

ニュートリノ振動の長基線実験における  
ユニタリ性の破れの観測の最適化

首都大学東京理工学研究科物理学専攻  
村上 享

## 概要

ニュートリノ振動は標準模型にニュートリノ質量を加えて記述されてきた。この理論ではニュートリノの質量固有状態と弱い相互作用の固有状態はユニタリ行列で関係付けられていると仮定されている。本研究ではニュートリノの二つの固有状態が必ずしもユニタリではない行列で関係付けられているとしてニュートリノ振動を考える。つまり、標準模型にない新物理としてニュートリノの状態の混合にユニタリ性の破れを導入することになる。そして、混合行列のユニタリ性からのずれの成分で現在の制限における最大の成分である  $e\tau$  成分に着目し、それが将来の可能性として考えられているニュートリノファクトリーを用いた実験により観測可能なかどうかを数値計算により議論する。

# 目次

第1章 序章	2
1.1 ニュートリノ	2
1.2 ニュートリノ振動	2
1.3 ユニタリ性の破れ	4
1.4 ニュートリノファクトリー	4
第2章 ニュートリノの振動確率	6
2.1 標準的な振動確率	6
2.1.1 二つの固有状態	6
2.1.2 物質との相互作用	7
2.1.3 振動確率	9
2.2 ユニタリ性の破れを導入する場合	11
2.2.1 ハミルトニアンの変化	11
2.2.2 振動確率	13
第3章 近似式	15
3.1 ユニタリ性の破れの上限	15
3.2 $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ の近似式	15
第4章 数値解析	18
4.1 イベント数	18
4.1.1 反ミュオン崩壊	18
4.1.2 検出器	19
4.1.3 イベント数	19
4.2 数値解析	20
4.3 考察	32
第5章 結論	35
付録A $\tilde{x}_j^{\alpha\beta}$ の導出	38
付録B 物質中のエネルギー固有値	40

# 第1章 序章

## 1.1 ニュートリノ

原子核がベータ崩壊を起こすと、そこから電子が放出される。崩壊の前後で原子核は固有のエネルギー状態にあるのだが、放出された電子のエネルギースペクトルには広がりがあった。エネルギー保存則が成り立っているとすると、これは不自然な現象である。ベータ崩壊に関わる粒子は原子核と電子だけでよいのだろうか。他の粒子も関与しているのだろうか。

ニュートリノは1930年頃にパウリによって予言された電荷が中性で「質量の軽い」粒子である。1960年代になり加速器によってニュートリノが作られるようになると、ベータ崩壊で生成されるニュートリノとは違い電子を伴わずにミュオンを伴って生成されるニュートリノが見つかった [7]。前者を電子ニュートリノ、後者をミュオンニュートリノと呼ぶ。さらに、1970年代にタウオンというレプトンが発見 [8] されると、それに対応するニュートリノも存在すると考えられ、1997年にタウニュートリノが見つかった [9]。現在ではLEPの実験 [1] によりZボソンに結合する軽いニュートリノの数が

$$N_\nu = 2.9841 \pm 0.0083 \quad (1.1)$$

であることが示されており、ニュートリノの種類はこの三種類であると考えるのが普通である。

## 1.2 ニュートリノ振動

グラシヨウ、ワインバーグ、サラムによって提唱された標準模型ではニュートリノは弱い相互作用のみを行い質量が「ゼロ」とされている。ところが、ニュートリノには次のような現象が発見された。

一次宇宙線と呼ばれる高エネルギーの水素、ヘリウム、炭素、窒素、酸素等の原子核が大気中の物質と衝突すると、 $\pi$  中間子やK 中間子を生成する。これらはレプトンへと崩壊し、このときに発生するニュートリノは電子ニュートリノと反電子ニュートリノの数とミュオンニュートリノと反ミュオンニュートリノの数の比が1:2であるはずである。しかし観測された数の比は1:1.3となっており、こ

の現象を大気ニュートリノ問題と呼ぶ [10]。さらに、アメリカのホームステイク鉱での実験で観測されたニュートリノの強度は標準太陽模型 [11] で予測された強度の 1/3 から 1/4 しかなかった [12]。この現象を太陽ニュートリノ問題と呼ぶ。

これらがニュートリノ振動という現象であり、ニュートリノが飛行中に種類を確率的に変えてしまうというものである。ニュートリノ振動は標準模型では記述され得ない。ニュートリノ振動を記述するには標準模型を補正する必要がある。そこで、ニュートリノに有限の質量と質量固有状態と標準模型に現れる弱い相互作用の固有状態の間のユニタリ行列  $U$  による混合を仮定する。標準模型にニュートリノ質量を追加することでニュートリノ振動を記述することが出来るようになった。

真空中のニュートリノ振動を 2 世代で記述する場合、質量固有状態  $|\nu_{jork} \rangle$  と弱い相互作用の固有状態  $|\nu_{\alpha or \beta} \rangle$  は次のユニタリ行列で関係付けられる。

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$\begin{pmatrix} |\nu_{\alpha} \rangle \\ |\nu_{\beta} \rangle \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} |\nu_j \rangle \\ |\nu_k \rangle \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

質量固有状態の時間発展は

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |\nu_j \rangle \\ |\nu_k \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_j \rangle \\ |\nu_k \rangle \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

と表される。 $E_j, E_k$  は質量固有状態のエネルギー固有値。これを解いて左から  $U$  を掛けると弱い相互作用の固有状態の時間発展が求まる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} |\nu_{\alpha}(L) \rangle \\ |\nu_{\beta}(L) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iE_j L} & 0 \\ 0 & e^{-iE_k L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_{\alpha}(0) \rangle \\ |\nu_{\beta}(0) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta e^{-iE_j L} + \sin^2 \theta e^{-iE_k L} & \sin \theta \cos \theta (-e^{-iE_j L} + e^{-iE_k L}) \\ \sin \theta \cos \theta (-e^{-iE_j L} + e^{-iE_k L}) & \sin^2 \theta e^{-iE_j L} + \cos^2 \theta e^{-iE_k L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_{\alpha}(0) \rangle \\ |\nu_{\beta}(0) \rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.5)$$

但し、時刻  $t =$  基線長  $L$ 。従って、 $\nu_{\alpha}$  として生成されたニュートリノが基線長  $L$  離れた場所で  $\nu_{\beta}$  として観測される確率は

$$\begin{aligned} P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) &= |\sin \theta \cos \theta (-e^{-iE_j L} + e^{-iE_k L})|^2 \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{E_j - E_k}{2} L \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

と記述される。

### 1.3 ユニタリ性の破れ

前節ではニュートリノの弱い相互作用の固有状態と質量固有状態はユニタリ行列で関係付けられていた。しかし、文献 [2],[5] で示されているような枠組みでは高エネルギーの新物理による補正のために、標準的な三種類のニュートリノの状態がユニタリではない行列によって関係付けられることが指摘されている。

高エネルギーでの新物理の影響を低エネルギーでの有効ラグランジアンに補正として加える。この補正には質量次元で  $d=5$  のものと  $d=6$  のものを考えているのだが、ここでは混合行列のユニタリ性の破れに関わる  $d=6$  のものに注目する。 $\ell_{L\alpha}$  をフレーバーが  $\alpha$  のレプトン二重項、 $\tilde{\phi}$  をヒッグス二重項  $\phi$  によって  $\tilde{\phi} = i\tau_2\phi^*$  ( $\tau_2$  はパウリ行列) と表される場であるとする、 $d=6$  の補正は

$$\delta\mathcal{L}^{d=6} = \sum_{\alpha,\beta,\mu} c_{\alpha\beta}^{d=6} (\bar{\ell}_{L\alpha}\tilde{\phi}) i\partial_\mu\gamma^\mu (\tilde{\phi}^\dagger\ell_{L\beta}) \quad (1.7)$$

と書ける。対称性の自発的破れの後、(1.7) によるニュートリノの運動項  $\sum_{\alpha,\mu} i\bar{\nu}_{L\alpha}\partial_\mu\gamma^\mu\nu_{L\alpha}$  に対する補正が

$$\sum_{\alpha,\beta,\mu} i\bar{\nu}_{L\alpha}\partial_\mu\gamma^\mu (\delta_{\alpha\beta} + \frac{v^2}{2}c_{\alpha\beta}^{d=6})\nu_{L\beta} \quad (1.8)$$

となる。 $v$  はヒッグス場の真空期待値である。ここで、ニュートリノの場を再定義して、

$$\sum_{\beta} (\delta_{\alpha\beta} + \frac{v^2}{2}c_{\alpha\beta}^{d=6})^{\frac{1}{2}}\nu_{L\beta} \quad (1.9)$$

を新たにニュートリノの場とする。そうすると、元々  $\sum_{\alpha} \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{l}_{L\alpha}W_\mu^- \gamma^\mu\nu_{L\alpha} + h.c.$  であった荷電カレントのラグランジアンが

$$\mathcal{L}_{cc} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \bar{l}_{L\alpha}W_\mu^- \gamma^\mu (\delta_{\alpha\beta} - \frac{v^2}{4}c_{\alpha\beta}^{d=6})\nu_{L\beta} + h.c. \quad (1.10)$$

という変更を受ける。 $\ell_{L\alpha}$  はフレーバー  $\alpha$  の左巻き荷電レプトンである。つまり、 $\sum_{\beta} (\delta_{\alpha\beta} - \frac{v^2}{4}c_{\alpha\beta}^{d=6})\nu_{L\beta}$  がフレーバー  $\alpha$  のニュートリノの弱い相互作用の固有状態となるので、質量固有状態との混合はユニタリ行列  $U$  を用いて、

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{\beta,j} (\delta_{\alpha\beta} - \frac{v^2}{4}c_{\alpha\beta}^{d=6})U_{\beta j}|\nu_j\rangle \quad (1.11)$$

となり、 $\sum_{\beta} (-\frac{v^2}{4}c_{\alpha\beta}^{d=6})U_{\beta j}$  だけ、混合行列がユニタリ行列からずれることになる。

### 1.4 ニュートリノファクトリー

将来計画されているニュートリノ振動実験にニュートリノファクトリー計画というものがある。ニュートリノファクトリーではミューオンや反ミューオンを数

十 GeV まで加速する。加速されたミュオンや反ミュオンが崩壊することで、反電子ニュートリノ、ミュオンニュートリノや電子ニュートリノ、反ミュオンニュートリノを得ることができる。その崩壊数は年間  $10^{21}$  とすることが可能であると考えられている [4]。

本研究ではユニタリ性の破れた場合のニュートリノ振動確率を導出し、ニュートリノファクトリー実験で予測される  $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$  のイベント数を標準的なニュートリノ振動確率を用いる場合と比較する。そして、ユニタリ性からのずれが大きく現れるようなエネルギー、基線長を探る。

## 第2章 ニュートリノの振動確率

ニュートリノ振動は通常、弱い相互作用の標準模型にニュートリノ質量を追加した理論によって記述される。ユニタリ性の破れを導入する場合、新相互作用を導入する場合もほぼ同様に記述される。ここでは三つの場合について、その違いを指摘しつつ振動確率を同様の方法で導出することを試みる。

### 2.1 標準的な振動確率

#### 2.1.1 二つの固有状態

ニュートリノには二つの固有状態が存在する。一方はハミルトニアン相互作用項を対角化する固有状態で、フレーバー固有状態あるいは弱い相互作用の固有状態と呼ばれている。他方はハミルトニアン全体を対角化する固有状態で、質量固有状態と呼ばれている。特に、真空中では弱い相互作用の固有状態と質量固有状態の混合は、牧-中川-坂田行列  $U$  というユニタリ行列を用いて以下のように表される。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_j U_{\alpha j} |\nu_j\rangle \quad (2.1)$$

