu V_{(d)j}{}^k d'_{Lk} W_\mu^+ \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}'_L{}^i V_{\text{CKM}i}{}^j \gamma^\mu d'_{Lj} W_\mu^+\end{aligned}\quad (90)$$

となる。ここでユニタリー行列

$$U_{(u)i}^\dagger{}^j V_{(d)j}{}^k \equiv V_{\text{CKM}i}{}^k \quad (91)$$

を小林-益川行列と呼ぶ [5]。この行列により、弱い相互作用では世代間の転移が起こることがわかる。さらにレプトンについても同様の議論ができ、牧-中川-坂田行列 \$V_{\text{MNS}}\$ が存在する。

ここでカビボ-小林-益川行列が一般的な \$N \times N\$ ユニタリー行列であると考える。\$N \times N\$ ユニタリー行列は \$N^2\$ 個の独立なパラメーターで書ける。そのうち回転角、すなわち上記のカビボ-小林-益川行列でいう世代間の転移を表すパラメーターは、\$N(N-1)/2\$ 個であり、残りは位相変換のパラメーターとなる。もしクォークが \$N\$ 世代あるとすると、観測量を変化させない位相変換として \$2N-1\$ 個パラメーターの自由度が存在する。この自由度に \$N \times N\$ ユニタリー行列の位相変換のパラメーター自由度を吸わせると、残る自由度は \$(N-1)(N-2)/2\$ 個となる。つまりクォークが 2 世代までなら、位相変換のパラメーターは存在しない。

カビボ-小林-益川行列の各成分は次のように与えられる。

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}s^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (92)$$

ここで、\$c_{12} = \cos \theta_{12}\$, \$s_{12} = \sin \theta_{12}\$ であり、\$\delta_{13}\$ は CP 対称性の破れを表す位相である。カビボ-小林-益川行列はこの CP 対称性の破れを表導入するために、クォークを 3 世代だと仮定した。\$V_{\text{CKM}}\$ はユニタリーなので各成分を \$V_{ij}\$ と記すと、

$$\sum_{i=1,2,3} V_{ij}^\dagger V_{ik} = \delta_{jk} \quad (93)$$

という関係式が成り立つ。

3.2.4 GIM 機構

つぎに (80) 式 $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ の Z ボソンを媒介した中性カレント

$$J_{\mu}^{(u)} = \frac{g_2}{2 \cos \theta} \bar{u}_L^i \gamma^{\mu} (1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta) u_{Li} Z_{\mu}^0 \quad (94)$$

に注目する。このカレントを質量固有状態で表すと

$$\begin{aligned} J_{\mu}^{(u)} &= \frac{g_2}{2 \cos \theta} \bar{u}_L^i U^{\dagger j}_i \gamma^{\mu} (1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta) U^i_k u_{Li} Z_{\mu}^0 \\ &= \frac{g_2}{2 \cos \theta} \bar{u}_L^i \gamma^{\mu} (1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta) u_{Li} Z_{\mu}^0 \end{aligned} \quad (95)$$

となる。これは中性カレントにおいてフレーバーの混合が起こらないことを意味する。フレーバーが変化する中性カレント反応を FCNC (Flavor Changing Neutral Current) 反応と呼ぶが、tree レベルの標準模型ではこの反応は存在しないと言える。しかし高次の中性カレントでは FCNC 反応が存在する。

ここで典型的な例として、 $K^0 - \bar{K}^0$ mixing を考える。 K^0 中間子はストレンジクォークとダウンクォークからなる中間子なので、次のようなファインマン図が書ける。この反応は 4 体フェ

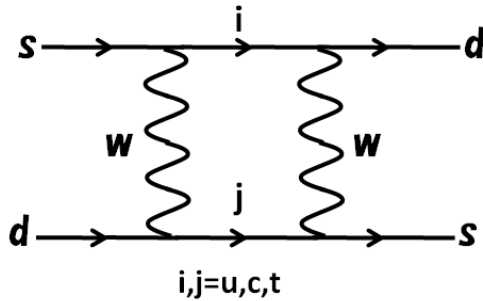


図 5.1

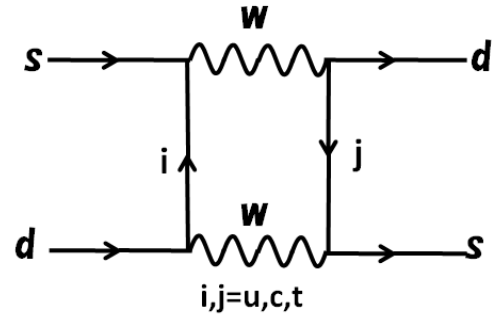


図 5.2

図 5: $K^0 - \bar{K}^0$ mixing のファインマン図

ルミオン相互作用なので、大ざっぱに

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \propto \frac{1}{m_W^2} (\bar{s}d)^2 \quad (96)$$