$|\nu_\alpha\rangle$  は弱い相互作用の固有状態を表しギリシア文字  $\alpha$  は  $e, \mu, \tau$  のいずれかであり、 $|\nu_j\rangle$  は質量固有状態を表しローマ文字  $j$  は  $1, 2, 3$  のいずれかである。これら二つの状態は

$$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.2)$$

$$\langle \nu_j | \nu_k \rangle = \delta_{jk} \quad (2.3)$$

と、正規直交性をもっている。この性質はユニタリ性が破れるときには考え直す必要がある。



牧-中川-坂田行列の成分を混合角  $\theta_{jk}$  と CP 位相  $\delta$  で書くと、

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

となる。  $s_{jk}$  は  $\sin \theta_{jk}$ 、  $c_{jk}$  は  $\cos \theta_{jk}$  である。

### 2.1.2 物質との相互作用

前小節では質量固有状態はハミルトニアンを対角化する固有状態であると述べた。ニュートリノが真空中を伝播する場合と物質中を伝播する場合とはハミルトニアンに物質との相互作用に違いが生じる。牧-中川-坂田行列は弱い相互作用の固有状態と真空中の質量固有状態の混合を表す行列である。即ち、ニュートリノが物質中を伝播する場合は混合行列の変化により後に述べる振動確率が真空中を伝播する場合と比べて違うことになる。それでは混合行列は物質中ではどのように変化するのだろうか。

まず、真空中の質量固有状態のハミルトニアンは対角的で、以下のように表される。

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$E_1, E_2, E_3$  はそれぞれ質量固有状態  $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle$  に対するエネルギー固有値である。振動確率の計算の際はハミルトニアンから単位行列の定数倍を足しても影響がないので、以下では (2.6) から  $E_1$  を引いたものを考える。

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta E_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta E_{31} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$\Delta E_{jk} = E_j - E_k$ . 弱い相互作用の固有状態のハミルトニアン  $H$  との関係は牧-中川-坂田行列を用いて、

$$H = U\mathcal{E}U^{-1} \quad (2.8)$$

である。この  $H$  にハミルトニアンの相互作用項をくわえる。

ニュートリノは自然に存在する物質である電子、uクォーク、dクォークと弱い相互作用をする。弱い相互作用には荷電カレント、中性カレントという相互作用

があり、伝播中のニュートリノの相互作用を考える際は電子とは両方の相互作用を考慮し、uクォーク、dクォークとは中性カレントの相互作用のみを考慮する。

ニュートリノと電子の荷電カレントの相互作用の有効ハミルトニアン密度  $\mathcal{H}^{cc}$  は Fierz 変換をした後

$$\mathcal{H}^{cc} = 4 \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} \bar{e}_L \gamma_\mu e_L \quad (2.9)$$

と表される。 $G_F$  はフェルミ定数。(2.9) を見るとわかるように、電子と荷電カレントの相互作用をするニュートリノは電子ニュートリノだけである。物質がほぼ静止していると仮定すると左巻きの電子の確率流束の  $\bar{e}_L \gamma_i e_L (i = 1, 2, 3)$  はゼロ。 $\langle \bar{e}_L \gamma_0 e_L \rangle$  はカイラリティが左巻きの電子の数密度であると解釈出来る。カイラリティの左右で存在する粒子数に違いがないと仮定すれば、これは電子数密度  $n_e$  の半分である。従って、電子ニュートリノの場合  $\nu_{eL}$  に対して、 $\sqrt{2} G_F n_e$  のポテンシャルが追加されることになる。 $A = \sqrt{2} G_F n_e$  と記す。

次に、ニュートリノが関わる中性カレントの相互作用の有効ハミルトニアン密度を示す。

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} G_F \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_\mu \nu_{\alpha L} \left[ \left( -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right) \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \sin^2 \theta_W \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \right. \\ & \quad + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \bar{u}_R \gamma^\mu u_R \\ & \quad \left. + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \right] + h.c. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$\theta_W$  はワインバーグ角。荷電カレントとは違い、全てのニュートリノ  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  が中性カレントの相互作用に関わる。また、荷電カレントのときと同様に物質がほぼ静止し、カイラリティの左右で存在数に差がなければ、 $\langle \bar{e}_L \gamma^0 e_L \rangle, \langle \bar{e}_R \gamma^0 e_R \rangle$  は  $n_e/2$ 、 $\langle \bar{u}_L \gamma^0 u_L \rangle, \langle \bar{u}_R \gamma^0 u_R \rangle$  は uクォークの数密度つまり陽子数  $n_p = n_e$  の二倍と中性子数  $n_n$  の和の半分  $(2n_p + n_n)/2$ 、 $\langle \bar{d}_L \gamma^0 d_L \rangle, \langle \bar{d}_R \gamma^0 d_R \rangle$  は dクォークの数密度つまり  $n_p = n_e$  と  $n_n$  の二倍の和の半分  $(n_p + 2n_n)/2$  である。すると、エルミート共役からの寄与も含めて全種類のニュートリノの場合  $\nu_{\alpha L}$  に対して、 $-1/\sqrt{2} G_F n_n$  のポテンシャルが追加されることになる。また、地球の主成分は Si, Mg, Fe なので  $n_n = n_e$  と考えても良い。従って、中性カレントによるポテンシャルの増分は  $-A/2$  である。

物質中のハミルトニアン  $\tilde{\mathcal{H}}$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= U \mathcal{E} U^{-1} + A \\ &= U \mathcal{E} U^{-1} + \begin{pmatrix} \frac{A}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ユニタリ性が破れていなければ、中性カレントからの物質効果は単位行列の定数倍として引いても良い。しかし、ユニタリ性が破れているときは次節で述べるよう

に、質量固有状態のハミルトニアン (2.31) の  $\mathcal{A}$  から単位行列の定数倍を引くことはハミルトニアンから 1 ではない行列  $N^\dagger N$  の定数倍を引くことになる。同様にして弱い相互作用の固有状態のハミルトニアン (2.32) の  $\mathcal{A}$  から単位行列の定数倍を引くことはハミルトニアンから 1 ではない行列  $NN^\dagger$  の定数倍を引くことになる。すると、以上の操作は振動確率に影響を及ぼすために中性カレントの物質効果を無視は不可能である。

物質中の質量固有状態は (2.11) を対角化する。(2.11) の固有値を  $\tilde{E}_j$ 、(2.11) を対角化するユニタリ行列を  $\tilde{U}$  とすると、

$$U\mathcal{E}U^{-1} + \mathcal{A} = \tilde{U}\tilde{\mathcal{E}}\tilde{U}^{-1} \quad (2.12)$$

但し、

$$\tilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E}_3 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

$\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3$  は物質中における質量固有状態に対するエネルギー固有値であり、行列 (2.13) の固有方程式である三次方程式の解として求められる。従って、物質中での質量固有状態と弱い相互作用の固有状態の関係は次のようになる。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_j \tilde{U}_{\alpha j} |\nu_j\rangle \quad (2.14)$$

なお、物質中の混合行列の成分  $\tilde{U}_{\alpha j}$  は  $\tilde{X}_j^{\alpha\beta}$  を

$$\tilde{X}_j^{\alpha\beta} \equiv \tilde{U}_{\alpha j} \tilde{U}_{\beta j}^* \quad (2.15)$$

と定義することにより

$$\tilde{X}_j^{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{jk}\Delta\tilde{E}_{jl}} [(\tilde{E}_k - U\mathcal{E}U^{-1} - \mathcal{A})(\tilde{E}_l - U\mathcal{E}U^{-1} - \mathcal{A})]_{\alpha\beta} \quad (2.16)$$

と表せる。導出の詳細は付録 A。  $j \neq k, k \neq l, l \neq j$  であり、 $\Delta\tilde{E}_{jk} = \tilde{E}_j - \tilde{E}_k$  である。

### 2.1.3 振動確率

ニュートリノの弱い相互作用の固有状態の時間発展を計算することで、ニュートリノ振動の確率を導出する。ここでは電子数密度  $n_e$  が一定であることを仮定する。そうすると、ハミルトニアンにおける物質効果が一定になる。弱い相互作用の固有状態の時間発展の方程式はハミルトニアンを  $H$  とすると、

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\nu_\alpha\rangle = \sum_\beta H_{\alpha\beta}|\nu_\beta\rangle \quad (2.17)$$

である。この微分方程式を解くにはハミルトニアンが対角的であると便利である。つまり、時間発展を考える時は質量固有状態を用いると簡単になる。弱い相互作用の固有状態と物質中の質量固有状態の関係 (2.14) と行列  $\tilde{U}$  のユニタリ性  $\tilde{U}^{-1} = \tilde{U}^\dagger$  より、弱い相互作用の固有状態の時間発展の方程式は

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|\nu_j\rangle &= \sum_{\alpha,\beta,k} \tilde{U}_{\alpha j}^* H_{\alpha\beta} \tilde{U}_{\beta k} |\nu_k\rangle \\ &= \sum_k \delta_{jk} \tilde{E}_j |\nu_k\rangle \\ &= \tilde{E}_j |\nu_j\rangle \end{aligned} \quad (2.18)$$

のように書き換えることが出来る。この方程式の解

$$|\nu_j(L)\rangle = e^{-i\tilde{E}_j L} |\nu_j(0)\rangle \quad (2.19)$$

がニュートリノの質量固有状態の時間発展を記述している。但し、(2.19) に現れるはずの時刻  $t$  はニュートリノがほぼ光速  $c = 1$  で伝播するので、ニュートリノの伝播距離（これを基線長と呼ぶ） $L = ct$  で置き換えた。

質量固有状態の時間発展から弱い相互作用の固有状態の時間発展を求めるには、再び (2.14) という関係を用いれば良い。(2.19) の両辺に  $\sum_j \tilde{U}_{\alpha j}$  を掛けることで、

$$|\nu_\alpha(L)\rangle = \sum_j \tilde{U}_{\alpha j} e^{-i\tilde{E}_j L} |\nu_j(0)\rangle \quad (2.20)$$

が得られる。これがフレーバー  $\alpha$  として生成されたニュートリノが、基線長  $L$  だけ伝播したときの状態である。弱い相互作用の固有状態における質量固有状態の混合は生成された時点と比べ、 $e^{-i\tilde{E}_j L}$  が入るだけ変化している。つまり、フレーバー  $\alpha$  のニュートリノは生成した場所から基線長  $L$  離れた検出器では必ずしもフレーバー  $\alpha$  として観測される訳ではない。

それでは、フレーバー  $\alpha$  のニュートリノが生成点から基線長  $L$  離れた検出器でフレーバー  $\beta$  で観測される確率はどうなるのだろうか。(2.20) に左からフレーバー  $\beta$  の状態のエルミート共役を掛けると確率振幅  $A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$  が得られる。

$$\begin{aligned} A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \langle \nu_\beta(0) | \nu_\alpha(L) \rangle \\ &= \sum_k \langle \nu_k(0) | \tilde{U}_{\beta k}^* \sum_j \tilde{U}_{\alpha j} e^{-i\tilde{E}_j L} |\nu_j(0)\rangle \\ &= \sum_{j,k} \delta_{jk} \tilde{U}_{\beta k}^* \tilde{U}_{\alpha j} e^{-i\tilde{E}_j L} \\ &= \sum_j \tilde{X}_j^{\alpha\beta} e^{-i\tilde{E}_j L} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ここでは質量固有状態の正規直行性を利用した。上で求めた確率振幅の絶対値の二乗が本節で求めるべきニュートリノ振動の確率である。

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} \\
&- 4 \sum_{j < k} \Re(\tilde{X}_j^{\alpha\beta} \tilde{X}_k^{\alpha\beta*}) \sin^2\left(\frac{\Delta\tilde{E}_{jk}L}{2}\right) \\
&+ 2 \sum_{j < k} \Im(\tilde{X}_j^{\alpha\beta} \tilde{X}_k^{\alpha\beta*}) \sin(\Delta\tilde{E}_{jk}L)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

右辺第三項は物質中のヤルスコーグ因子  $\tilde{J} = \Im(\tilde{X}_1^{e\mu} \tilde{X}_2^{e\mu*})$  を定義することで、

$$-8\tilde{J} \prod_{j,k}^{cyclic} \sin\left(\frac{\Delta\tilde{E}_{jk}L}{2}\right) \tag{2.23}$$

と、書ける。巡回積 (cyclic) は  $(j, k) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$  の積である。

## 2.2 ユニタリティの破れを導入する場合

この場合は標準的なニュートリノ振動の確率の導出とはやや異なる点がある。それがニュートリノの時間発展をもとめる際に重要となるハミルトニアンにある。以下ではハミルトニアンにどのような変更を要求し、振動確率にどのような変化が現れるのかを見ていく。

### 2.2.1 ハミルトニアンの変化

ニュートリノの弱い相互作用の固有状態と質量固有状態の間の混合行列にユニタリ性がないとき、これら二つの固有状態の混合は特別な性質のない一般的な行列  $N$  を使って (2.1) と同様に表される。ここでは、一般的な行列がエルミート行列とユニタリ行列の積で表せることにより  $N = HU$  を用いて混合を表記する。 $N = HU$  に現れる  $U$  は牧-中川-坂田行列である。エルミート行列  $H$  が標準的な混合からのずれを含んでいる。誤解を招く恐れがあるが、以下では特に断りを入れない限り  $H$  はハミルトニアンではなく、標準的な混合からのずれという意味で使用する。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_j (HU)_{\alpha j} |\nu_j\rangle \tag{2.24}$$

なお、弱い相互作用の固有状態と物質中の質量固有状態の間の混合のユニタリ行列には標準的な場合同様、 $\tilde{U}$  を使う ( $\tilde{N} = H\tilde{U}$ )。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_j (H\tilde{U})_{\alpha j} |\nu_j\rangle \tag{2.25}$$

標準模型では弱い相互作用の固有状態のハミルトニアンと質量固有状態のハミルトニアンはいずれも、混合行列のユニタリ性よりエルミート行列であった。

$$U\mathcal{E}U^\dagger + \mathcal{A} \quad (2.26)$$

$$\mathcal{E} + U^\dagger \mathcal{A} U \quad (2.27)$$

しかし、ユニタリ性が破れている場合は  $N^\dagger \neq N^{-1}$  なので (2.26) で  $U$  を  $N$  に置き換えた式が弱い相互作用の固有状態のハミルトニアンとはならない。それが何故なのかを、「質量固有状態の正規直交性を仮定」して考える。

質量固有状態が時間発展しても正規直交性を保つためには、そのハミルトニアンがエルミート行列である必要がある。例えば  $|\nu_j\rangle$  が行列  $H_{jk}$  で時間発展するとする。時刻  $t = 0$  で  $|\nu_j(0)\rangle$  には正規直交性があり、

$$\langle \nu_j(0) | \nu_k(0) \rangle = \delta_{jk} \quad (2.28)$$

であるとする。時間発展方程式が

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu_j(t)\rangle = \sum_k H_{jk} |\nu_k(t)\rangle \quad (2.29)$$

なので、時刻  $t$  で質量固有状態は  $|\nu_j(t)\rangle = \sum_k [e^{-iHt}]_{jk} |\nu_k(0)\rangle$  である。この質量固有状態のエルミート共役同士の積は

$$\begin{aligned} \langle \nu_j(t) | \nu_k(t) \rangle &= \sum_l \langle \nu_l(t) | [e^{iH^*t}]_{jl} \sum_m [e^{-iHt}]_{km} |\nu_m(0)\rangle \\ &= \sum_{m,l} \delta_{lm} [e^{iH^*t}]_{jl} [e^{-iHt}]_{km} \\ &= \sum_l [e^{iH^*t}]_{jl} [e^{-iHt}]_{kl} \\ &= \sum_l [e^{-iHt}]_{kl} [e^{iH^*t}]_{lj} \\ &= [e^{-iHt} e^{iH^*t}]_{kj} \end{aligned} \quad (2.30)$$

もしも  $H$  がエルミート行列ならば、 $H^\dagger = H$  と  $[H, H] = 0$  より、(2.30) が  $\delta_{kj}$  となり質量固有状態は時間発展しても正規直交性を保つことがわかる。しかし  $H$  がエルミート行列でなければそうはならない。

従って、ユニタリ性が破れていても質量固有状態の正規直交性を維持するには、(2.27) の  $U$  を  $N$  に換えるのであって、(2.26) の  $U$  を  $N$  に換えるのではない。よって、ユニタリ性が破れている場合の質量固有状態のハミルトニアンは

$$\mathcal{E} + N^\dagger \mathcal{A} N = \mathcal{E} + U^{-1} H A H U \quad (2.31)$$

である。弱い相互作用の固有状態のハミルトニアンは (2.31) の左から  $N$ 、右から  $N^{-1}$  を掛けたものである。

$$N \mathcal{E} N^{-1} + N N^\dagger \mathcal{A} = H U \mathcal{E} U^{-1} H^{-1} + H^2 \mathcal{A} \quad (2.32)$$

これはエルミート行列ではない。

## 2.2.2 振動確率

真空中、物質中の弱い相互作用の固有状態と質量固有状態の関係 (2.24),(2.25) と質量固有状態のハミルトニアン (2.31) を利用してニュートリノ振動の確率を求める。

まず、真空中の質量固有状態は (2.31) で時間発展をすることを表すのが次の方程式である。

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\nu_j\rangle = \sum_k [\mathcal{E} + U^{-1}HAHU]_{jk}|\nu_k\rangle \quad (2.33)$$

この式のハミルトニアンは非対角的なので、微分方程式を解くのに便利な対角行列に変換する。物質中の質量固有状態のハミルトニアンが対角的なので、(2.33) に物質中の質量固有状態が現れるように (2.24),(2.25) をうまく使って式変形を行う。

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|\nu_j\rangle &= \sum_k [U^{-1}(U\mathcal{E}U^{-1} + HAH)U]_{jk}|\nu_k\rangle \\ i\frac{\partial}{\partial t}|\nu_\alpha\rangle &= \sum_\beta [H(U\mathcal{E}U^{-1} + HAH)H^{-1}]_{\alpha\beta}|\nu_\beta\rangle \end{aligned} \quad (2.34)$$

この式変形では (2.24) を使った。なお、ここに現れたハミルトニアンが (2.32) で示した弱い相互作用の固有状態のハミルトニアンである。

次に、このハミルトニアンの  $H$  と  $H^{-1}$  で囲まれた部分を対角化する。

$$U\mathcal{E}U^{-1} + HAH = \tilde{U}\tilde{\mathcal{E}}\tilde{U}^{-1} \quad (2.35)$$

この式に現れる対角行列  $\tilde{\mathcal{E}}$  の対角成分  $\tilde{E}_j$  は以前に登場したものとは違い、行列 (2.35) の固有方程式の解である。すると、(2.34) の弱い相互作用の固有状態の時間発展の方程式は

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|\nu_\alpha\rangle &= \sum_\beta [H\tilde{U}\tilde{\mathcal{E}}\tilde{U}^{-1}H^{-1}]_{\alpha\beta}|\nu_\beta\rangle \\ i\frac{\partial}{\partial t}|\nu_j\rangle &= \tilde{E}_j|\nu_j\rangle \end{aligned} \quad (2.36)$$

ここでは (2.25) を使った。

この先は振幅を求める時点までは標準的な振動確率を求めるときと同様である。標準的な確率振幅 (2.21) の  $\tilde{X}_j^{\alpha\beta}$  を

$$\tilde{x}_j^{\alpha\beta} \equiv (H\tilde{U})_{\alpha j}(H\tilde{U})_{\beta j}^* \quad (2.37)$$

に変更するだけである。この  $\tilde{x}_j^{\alpha\beta}$  も標準的な  $\tilde{X}_j^{\alpha\beta}$  (2.16) と同様、ユニタリ性が破れている場合のエネルギー固有値等を使って

$$\tilde{x}_j^{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{jk}\Delta\tilde{E}_{jl}} [H(\tilde{E}_k - U\mathcal{E}U^{-1} - HAH)(\tilde{E}_l - U\mathcal{E}U^{-1} - HAH)H]_{\alpha\beta} \quad (2.38)$$

と書ける。導出の詳細は付録 A。この場合の振幅は

$$A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_j \tilde{x}_j^{\alpha\beta} e^{-i\tilde{E}_j L}. \quad (2.39)$$

しかし、標準的な振動確率 (2.22) の  $\delta_{\alpha\beta}$  とヤルスコーグ因子 (2.23) は混合行列のユニタリ性に由来するので、その部分に気をつけると、弱い相互作用の固有状態と質量固有状態の混合にユニタリ性がない場合のニュートリノ振動確率は

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |(H^2)_{\alpha\beta}|^2 \\ &- 4 \sum_{j < k} \Re(\tilde{x}_j^{\alpha\beta} \tilde{x}_k^{\alpha\beta*}) \sin^2\left(\frac{\Delta\tilde{E}_{jk}L}{2}\right) \\ &+ 2 \sum_{j < k} \Im(\tilde{x}_j^{\alpha\beta} \tilde{x}_k^{\alpha\beta*}) \sin(\Delta\tilde{E}_{jk}L) \end{aligned} \quad (2.40)$$

と求められる。標準的な振動確率 (2.22) とは違い、基線長がゼロでも他種のフレーバーに遷移する確率が存在する。



## 第3章 近似式

ニュートリノの混合行列のユニタリ性の破れの大きさについて述べる。破れの大きな成分に注目し、その効果が支配的に現れるニュートリノ振動のチャンネルを確率振幅を近似的に計算することで探す。

### 3.1 ユニタリ性の破れの上限

標準模型にニュートリノ質量を加えた理論はニュートリノ振動を記述するのに良い理論である。そこでは三種類のニュートリノの混合行列はユニタリ性を持っている。故にユニタリ性の破れは、あるとしても小さいことが期待される。前章で導入した混合行列のユニタリ性からのずれを表すエルミート行列  $H$  を単位行列と小さな成分を持つエルミート行列  $\eta$  を用いて

$$H = 1 + \eta \quad (3.1)$$

と書く。もしも  $\eta$  が無ければ混合行列は  $N = U \cdot 1$  でユニタリ行列になる。つまり、ユニタリ性からのずれを表す量として  $\eta$  を導入したことになる。

現在のところわかっている行列  $\eta$  の成分  $\eta_{\alpha\beta}$  の大きさの上限は

$$\left( \begin{array}{ccc} |\eta_{ee}| < 5.5 \times 10^{-3} & |\eta_{e\mu}| < 3.5 \times 10^{-5} & |\eta_{e\tau}| < 8.0 \times 10^{-3} \\ |\eta_{\mu e}| < 3.5 \times 10^{-5} & |\eta_{\mu\mu}| < 5.0 \times 10^{-3} & |\eta_{\mu\tau}| < 5.1 \times 10^{-3} \\ |\eta_{\tau e}| < 8.0 \times 10^{-3} & |\eta_{\tau\mu}| < 5.1 \times 10^{-3} & |\eta_{\tau\tau}| < 5.0 \times 10^{-3} \end{array} \right) \quad (3.2)$$