と見積もることができる。しかし実際の $K^0 - \bar{K}^0$ mixing はこれで予言されるほど起きていない。1-loop の寄与をより正確に考えると、この式はさらに

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \propto \frac{1}{m_W^2} (\bar{s}d)^2 \frac{1}{m_W^2} \left(\sum_i V_{si}^{\dagger} V_{id} m_i \times \sum_j V_{jd} V_{sj}^{\dagger} m_j \right) \quad (97)$$

となる。ここで V_{si} は V_{CKM} の成分、 m_i はアップクォーク、チャームクォーク、トップクォークの質量を表すので、もし質量が同じと見なせるなら V_{CKM} のユニタリー性 (93) 式により、(97) 式は 0 となる。実際は質量が異なるので、

$$\begin{aligned} \sum_i V_{si}^\dagger V_{id} m_i &= V_{su}^\dagger V_{ud} m_u + V_{sc}^\dagger V_{cd} m_c + V_{st}^\dagger V_{td} m_t \\ &\sim V_{sc}^\dagger V_{cd} m_c \end{aligned} \quad (98)$$

とできる。この時、 m_u と V_{td} を微小量として無視した。よってラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \propto \frac{1}{m_W^2} (\bar{s}d)^2 \frac{(V_{sc}^\dagger V_{cd} m_c)^2}{m_W^2} \quad (99)$$

となる。 $m_c \cong 1[\text{GeV}], m_W \cong 80[\text{GeV}]$ であることを考えると $K^0 - \bar{K}^0$ mixing が起きる割合は小さくなる。実際この式で $K^0 - \bar{K}^0$ mixing は良く記述される。

このように、カビボ-小林-益川行列のユニタリー性により $K^0 - \bar{K}^0$ mixing を抑制する機構や Z ボソンや光子による FCNC が存在しないという結果を GIM 機構という [6]。

3.3 理論の検証と問題点

標準模型は多くの実験でその整合性が確かめられている。一方で、標準模型を含んださらに上の理論の存在を示唆する問題点も残している。ここでは、標準模型を検証する実験と、解決されていない問題点を紹介する。

(59) 式のラグランジアンは対称性が破れることで、形が少し複雑になる。そのラグランジアンに含まれるものとして、これまで、ゲージ場のみのラグランジアン (80) 式とフェルミオンの運動項とゲージ場との相互作用部分であるラグランジアン (72) 式を記してきた。最後にラグランジアンのヒッグス場を含む部分を記す。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_0) (\partial_\mu \phi_0) - \lambda v^2 \phi_0^2 - \lambda v \phi_0^3 - \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 + \frac{\lambda v^4}{4} \\ &+ \frac{g_2^2 v}{2} W_\mu^+ W^{-\mu} \phi_0 + \frac{g_2^2 v}{4 \cos^2 \theta} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \phi_0 \\ &+ \frac{g_2^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} \phi_0^2 + \frac{g_2^2}{8 \cos^2 \theta} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \phi_0^2 \\ &+ \bar{u}_L^i \frac{g_Y^{(u)j}}{\sqrt{2}} u_{Rj} + \bar{u}_R^i \frac{g_Y^{(u)\dagger j}}{\sqrt{2}} u_{Lj} \\ &+ \bar{d}_L^i \frac{g_Y^{(d)j}}{\sqrt{2}} d_{Rj} + \bar{d}_R^i \frac{g_Y^{(d)\dagger j}}{\sqrt{2}} d_{Lj} \\ &+ \bar{e}_L^i \frac{g_Y^{(e)j}}{\sqrt{2}} e_{Rj} + \bar{e}_R^i \frac{g_Y^{(e)\dagger j}}{\sqrt{2}} e_{Lj}. \end{aligned} \quad (100)$$

(59) 式から (72)、(80)、(100) 式の和が導かれる。これらを見ると、湯川結合を除けばこのラグランジアンにおけるパラメーターは以下の4つであることがわかる。

$$g_1, g_2, v, \lambda. \quad (101)$$

つまり独立な観測量が4つあれば、それぞれのパラメーターを決定でき、5つ目以降の観測量を予言することができる。エネルギースケールがZボソンの質量以上の時には、トップクォーク以外の粒子の質量は無視できるので、トップクォーク以外の湯川結合定数は無視できる。まずは g_1 、 g_2 、 v を、実験で精度良く測られている以下の量で決定する。

$$G_F = \sqrt{2} \frac{g_2^2}{8m_W^2} = 1.16637(1) \times 10^{-5} [\text{GeV}], \quad (m_W = \frac{1}{2}g_2v) \quad (102)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.035999111(95)} \quad (103)$$

$$m_Z = \frac{1}{2} \frac{g_2v}{\cos^2 \theta} = 91.1875 \pm 0.0021 [\text{GeV}]. \quad (104)$$

多くの実験により、観測量がこれらのパラメーターを使って予言されるものと精度良く一致することが確かめられている。大型電子-陽電子加速器 LEP 実験では、(80) 式にある Z ボソンとフェルミオンの複雑な結合の検証や、様々な観測量からワインバーグ角を独立に導きそれらに矛盾がないことを確かめることなどに成功した。さらに 2012 年に LHC 実験によってヒッグス粒子らしき粒子が質量 126[GeV] 付近に発見された。この粒子は標準模型で予言されるヒッグス粒子の性質と非常に一致しているので、この粒子をヒッグス粒子であると思うことで、 λ についても

$$m_H = \sqrt{2\lambda}v = 126 [\text{GeV}] \quad (105)$$

という関係を通じて決定することができる。

ヒッグス粒子らしき粒子の発見でさらに信頼度が増した標準模型だが、解決していない問題もいくつかある。一つ目は湯川結合定数の問題である。これはヒッグス粒子とフェルミオンの結合定数であるが、これはパラメーターとして各粒子ごとに様々な値を取る。物理理論においてパラメーターの数が少ないほど自然な理論に近いと思われるため、数多くの湯川結合定数には何かしらの関係性や規則性が存在すると考えられる。湯川相互作用は対称性が自発的に破れたことをフェルミオンに伝える相互作用であるとも言えるので、ヒッグス粒子らしき粒子が見つかった今、そのダイナミクスを考え、検証する時期に来ているだろう。さらに、湯川結合がなぜ 3×3 の行列で書けるのか、つまり同じ性質の粒子が3世代繰り返すのかということもわかっていない。

標準模型ではニュートリノが質量を持たない。しかし、ニュートリノ振動現象の発見によりニュートリノが質量を持つことがわかった。ニュートリノの質量は微小なため、大型加速器実験などの観測量には影響をないため、標準模型の検証には害を及ぼさなかったが、理論的にどのように質量が与えられるかは大きな問題である。

標準模型では重力を除く3つの相互作用を記述しているが、それぞれの結合の強さに階層性が存在する。重力を入れればなおさらその階層性は大きく、その理由は説明されていない。ま

たダークマターの存在やダークエネルギーについても標準模型は何も記述していないので、これが究極の理論でないことは明らかである。

ヒッグス粒子が見つかったことで、標準模型、ないしは標準模型を超えた物理について、新たに何が示唆されるのか次章で議論する。

4 高エネルギーでのポテンシャルの振る舞い

この章では標準模型のヒッグスセクターに含まれるポテンシャルの高エネルギーでの形を調べる。標準模型を記述している場の理論では、量子補正の計算において無限大という答えが出る(発散する)という問題がある。この問題は繰り込みと呼ばれる処方によって解決されるが、この処方はポテンシャルがエネルギースケールに依存するということを予言する。エネルギー依存性を支配する方程式を繰り込み群方程式と言う。本論文では繰り込みの処法と繰り込み群方程式の定式化についての解説はせず、実際の計算を説明することでその解説とする。

まずは標準模型のラグランジアン (59) 式の以下の部分を取り出し、1-loop すなわち $\mathcal{O}(\hbar)$ の量子補正からくる発散を計算する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + m_\phi^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 + \bar{t}_L i \gamma^\mu D_\mu t_L + \bar{t}_R i \gamma^\mu \partial_\mu t_R \\ & + \bar{t}_L g_{Y33}^{(u)} \tilde{\Phi} t_R + \bar{t}_R g_{Y33}^{(u)} \Phi t_L + \bar{b}_L g_{Y33}^{(u)} \tilde{\Phi} t_R + \bar{t}_R g_{Y33}^{(u)} \Phi b_L \end{aligned} \quad (106)$$