である [4]。(3.2) を見ればわかるように、 $\eta_{\alpha\beta}$  の大きさの上限は最大でも  $\eta_{e\tau}$  の  $8.0 \times 10^{-3}$  である。そこで、近似として  $\eta^2$  以上の高次の  $\eta$  を  $\eta^2 \simeq 0$  として無視する。

次節では  $\eta_{\alpha\beta}$  の大きさの上限である  $\eta_{e\tau}$  に注目し、そのみがニュートリノ振動のユニタリ性の破れの影響として支配的であるような振動チャンネルを探る。

### 3.2 $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ の近似式

2章で示したユニタリ性の破れを仮定したニュートリノ振動の確率振幅を改めてここに書くと、

$$A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \tilde{x}_j^{\alpha\beta} e^{-i\tilde{E}_j L} \quad (3.3)$$

であり、この式に現れる  $\tilde{x}_j^{\alpha\beta}$  は

$$\tilde{x}_j^{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{jk}\Delta\tilde{E}_{jl}} [H(\tilde{E}_k - U\mathcal{E}U^{-1} - HAH)(\tilde{E}_l - U\mathcal{E}U^{-1} - HAH)H]_{\alpha\beta} \quad (3.4)$$

である。これを見ただけではユニタリ性からのずれを表す  $\eta_{\alpha\beta}$  が確率振幅にどのように入っているのかが不明瞭である。確率振幅にたいして近似を行い  $\eta_{e\tau}$  のみがユニタリ性の破れとして支配的である振動チャンネルを探す。

まず、 $\tilde{x}_j^{\alpha\beta}$  に対して  $\eta^2$  以上の高次の  $\eta$  を無視する。すると、(3.4) は

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j^{\alpha\beta} &\simeq \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{jk}\Delta\tilde{E}_{jl}} \\ &\times \left[ (\tilde{E}_k - A_\alpha)(\tilde{E}_l - A_\alpha)\delta_{\alpha\beta} \right. \\ &+ \sum_m (\Delta E_{m1} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l + A_\alpha + A_\beta)\Delta E_{m1} X_m^{\alpha\beta} \\ &+ 2(\tilde{E}_k\tilde{E}_l - (\tilde{E}_k + \tilde{E}_l)(A_\alpha + A_\beta) + (A_\alpha)^2 + (A_\beta)^2 + A_\alpha A_\beta)\eta_{\alpha\beta} \\ &\left. + \sum_{m,\gamma} (\Delta E_{m1} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l + A_\alpha + A_\beta + 2A_\gamma)\Delta E_{m1} (X_m^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\beta} + \eta_{\alpha\gamma}X_m^{\gamma\beta}) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

という形になる。さらに

$$\frac{\Delta E_{21}}{|\Delta E_{31}|} = \frac{\Delta m_{21}^2}{|\Delta m_{31}^2|} \sim 3 \times 10^{-2} \quad (3.6)$$

と、CHOOZ による  $\theta_{13}$  の制限 ( $\theta_{13} < 8^\circ$ ) による

$$s_{13} < 0.14 \quad (3.7)$$

も微小量として、微小量の二次  $\eta_{\alpha\beta} \times \Delta E_2$  や  $\eta_{\alpha\beta} \times s_{13}$  も無視する。こうすることで、(3.5) におけるユニタリ性の破れの影響を表す二つの項のうち前者は (3.6), (3.7) による無視を受けないことがわかる。つまり、 $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  チャンネルでは  $\eta_{\alpha\beta}$  が大きく含まれることがわかる。因みに  $A_e = A/2, A_{\mu\text{or}\tau} = -A/2$  はニュートリノのエネルギーが約  $10\text{GeV}$  のときに  $E_3 \sim A$  となるので、本研究で対象とする数  $\text{GeV} \sim$  数十  $\text{GeV}$  の領域では微小量とはしない。

以上よりニュートリノ振動で  $\eta_{e\tau}$  の影響のみを調べたいならば  $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$  を扱えば良いことが推測されるが、(3.5) におけるユニタリ性の破れの影響を表す二つの項のうちの後者から入ってくる  $\eta_{e\tau}$  以外の  $\eta_{\alpha\beta}$  はどうなのだろうか。 $\tilde{x}_j^{e\tau}$  における (3.5) の  $[\dots]$  内の最後の項を書き下すと

$$\begin{aligned} &(\Delta E_{31} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l + A)\Delta E_{31}(X_3^{ee}\eta_{e\tau} + \eta_{ee}X_3^{e\tau}) \\ &+ (\Delta E_{31} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l - A)\Delta E_{31}(X_3^{e\mu}\eta_{\mu\tau} + \eta_{e\mu}X_3^{\mu\tau}) \\ &+ (\Delta E_{31} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l - A)\Delta E_{31}(X_3^{e\tau}\eta_{\tau\tau} + \eta_{e\tau}X_3^{\tau\tau}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

である。この中で  $\eta_{\alpha\beta}$  と  $s_{13}$  の積があれば無視する。(3.8) に現れる  $X_3^{\alpha\beta}$  は混合角と CP 位相で書くと

$$X_3^{ee} = s_{13}^2 \quad (3.9)$$

$$X_3^{e\tau} = c_{23}c_{13}s_{13}e^{-i\delta} \quad (3.10)$$

$$X_3^{e\mu} = s_{23}c_{13}s_{13}e^{-i\delta} \quad (3.11)$$

$$X_3^{\mu\tau} = c_{23}s_{23}c_{13}^2 \quad (3.12)$$

$$X_3^{\tau\tau} = c_{23}^2c_{13}^2 \quad (3.13)$$

となる。(3.8) で  $s_{13}$  の無い  $X_3^{\alpha\beta}$  だけを残すと

$$\begin{aligned} & (\Delta E_{31} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l - A)\Delta E_{31}\eta_{e\mu}X_3^{\mu\tau} \\ & + (\Delta E_{31} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l - A)\Delta E_{31}\eta_{e\tau}X_3^{\tau\tau} \end{aligned} \quad (3.14)$$

であるが、(3.2) より  $\eta_{e\mu} \ll \eta_{e\tau}$  である。結局

$$(\Delta E_{31} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l - A)\Delta E_{31}X_3^{\tau\tau}\eta_{e\tau} \quad (3.15)$$

だけが残り、 $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$  チャネルではユニタリ性の破れの影響は  $\eta_{e\tau}$  のみが支配的であることになる。

以上の近似を施した  $\tilde{x}_j^{e\tau}$  は

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j^{e\tau} & \simeq \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{jk}\Delta\tilde{E}_{jl}} \\ & \times \left[ (\Delta E_{21} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l)\Delta E_{21}X_2^{e\tau} + (\Delta E_{31} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l)\Delta E_{31}X_3^{e\tau} \right. \\ & \left. + (2\tilde{E}_k\tilde{E}_l + \frac{A^2}{2} + (E_{31} - \tilde{E}_k - \tilde{E}_l - A)\Delta E_{31}X_3^{\tau\tau})\eta_{e\tau} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

である。

エネルギー固有値  $\tilde{E}_j$  について、これらは (2.35) の固有方程式の解、つまり

$$\begin{pmatrix} \sum_k \Delta E_{k1}X_k^{ee} + A(\frac{1}{2} + \eta_{ee}) & \sum_k \Delta E_{k1}X_k^{e\mu} & \sum_k \Delta E_{k1}X_k^{e\tau} \\ \sum_k \Delta E_{k1}X_k^{\mu e} & \sum_k \Delta E_{k1}X_k^{\mu\mu} - A(\frac{1}{2} + \eta_{\mu\mu}) & \sum_k \Delta E_{k1}X_k^{\mu\tau} - A\eta_{\mu\tau} \\ \sum_k \Delta E_{k1}X_k^{\tau e} & \sum_k \Delta E_{k1}X_k^{\tau\mu} - A\eta_{\tau\mu} & \sum_k \Delta E_{k1}X_k^{\tau\tau} - A(\frac{1}{2} + \eta_{\tau\tau}) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

の固有方程式の解なので、 $\eta$  の影響を受ける。しかし、微小量の二次以降を無視することと、(3.16) より、 $[\dots]$  内の全ての項が  $E_2, s_{13}, \eta_{e\tau}$  によって微小量となっているために、エネルギー固有値  $\tilde{E}_j$  から来る  $\eta$  の影響は全て二次の微小量となる。従って、エネルギー固有値としてはユニタリ性の破れのないハミルトニアンから導出されるものを用いる。

## 第4章 数値解析

ニュートリノ振動の  $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$  チャンネルにおけるユニタリ性の破れの影響が実験的に有意なものであるのかどうかを数値的に議論する。本章ではニュートリノファクトリー実験で予測されるニュートリノのイベント数を計算し、「ユニタリ性が破れた場合のイベント数と標準模型によるイベント数の差」と「その誤差」を比較する。

### 4.1 イベント数

本研究では反ミューオンの崩壊によって得られる電子ニュートリノがニュートリノ振動でタウニュートリノへ遷移したものを鉛を用いた検出器で捕らえることを想定する。

#### 4.1.1 反ミューオン崩壊

反ミューオンは弱い相互作用により平均寿命  $(2.19703 \pm 0.00004) \times 10^{-6} s$  で陽電子、電子ニュートリノ、反ミューオンニュートリノへと崩壊をする。

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (4.1)$$

この反応によって生じる電子ニュートリノのうち、反ミューオンの運動の方向に放出されるもののエネルギー毎の流束は

$$\frac{d^2 N}{dy dS} = \frac{12 E_\mu^2}{\pi m_\mu^2 L^2} y^2 (1 - y) \quad (4.2)$$

である [6]。  $E_\mu, m_\mu$  はそれぞれ崩壊する反ミューオンのエネルギー、質量、  $L$  は反ミューオンの崩壊点からの距離、  $y$  は電子ニュートリノと反ミューオンのエネルギーの比  $y = E/E_\mu$ 、  $dS$  は  $dS = L^2 d\Omega$  で反ミューオンの崩壊点から距離  $L$  における微小立体角  $d\Omega$  の張る面積である。これが一つのミューオンの崩壊からの寄与なので、実験で得られるエネルギー毎の流束はこれにミューオンの崩壊数  $n_\mu$  を掛けたものである。ニュートリノファクトリー実験ではミューオンは年間  $10^{21}$  個の崩壊を起こすことが見込まれている。

### 4.1.2 検出器

タウニュートリノは検出器において、核子との荷電カレントの相互作用をすることによって検出される。ニュートリノと核子とは中性カレントの相互作用もおよぼすが、この相互作用ではニュートリノの種類 ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) を特定することができない。ニュートリノと核子の荷電カレント相互作用はニュートリノの種類に応じた荷電レプトンを伴う。

$$\nu_\alpha + d \longrightarrow l_\alpha^- + u \quad (4.3)$$

$l_\alpha^-$  はフレーバーが  $\alpha$  である荷電レプトンである。つまり、検出器においてタウオンを検出すればタウニュートリノを検出したことになる。