ここで (59) 式の μ を m_ϕ に置き換えた。このラグランジアンは、 Φ が (63) 式のように真空期待値を取ると、トップクォークのみ質量を得るようにできている。しかし見たいのはポテンシャルの振る舞いなので、対称性が破れる以前のラグランジアンで議論する。またゲージ相互作用とその他のフェルミオンの質量は無視している。今の目的は繰り込み群方程式を作ることなので、考慮すべき 1-loop ダイアグラムは図 6 のとおりである。ここで図 6.1 のファインマン図により計算される量子補正は以下ようになる。

$$(\text{図 6.1}) = \frac{i3\lambda m_\phi^2}{4\pi^2 \epsilon} + \frac{i3\lambda m_\phi^2}{8\pi^2} \left(1 - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-m_\phi^2} \right) \right). \quad (107)$$

ここで γ はオイラー数 $\gamma = 0.577$ である。 μ は結合定数を無次元にするために導入しなければならない次元 1 を持つパラメーターである。繰り込みを行う時に時空の次元を 4 ではなく $4 - \epsilon$ とすると、結合定数が次元を持ってしまうので μ を導入し結合定数を無次元にする。これを次元正則化と呼ぶ。他のダイアグラムについても量子補正を同様に計算できる。

次に、相殺項を用いたやり方で (107) 式の発散をラグランジアンのパラメーターに「繰り込む」。まずは発散項を打ち消すような次の 2 点相互作用のダイアグラムを考える。

$$\text{---} \bullet \text{---} = -\frac{i3\lambda m_\phi^2}{4\pi^2 \epsilon} - \frac{i3\lambda m_\phi^2}{8\pi^2} (1 - \gamma) \quad (108)$$

このダイアグラムを与えるために相互作用項としてラグランジアンに次の項を付け加える。

$$\mathcal{L}_{\text{CT}} = -\frac{i3\lambda m_\phi^2}{4\pi^2 \epsilon} - \frac{i3\lambda m_\phi^2}{8\pi^2} (1 - \gamma) \Phi^\dagger \Phi. \quad (109)$$

このような項を相殺項という。すると、発散項が相殺して有限の補正を与えるラグランジアンとして

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B \equiv \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{CT}} = & (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + \left(1 - \frac{i3\lambda m_\phi^2}{4\pi^2 \epsilon} - \frac{i3\lambda m_\phi^2}{8\pi^2} (1 - \gamma) \right) m_\phi^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 + \bar{t}_L i \gamma^\mu D_\mu t_L \\ & + \bar{t}_R i \gamma^\mu \partial_\mu t_R + \bar{t}_L g_{Y33}^{(u)} \tilde{\Phi} t_R + \bar{t}_R g_{Y33}^{(u)} \Phi t_L + \bar{b}_L g_{Y33}^{(u)} \tilde{\Phi} t_R + \bar{t}_R g_{Y33}^{(u)} \Phi b_L \end{aligned} \quad (110)$$

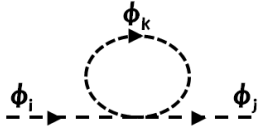


図 6.1

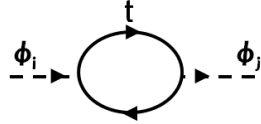


図 6.2

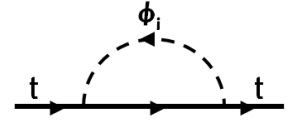


図 6.3

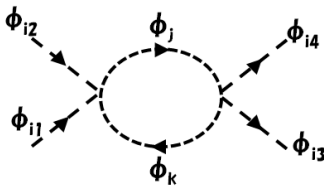


図 6.4

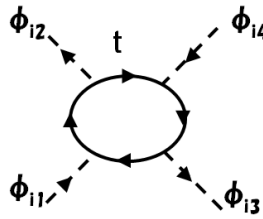


図 6.5

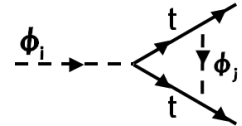


図 6.6

図 6: ヒッグス場とトップクォークの 1-loop ファインマン図

が定義できる。すなわち、

$$m_B^2 \equiv \left(1 - \frac{i3\lambda m_\phi^2}{4\pi^2\epsilon} - \frac{i3\lambda m_\phi^2}{8\pi^2}(1-\gamma) \right) m_\phi^2 \quad (111)$$