では、タウオンはどのように観測されるのだろうか。タウニュートリノと核子との反応で生成されたタウオンは平均寿命  $(295.6 \pm 3.1) \times 10^{-15} s$  で崩壊する。その崩壊は 86% の割合で一つの荷電粒子を伴う。

$$\tau^- \longrightarrow \text{荷電粒子} + \text{複数の中性粒子} \quad (4.4)$$

このときタウオンの運動方向と生成された荷電粒子の運動方向に折れ曲がりが生じる。この折れ曲がった飛跡をタウオンの崩壊現象の候補とする。しかし、電子ニュートリノと核子の荷電カレント相互作用で生成される電子とミュオンニュートリノと核子の荷電カレント相互作用で生成されるミュオンもラザフォード散乱のために、その飛跡が折れ曲がる。ところが、折れ曲がりの角度を  $\Delta\theta$  として散乱後の運動量  $P$  にたいする  $p_T = P \sin \Delta\theta$  を定義するとタウオンの崩壊の場合の  $p_T$  と電子、ミュオンのラザフォード散乱の  $p_T$  では分布に違いがあるため電子ニュートリノ、ミュオンニュートリノの信号とタウニュートリノの信号を区別することが可能となる。

本研究では検出器として、鉛を用いた原子核乾板を想定し、鉛の質量を  $5kt$  とする。このときのタウニュートリノの標的となる核子数は鉛の質量を原子質量単位  $m_u$  で割ることで大雑把に見積もることができる。

$$\begin{aligned} N_T &= \frac{5kt}{m_u} \\ &\simeq \frac{5 \times 10^6 kg}{1.66 \times 10^{-27} kg} \\ &\simeq 3.0 \times 10^{33} \end{aligned} \quad (4.5)$$

### 4.1.3 イベント数

ミュオンの崩壊により発生したエネルギー  $E$  の電子ニュートリノは、崩壊点から距離  $L$  の場所で (4.2) の流束を持つ。しかし、これらの電子ニュートリノは  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$  の確率でタウニュートリノに遷移する。  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$  はエネルギー

と基線長に依存するので、そのことを明確に示すときはニュートリノ振動の確率を  $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(E, L)$  と表記する。つまり崩壊点から距離  $L$  でのエネルギー  $E$  のタウニュートリノのエネルギー毎の流束は

$$\frac{d^2 N}{dy dS} = n_\mu \frac{12E_\mu^2}{\pi m_\mu^2 L^2} y^2 (1-y) P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau}(E, L) \quad (4.6)$$

これらのタウニュートリノが前小節で述べたように核子と反応して検出される。反応のし易さを表す量に散乱断面積という量がある。ニュートリノと核子との弱い相互作用の荷電カレントによる散乱断面積は

$$\sigma_{\nu N} = 0.67 \times 10^{-38} \times \frac{E}{\text{GeV}} \text{cm}^{-2} \quad (4.7)$$

であり、ニュートリノのエネルギー  $E$  に比例する [6]。

エネルギーが  $E$  のタウニュートリノの流束 (4.6) が一つの核子と反応するときのイベント数が  $(4.6) \times \sigma_{\nu N}$  である。検出器における標的となる核子数が  $N_T$  であり、検出効率が 10% であるとエネルギーが  $E$  のタウニュートリノの流束が検出される数  $N(E)$  は

$$N(E) = 0.1 \times N_T \times \sigma_{\nu N} \times n_\mu \frac{12E_\mu^2}{\pi m_\mu^2 L^2} y^2 (1-y) P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau}(E, L) \quad (4.8)$$

である。さらに、エネルギーがゼロから  $E_\mu$  までのタウニュートリノ全てを検出するときのイベント数  $N$  は (4.8) を  $y = E/E_\mu$  で 0 から 1 まで積分したものである。

$$\begin{aligned} N &= \int_0^1 dy 0.1 \times N_T \times \sigma_{\nu N} \times n_\mu \frac{12E_\mu^2}{\pi m_\mu^2 L^2} y^2 (1-y) P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau}(E, L) \\ &= 0.1 \times 12 \times 0.67 \times 10^{12} \frac{(\frac{N_T}{10^{33}})(\frac{n_\mu}{10^{21}})}{\pi (\frac{m_\mu}{\text{MeV}})^2 (\frac{E_\mu}{\text{GeV}})(\frac{L}{\text{km}})^2} \\ &\quad \times \int_0^{E_\mu} d\left(\frac{E}{\text{GeV}}\right) \left(\frac{E}{\text{GeV}}\right)^3 \left(1 - \frac{E/\text{GeV}}{E_\mu/\text{GeV}}\right) P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau}(E, L) \end{aligned} \quad (4.9)$$

## 4.2 数値解析

実験により得られる、電子ニュートリノがタウニュートリノに遷移するイベント数は (4.9) であると計算された。現在のユニタリ性の破れの上限、ニュートリノファクトリーで想定されるミュオン崩壊数、検出器における標的核子数を用いて本研究の目的であるニュートリノ振動におけるユニタリ性の破れの影響は観測可能なのだろうか。もしも、標準模型にニュートリノ質量を追加しただけの理論によって予測されるタウニュートリノの検出数とユニタリ性の破れを導入し

た理論により予測されるタウニュートリノの検出数の差が実験的な誤差の範囲内ならばニュートリノ振動におけるユニタリ性の破れの影響は観測不可能ということになる。

検出器によって検出された粒子のイベント数  $N$  の誤差  $\delta N$  の二乗は系統誤差 (systematic error)  $\delta N_{sys.}$  の二乗と統計誤差 (statistical error)  $\delta N_{stat.}$  の二乗の和である。

$$\delta N^2 = \delta N_{sys.}^2 + \delta N_{stat.}^2. \quad (4.10)$$

誤差のうち、系統誤差はイベント数に比例していて、

$$\delta N_{sys.} = \sigma_{sys.} N \quad (4.11)$$

と表される。 $\sigma_{sys.}$  は実験系に依存する量である。また、統計誤差はイベント数の平方根であり、

$$\delta N_{stat.} = \sqrt{N} \quad (4.12)$$

である。ニュートリノファクトリー実験では  $\sigma_{sys.} \sim 10^{-5}$  であると思われているので、系統誤差と統計誤差が同等の大きさになるためにはイベント数が  $N \sim 10^{10}$  必要である。本研究では  $N < 10^3$  程度なので、誤差 (4.10) は統計誤差が主要な誤差となる。

$$\delta N \simeq \delta N_{stat.} \quad (4.13)$$

本節で問題にしたいのは、標準模型にニュートリノ質量を追加しただけの理論によって予測されるタウニュートリノの検出数とユニタリ性の破れを導入した理論により予測されるタウニュートリノの検出数の差が実験的な誤差よりも大きいのか小さいのかということであった。それを考えるのに有用な量が以下にしめす Figure Of Merit  $\Delta\chi^2$  である。

$$\Delta\chi^2 = \left( \frac{N_{UV} - N_{std.}}{\delta N_{std.}} \right)^2 \quad (4.14)$$

$N_{std.}$  は標準模型とニュートリノ質量によって予測されるタウニュートリノ検出のイベント数、 $\delta N_{std.}$  はその誤差、 $N_{UV}$  はユニタリ性が破れている場合に予測されるタウニュートリノ検出のイベント数である。即ち、(4.14) は標準模型にニュートリノ質量を追加した理論によって予測されるタウニュートリノの検出数とユニタリ性の破れを導入した理論により予測されるタウニュートリノの検出数の差と前者の誤差との比である。もしも  $\Delta\chi^2 < 1$  ならば、実験においてユニタリ性の破れを含めて計算したイベント数に近い数のタウニュートリノを検出したとしても、現実にはユニタリ性の破れは存在しないが誤差のためにそのような数のタウニュートリノを検出したと見做されても仕方がないことになる。逆に  $\Delta\chi^2 > 1$  でユニタリ性の破れを含めて計算したイベント数に近い数のタウニュートリノを検出したとするならば、そのイベント数が標準模型とニュートリノ質量によって予測されるタウニュートリノ検出のイベント数の誤差によるものではないといえる。

なお、先に指摘したように誤差において系統誤差よりも統計誤差が主要であるとすると (4.14) は

$$\begin{aligned}\Delta\chi^2 &= \left(\frac{N_{UV} - N_{std.}}{\sqrt{N_{std.}}}\right)^2 \\ &= \frac{(N_{UV} - N_{std.})^2}{N_{std.}}\end{aligned}\quad (4.15)$$

と書ける。

数値計算のために使用する値は

$$\Delta m_{21}^2 = 7.9 \times 10^{-5} eV^2 \quad (4.16)$$

$$\Delta m_{31}^2 = 2.5 \times 10^{-3} eV^2 \quad (4.17)$$

$$\sin^2 2\theta_{12} = 0.86 \quad (4.18)$$

$$\sin^2 2\theta_{23} = 1.0 \quad (4.19)$$

$$A = \frac{1}{2000} km^{-1} = 0.0985 peV \quad (4.20)$$

$$|\eta_{e\tau}| = 8.0 \times 10^{-3} \quad (4.21)$$

$$n_\mu = 10^{21} \quad (4.22)$$

$$N_T = 3.0 \times 10^{33} \quad (4.23)$$

$$m_\mu = 100 GeV \quad (4.24)$$

であり、順階層性 ( $\Delta m_{31}^2 > 0$ ) を仮定する。その他の値は  $\theta_{13}$  については

$$\sin^2 2\theta_{13} = 7.6 \times 10^{-2} \quad (\theta_{13} = 8^\circ) \quad (4.25)$$

$$= 1.1 \times 10^{-2} \quad (\theta_{13} = 3^\circ) \quad (4.26)$$

$$= 1.2 \times 10^{-3} \quad (\theta_{13} = 1^\circ) \quad (4.27)$$

の三通り、CP 位相については

$$\delta = -\frac{\pi}{2} \quad (4.28)$$

$$= 0 \quad (4.29)$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad (4.30)$$

$$= \pi \quad (4.31)$$

の四通り、 $\eta_{e\tau}$  の偏角についても

$$\arg(\eta_{e\tau}) = -\frac{\pi}{2} \quad (4.32)$$

$$= 0 \quad (4.33)$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad (4.34)$$