で定義される「裸のパラメーター」 m_B でもともとの m_ϕ を置き換えればよいことになり、これによって質量の発散を「繰り込んだ」ことになる。他のダイアグラムの発散も同様に繰り込める。

パラメーター μ 、は次元正則化のために人間が手で入れたものである。ラグランジアンに含まれる「裸のパラメーター」がこの手で入れた μ の任意性の影響を受けるべきでないことは明らかである。したがって、観測量が μ の任意性を受けることになる。このことから、物理量の μ 依存性を決定する微分方程式が作れ、それを繰り込み群方程式と呼ぶ。さらに、 μ によって値が変わる、つまり見るエネルギースケールによって値が変わるパラメーターを、ランニングパラメーターと呼ぶ。(107) 式から導けるヒッグスの自己相互作用結合定数 λ と湯川結合定数

$g_{Y33}^{(u)}$ の繰り込み群方程式は以下ようになる。

$$\mu \frac{dg_{Y33}^{(u)2}(\mu)}{d\mu} = \frac{9}{16\pi^2} g_{Y33}^{(u)4}(\mu), \quad (112)$$

$$\mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = \frac{6}{16\pi^2} (4\lambda^2(\mu) + 2\lambda(\mu)g_{Y33}^{(u)2}(\mu) - g_{Y33}^{(u)4}(\mu)). \quad (113)$$

今、トップクォーク以外の質量は無視しているので、トップクォークの質量 $m_t = 173$ を使って、 $g_{Y33}^{(u)}(\mu)$ の境界条件を、

$$m_t = g_{Y33}^{(u)}(m_t) \frac{v}{2}, \quad (v = 246.128) \quad (114)$$

とできる。以降、 $g_{Y33}^{(u)}$ を g_t と記述する。また、LHC 実験で 126[GeV] あたりにヒッグス粒子らしき粒子が発見されたので、ヒッグス粒子の質量を $m_H = 126$ [GeV] とし、境界条件

$$m_H^2 = 2\lambda v \quad (115)$$

を課す。これらを解き、横軸 μ 結合定数 g_t と λ をプロットすると図7の様なグラフが書ける。図7.2を見ると λ は μ の値が大きくなると、すぐさま負になることがわかる。これは、図7.1よ

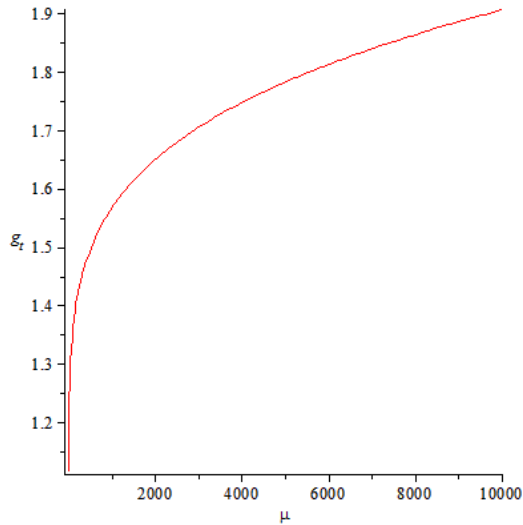


図 7.1: g_t の振る舞い

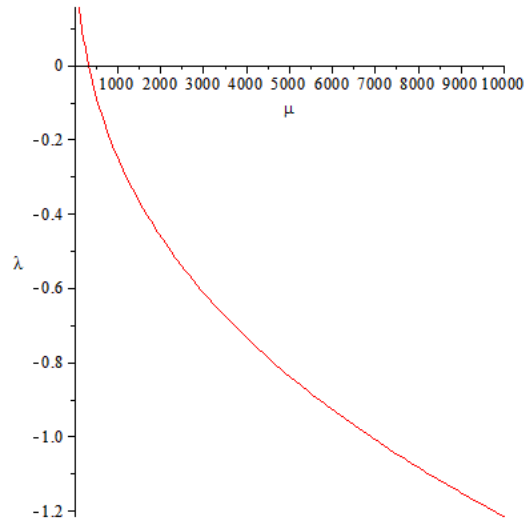


図 7.2: λ の振る舞い

図 7: トップクォークの質量のみ考慮した結合定数の振る舞い

り、 $g_t(\mu)$ の増加の影響を受けていることが原因であると言える。

この時のポテンシャルの振る舞いに注目する。今ポテンシャルの形は (41) 式なので λ が負になると、ポテンシャルは図8のようになる。このポテンシャルは明らかに物理的ではない。パラメーター μ はスケールパラメーターなので、 λ が負になった点が理論の破たんするエネルギースケールであると定性的に言うことができる。