$$= \pi \quad (4.35)$$



の四通りを代入する。計 48 通りのグラフを以下に示す。グラフはいずれも横軸が  
基線長/km、縦軸がミューオンのエネルギー/GeV である。

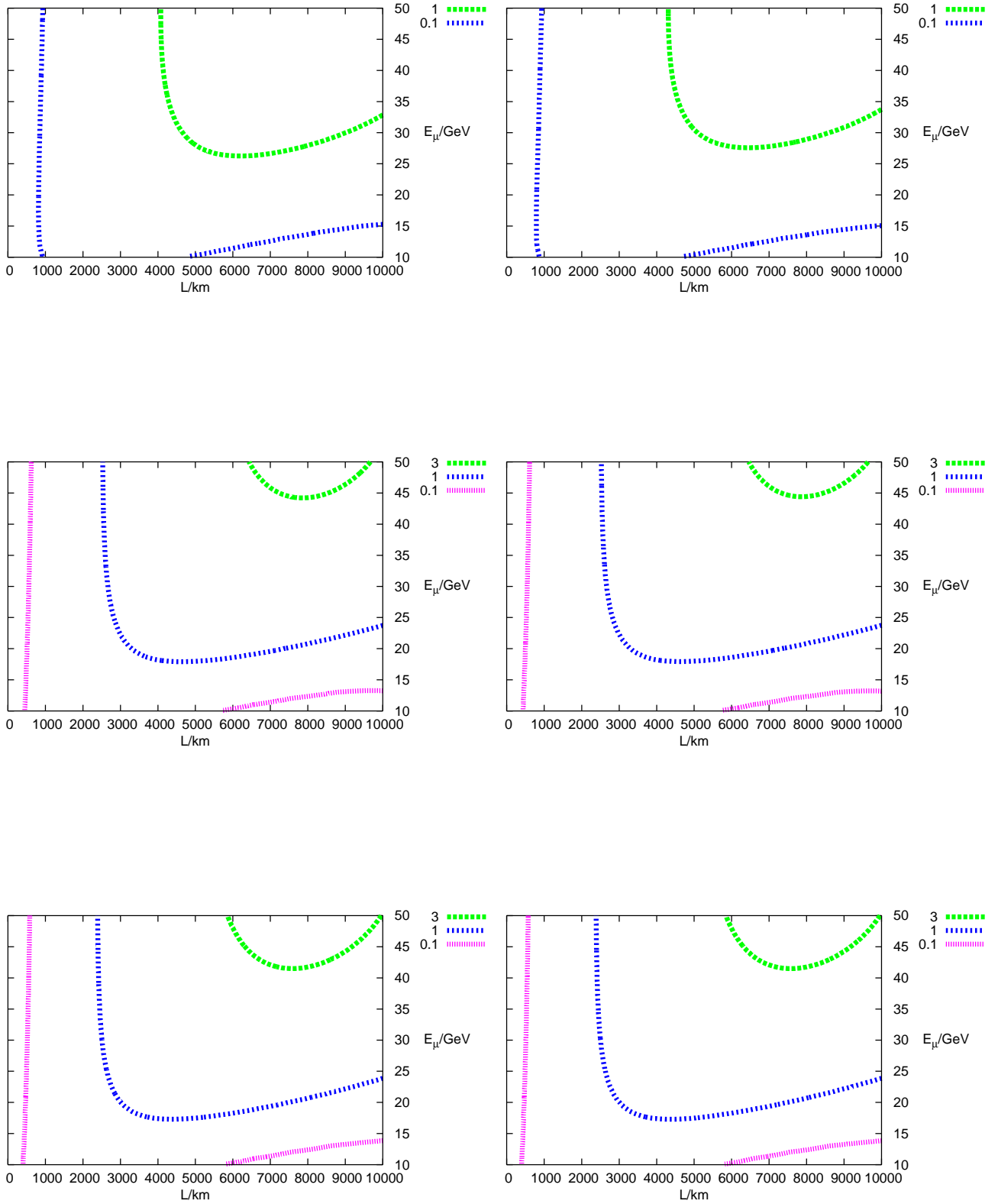


図 4.1: 左は  $\delta = \pi, \arg(\eta_{e\tau}) = 0$ 。右は  $\delta = 0, \arg(\eta_{e\tau}) = \pi$ 。いずれも上から  $\theta_{13} = 1^\circ, 3^\circ, 8^\circ$ 。

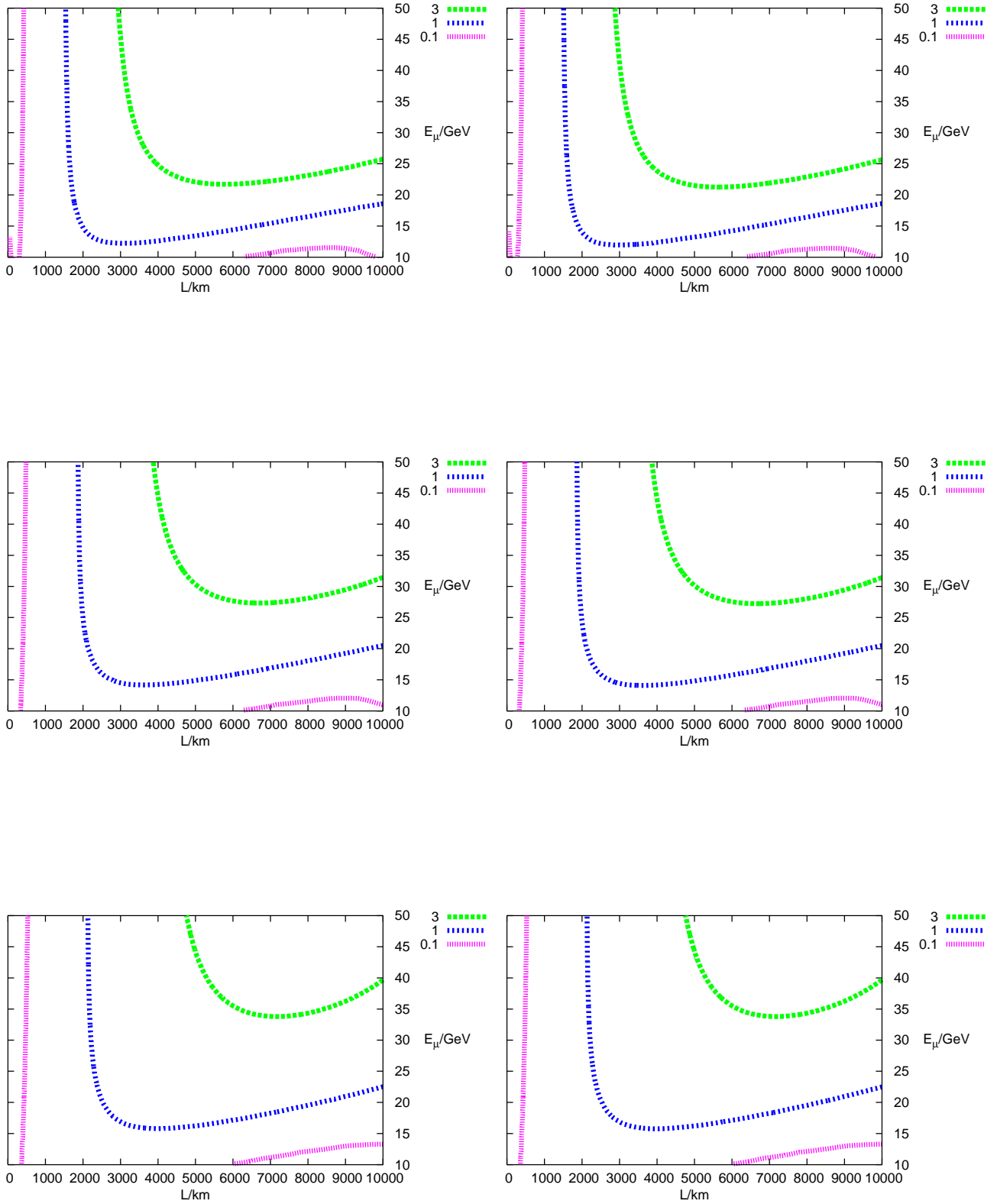


図 4.2: 左は  $\delta = \pi, \arg(\eta_{e\tau}) = \pi$ 。右は  $\delta = 0, \arg(\eta_{e\tau}) = 0$ 。いずれも上から  $\theta_{13} = 1^\circ, 3^\circ, 8^\circ$ 。

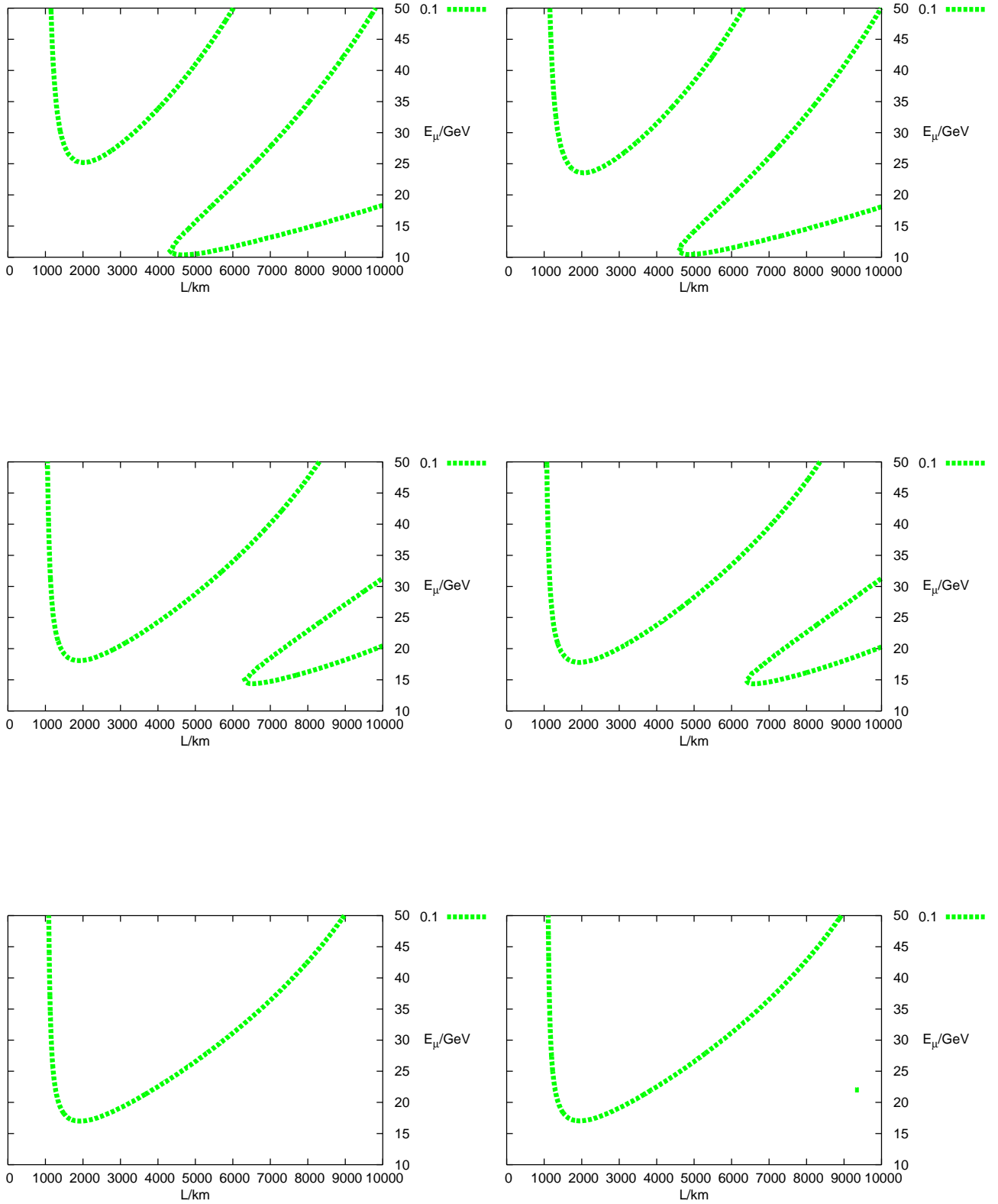


図 4.3: 左は  $\delta = \pi/2, \arg(\eta_{e\tau}) = \pi$ 。右は  $\delta = -\pi/2, \arg(\eta_{e\tau}) = 0$ 。いずれも上から  $\theta_{13} = 1^\circ, 3^\circ, 8^\circ$ 。