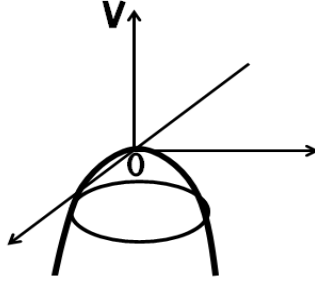


図 8: λ が負の時のポテンシャル

実は (106) 式の系は正確ではない。なぜなら、 g_t に対する強い相互作用の効果が大きいからである。結合定数 g_3 の強い相互作用を考慮すると、導かれる繰り込み群方程式は以下のようになる。

$$\mu \frac{dg_3(\mu)}{d\mu} = -7 \frac{g_3^3(\mu)}{16\pi^2}, \quad (116)$$

$$\mu \frac{dg_t(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{16\pi^2} (-8g_3^2 g_t + \frac{9}{2} g_t^3), \quad (117)$$

$$\mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{16\pi^2} (-6g_t^4 + 12g_t^2 \lambda + 24\lambda^2). \quad (118)$$

ここで、 g_t と λ の境界条件は (114) 式と (115) を用いる。また、 g_3 の境界条件は Z ボソンの質量 $m_z = 91.18[\text{GeV}]$ を使って

$$g_3(m_z) = \sqrt{4\pi\alpha_s} \quad \alpha_s = 0.1184 \quad (119)$$

とできる。ここで α_s は強い相互作用の微細構造定数である。これらを解くと結合定数の振る舞いは、図 9 のようになる。図 9.3 を見ると、図 7.2 に比べ λ がより高いエネルギーで負になることがわかる。これは強い相互作用の効果で、 g_t の振る舞いが変化した結果である。つまり図 7.2 で λ が負になったことは未知の物理、ここでは強い相互作用、の存在を示唆していたと言える。もちろん、強い相互作用よりエネルギースケールが低いゲージ相互作用を無視しているので、強い相互作用のエネルギースケールを定量的に断言することはできない。

すべてのゲージ相互作用を考慮すると λ は図 10 のように振る舞う。これを見ると、他のゲージ相互作用を考慮しても λ の振る舞いはほぼ変わらず、負になるエネルギースケールは $\mathcal{O}(10^5)[\text{GeV}]$ である。しかし、もし標準模型が重力を除いた理想的な理論であるならば、負になる点はプランクスケール $\mathcal{O}(10^{19})[\text{GeV}]$ 以上でなくてはならない。