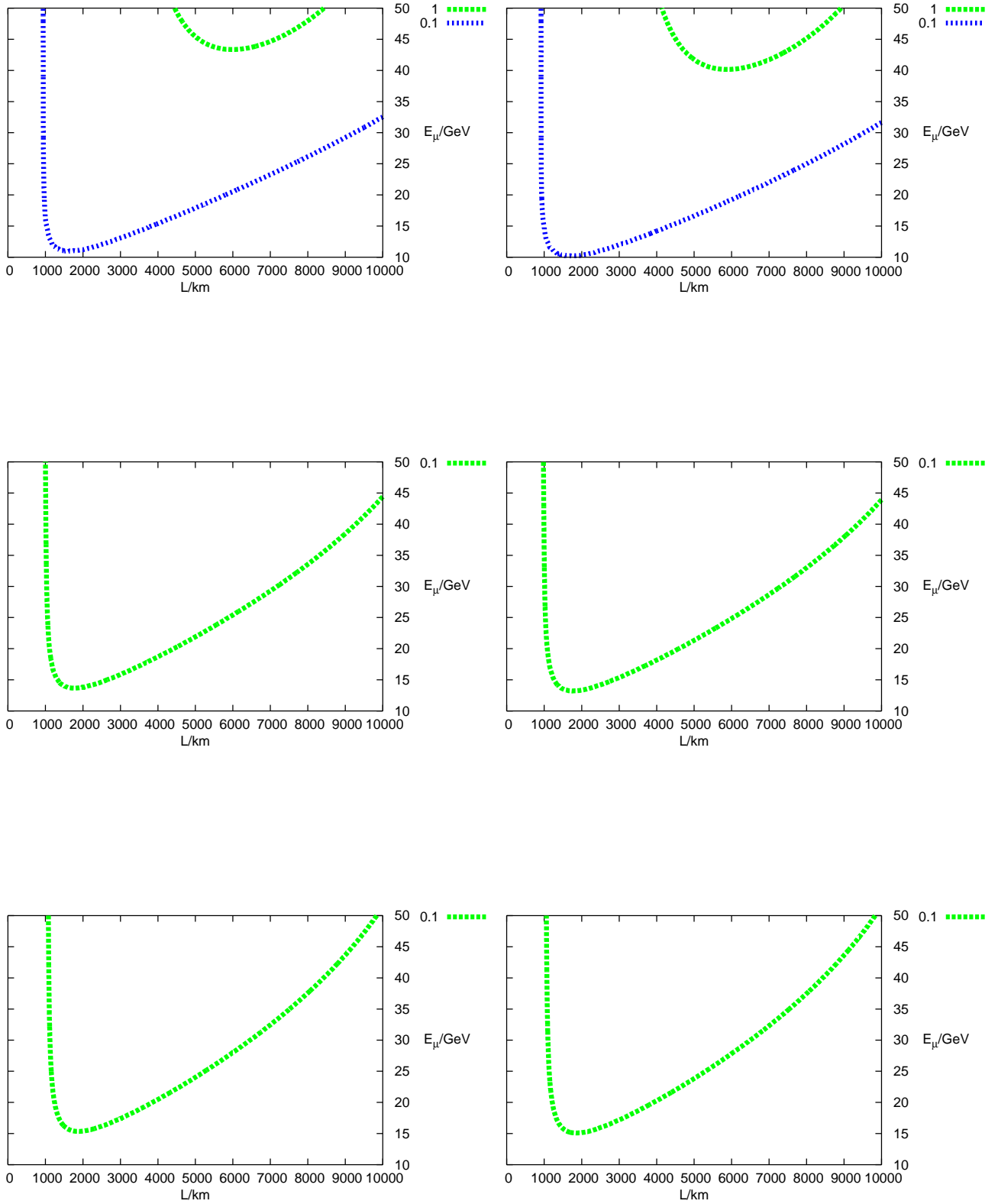


図 4.4: 左は  $\delta = \pi/2, \arg(\eta_{e\tau}) = 0$ 。右は  $\delta = -\pi/2, \arg(\eta_{e\tau}) = \pi$ 。いずれも上から  $\theta_{13} = 1^\circ, 3^\circ, 8^\circ$ 。

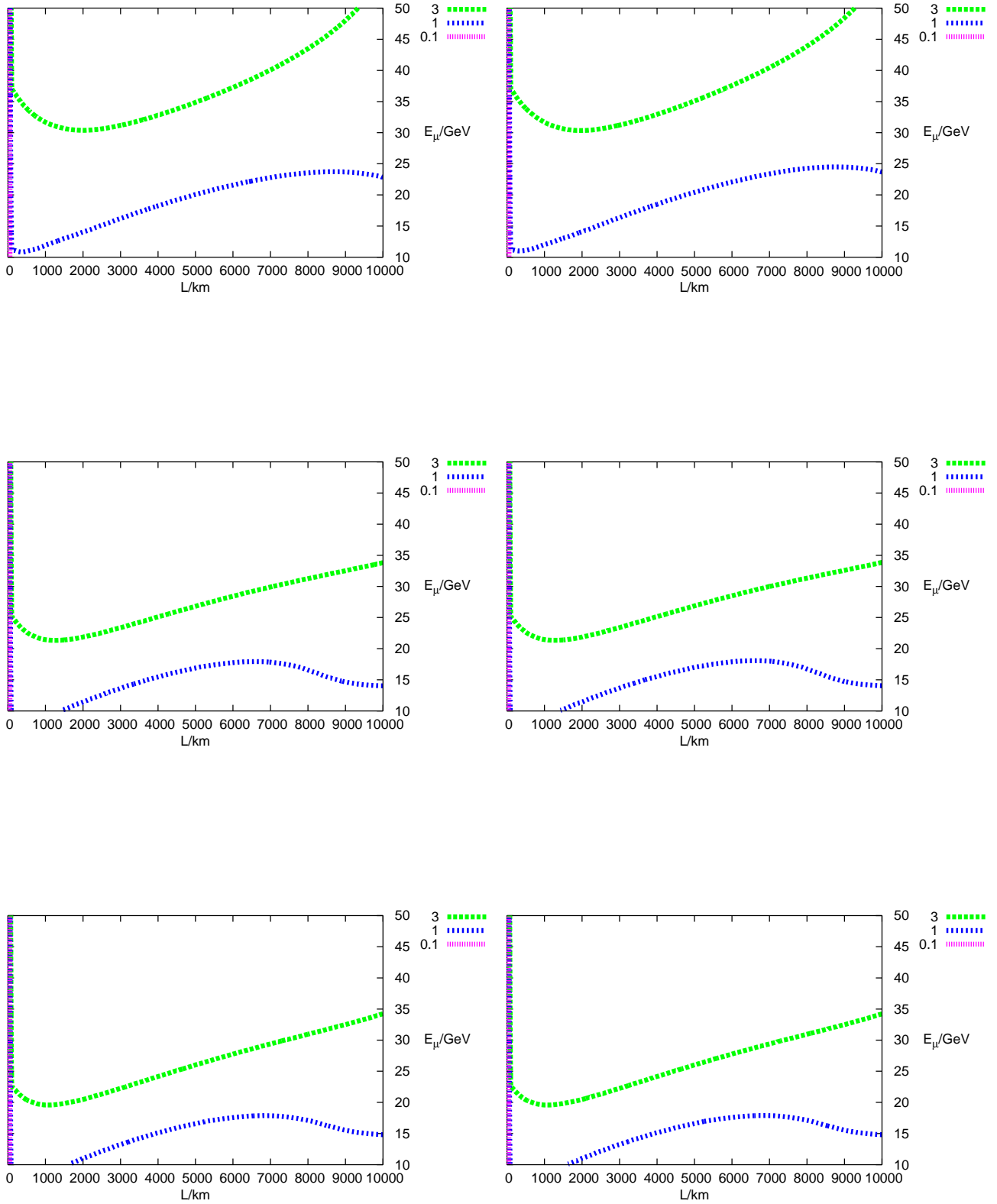


図 4.5: 左は  $\delta = \pi/2, \arg(\eta_{e\tau}) = \pi/2$ 。右は  $\delta = -\pi/2, \arg(\eta_{e\tau}) = -\pi/2$ 。いずれも上から  $\theta_{13} = 1^\circ, 3^\circ, 8^\circ$ 。

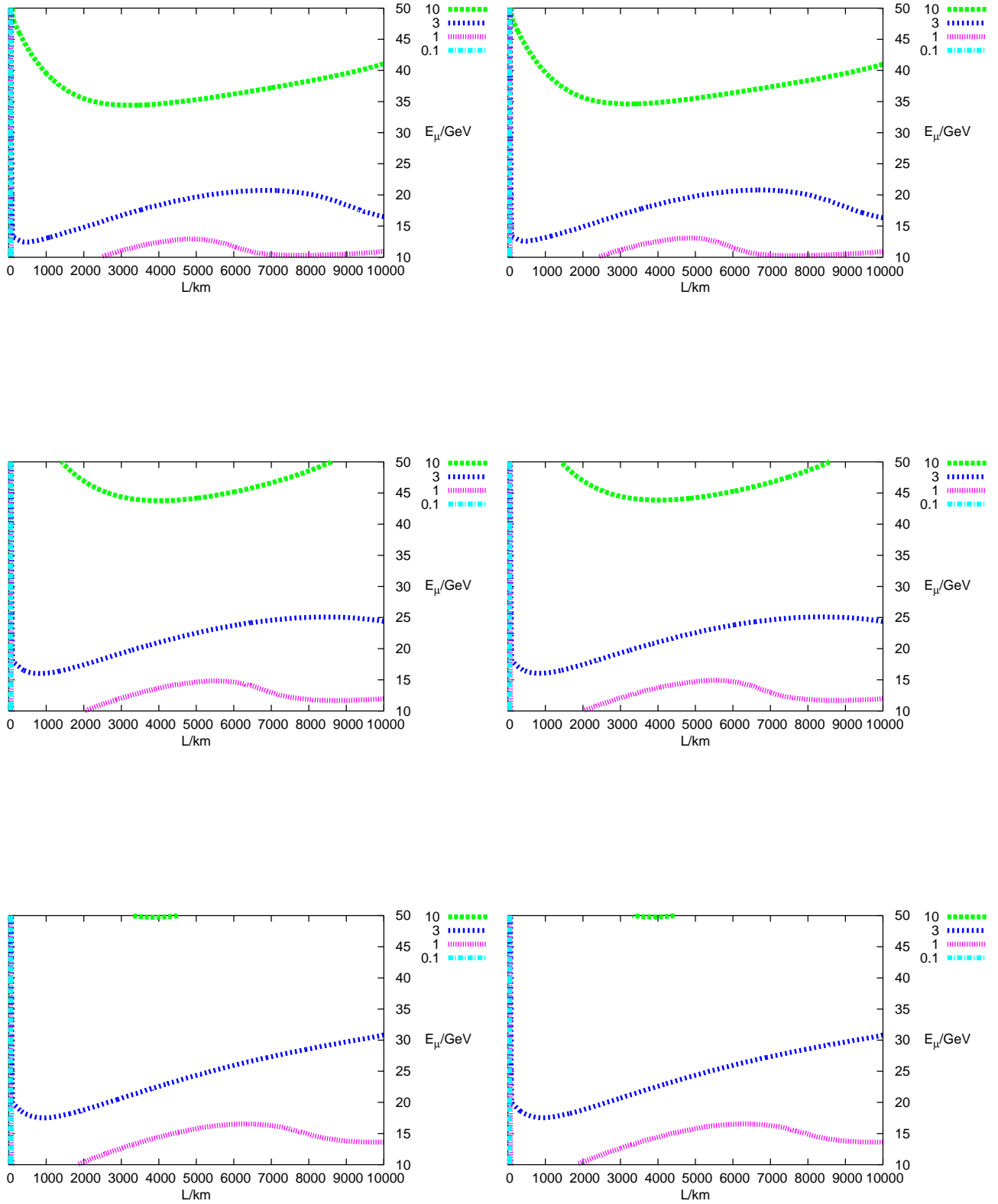


図 4.6: 左は  $\delta = \pi/2, \arg(\eta_{e\tau}) = -\pi/2$ 。右は  $\delta = -\pi/2, \arg(\eta_{e\tau}) = \pi/2$ 。いずれも上から  $\theta_{13} = 1^\circ, 3^\circ, 8^\circ$ 。