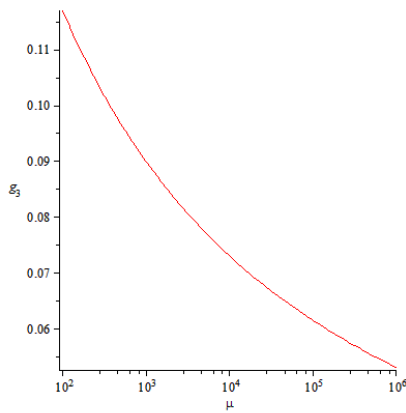


図 9.1: g_3 の振る舞い

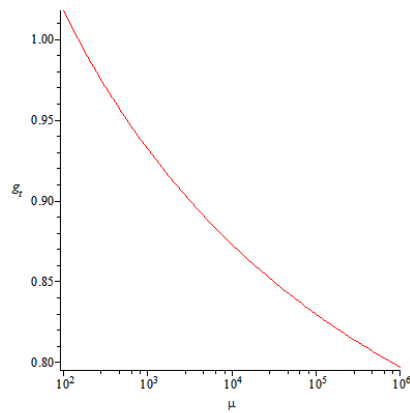


図 9.2: g_t の振る舞い

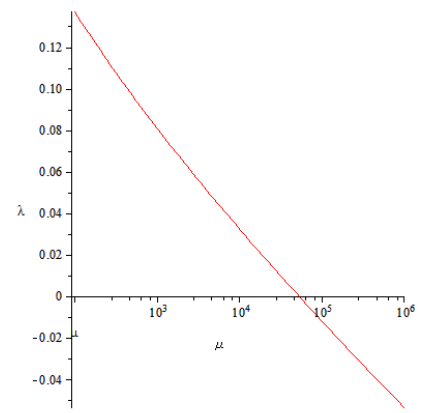


図 9.3: λ の振る舞い

図 9: 強い相互作用を考慮した結合定数の振る舞い

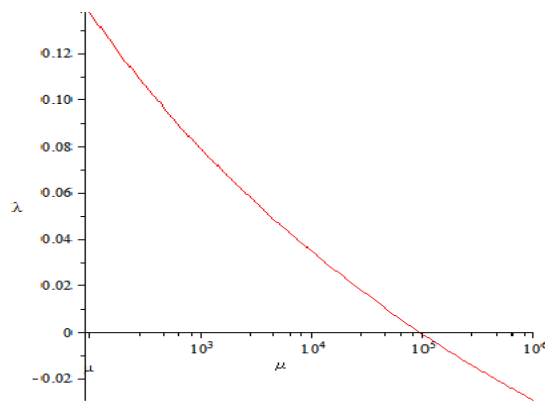


図 10: すべてのゲージ相互作用を考慮した λ の振る舞い

ここで g_t の境界条件 (114) 式に注目する。式を明瞭に書き直すと

$$g_t(173) = \frac{\sqrt{2}}{v} m_t \quad (120)$$

となる。これまでスケールパラメーター μ をエネルギースケールとしてきたが、手を入れた μ の値が、厳密にエネルギースケールの値を表すだろうか。この議論はすでにされていて、じつは μ の値は厳密なエネルギースケールと微小なずれがある。これを考慮し計算すると境界条件は、

$$g_t(173) = 0.939 \quad (121)$$

とできる。この境界条件で方程式を解いたグラフが図 11 である。

これを見ると、負になる点がかかなり高エネルギーになったのがわかる。しかしそれでも $\mathcal{O}(10^8)$ [GeV] 程度のエネルギースケールで、プランクスケールとは桁違いである。ではこれで本当に $\mathcal{O}(10^8)$ [GeV] に新たな物理が存在すると言えるのだろうか。

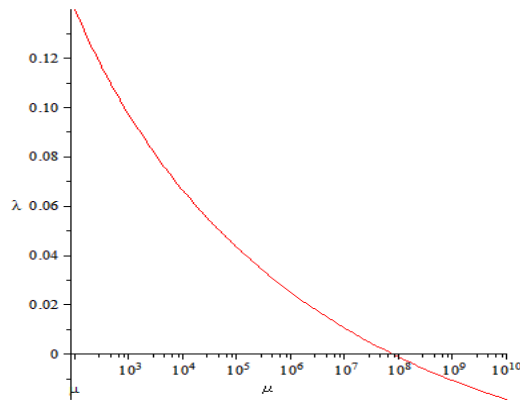


図 11: すべてのゲージ相互作用と μ の値を考慮した λ の振る舞い

この値はトップクォークの質量とヒッグス粒子の質量に対して非常に敏感である。図 12 は左から、トップクォークの質量を 171、173、175[GeV] としたグラフである。これを見ると、トッ

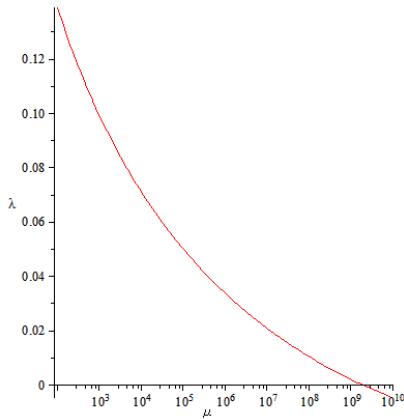


図 12.1: $m_t = 171$

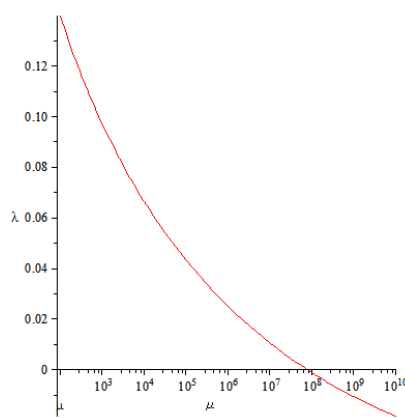


図 12.2: $m_t = 173$

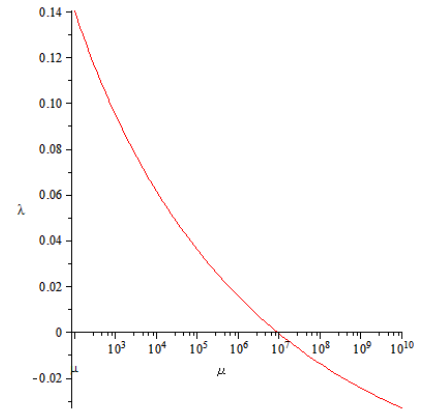


図 12.3: $m_t = 175$

図 12: トップクォークの質量を 2[GeV] ずつ変化させた結合定数の振る舞い

クォークの質量が 2[GeV] ずれるだけで負になるエネルギースケールが $\mathcal{O}(10)$ ほどずれることがわかる。これでは新しい物理が見えるエネルギースケールを定量的に予言することはできない。ではこの議論に、特定の「標準模型を超える物理」を仮定しその正当性を確かめる能力はあるであろうか。

本論文では tree レベルのポテンシャルのパラメーターを 1-loop での繰り込まれた量に置き換えて議論を行った。2-loop すなわち $\mathcal{O}(\hbar^2)$ の量子補正を考慮すると、負になるエネルギースケールが高くなるのがすでにわかっている。つまり、「標準模型を超える物理」を仮定し、その結果負になるエネルギースケールがプランクスケールに届かなくても 3-loop、4-loop と繰り込めばプランクスケールに届く可能性もある。さらに本論文では繰り込みの手法として $\overline{\text{MS}}$ スキー

ムと呼ばれる方法を用いた。これは相殺項により発散部分と μ に依らない有限項を取り除く手法である。しかし他にも MS スキームと呼ばれる発散部分のみを取り除く手法がある。この手法を用いると λ が負になるエネルギースケールが変わる。つまり繰り込みの手法についても議論する必要がある。

以上のことから本論文のランニングカップリングの振る舞いを見て「標準模型を超える物理」を定量的に議論することはできない。それでも、明らかに低エネルギーで λ が負になるなど、非常に大ざっぱな議論をすることはできるだろう。定量的な議論のためにはポテンシャルのパラメーターをランニングパラメーターに変えるという簡単な手法ではなく、量子補正を含んだ有効ポテンシャルを求める必要がある。

5 まとめ

素粒子の標準模型について電弱相互作用を中心に概観した。LHC 実験でヒッグス粒子らしき粒子が発見されたことにより、その信憑性は確固たるものとなった。しかし、「標準模型を超える物理」への手がかりが得られたとは言い難い。本論文で扱った、繰り込み群方程式を用いた議論においても、標準模型の限界について定性的な議論はできるが、結合定数の振る舞いが、トップクォークの質量やヒッグスの質量に対してとても敏感であるとともに、繰り込みの手法によっても振る舞いが変化するため、定量的な議論ができない。しかし定性的には、本論文で見たように明らかに低いスケールで不安定になる。この結果は高エネルギーにおいて新たな物理が存在することを示唆している。

より定量的な議論を行うためにはヒッグス場のポテンシャルへの有限な補正を考慮する必要があり、すでに多くの研究が行われている [7][8]。

およそ2年後に、14TeV で行われる予定の LHC 実験において「標準模型を超える物理」の新たなヒントの発見が期待される。

謝辞

本論文を作成するにあたり、多大な時間を割きご指導頂いた北澤敬章先生、指導教官の安田修先生に心より感謝申し上げます。また、研究のために良い環境を作ってくれた研究室のメンバーを始め、公私ともに支えてくれた友人達に感謝いたします。そして最後に、私の生活すべてを支えてくれた家族に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B **716** (2012) 1 [arXiv:1207.7214 [hep-ex]].
- [2] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Lett. B **716** (2012) 30 [arXiv:1207.7235 [hep-ex]].
- [3] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12** (1964) 132.
- [4] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- [5] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652.
- [6] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D **2** (1970) 1285.
- [7] J. Elias-Miro, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, G. Isidori, A. Riotto and A. Strumia, Phys. Lett. B **709** (2012) 222 [arXiv:1112.3022 [hep-ph]].
- [8] G. Degrassi, S. Di Vita, J. Elias-Miro, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, G. Isidori and A. Strumia, JHEP **1208** (2012) 098 [arXiv:1205.6497 [hep-ph]].