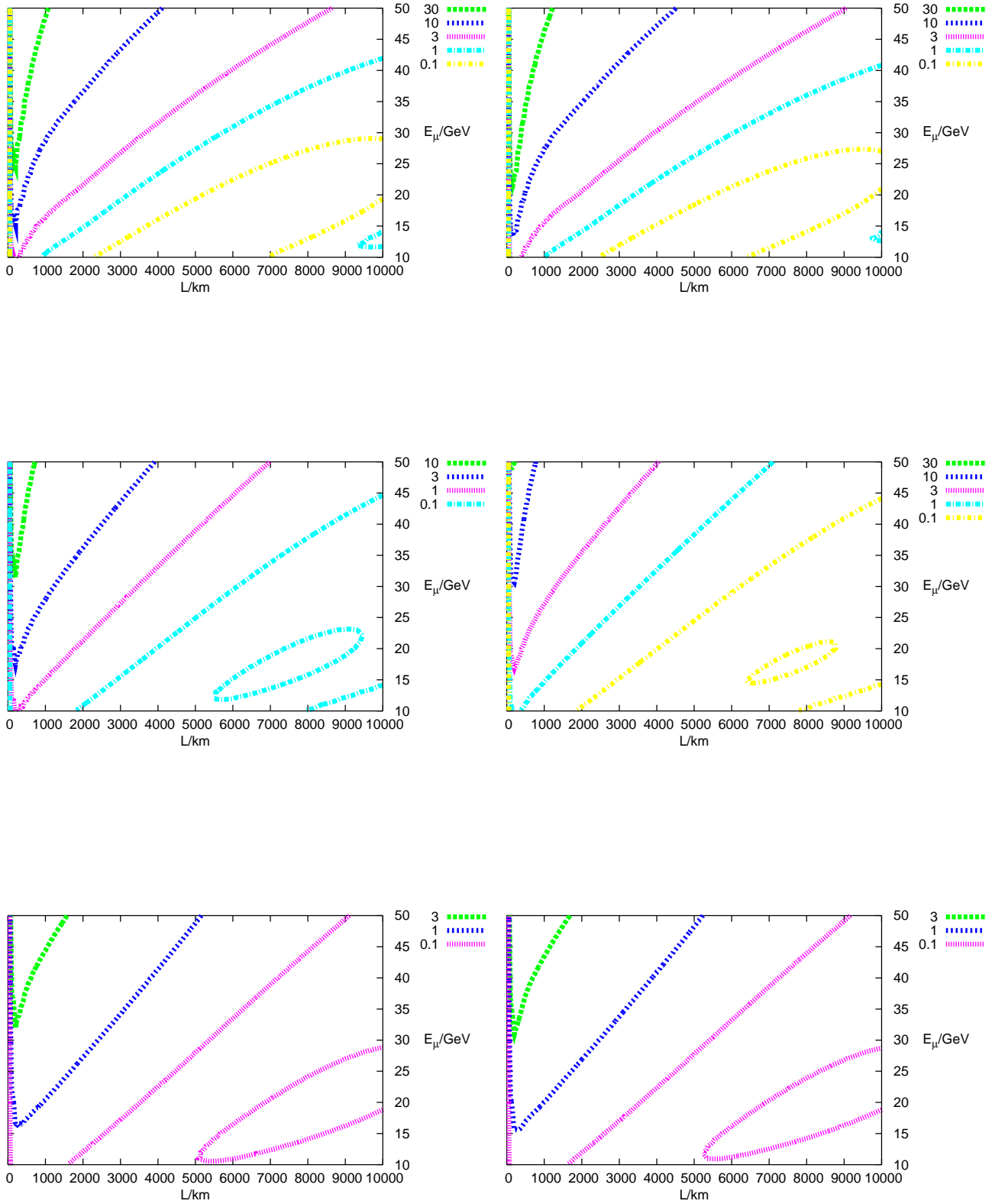


図 4.7: 左は  $\delta = \pi$ ,  $\arg(\eta_{e\tau}) = \pi/2$ 。右は  $\delta = 0$ ,  $\arg(\eta_{e\tau}) = -\pi/2$ 。いずれも上から  $\theta_{13} = 1^\circ, 3^\circ, 8^\circ$ 。



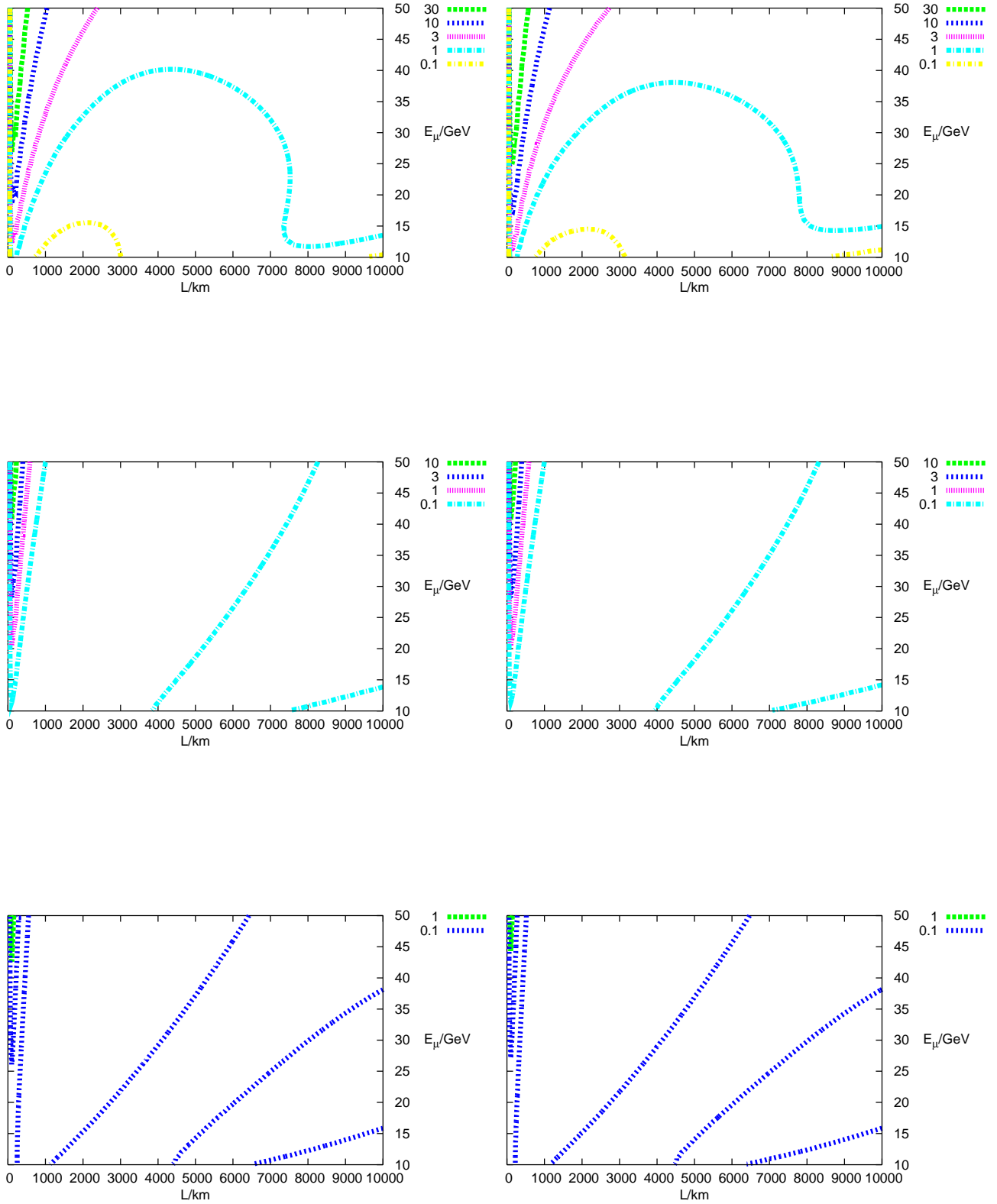


図 4.8: 左は  $\delta = \pi$ ,  $\arg(\eta_{e\tau}) = -\pi/2$ 。右は  $\delta = 0$ ,  $\arg(\eta_{e\tau}) = \pi/2$ 。いずれも上から  $\theta_{13} = 1^\circ, 3^\circ, 8^\circ$ 。

### 4.3 考察

以上の図をみると、二つの大きな特徴に気付く。

- ミューオンエネルギーが大きい方が Figure Of Merit が大きい傾向にある。
- CP 位相  $\delta$  と  $\eta_{e\tau}$  の偏角によってグラフの形を分類できる。

まずは何故ミューオンエネルギーが大きい方が Figure Of Merit が大きいのかを考える。(4.15)を見ると、 $\Delta\chi^2 \propto \sqrt{N}$ であることがわかる。つまり、タウニュートリノのイベント数が多いほど Figure Of Merit が大きくなるということである。(4.8),(4.9)より、エネルギーが  $E \sim E + dE$  のタウニュートリノが検出されるイベント数  $N(E)dy$  は

$$N(E)dy = d\left(\frac{E}{\text{GeV}}\right) 0.1 \times 12 \times 0.67 \times 10^{12} \frac{\left(\frac{N_T}{10^{33}}\right)\left(\frac{n_\mu}{10^{21}}\right)}{\pi\left(\frac{m_\mu}{\text{MeV}}\right)^2\left(\frac{L}{\text{km}}\right)^2} P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau}(E, L) \\ \times \frac{(E/\text{GeV})^3}{(E_\mu/\text{GeV})} \left(1 - \frac{E/\text{GeV}}{E_\mu/\text{GeV}}\right) \quad (4.36)$$

である。ここで (4.36) において

$$M(E) = \frac{(E/\text{GeV})^3}{(E_\mu/\text{GeV})} \left(1 - \frac{E/\text{GeV}}{E_\mu/\text{GeV}}\right) \quad (4.37)$$

を定義する。この関数はミューオンのエネルギー  $E_\mu$  によって、図 4.9 のように変化する。即ち、ミューオンエネルギーが大きい程、Figure Of Merit が大きくなる

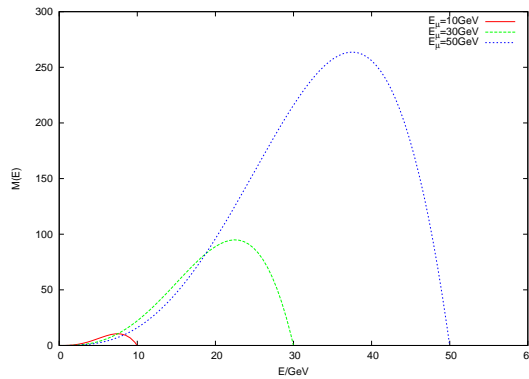


図 4.9:  $E_\mu = 10\text{GeV}, 30\text{GeV}, 50\text{GeV}$  における  $M(E)$ 。

ことが推測される。

	$\delta + \arg(\eta_{e\tau}) = 0 \text{ or } \pi$	$\delta + \arg(\eta_{e\tau}) = \pi/2 \text{ or } -\pi/2$
$\arg(\eta_{e\tau}) = 0 \text{ or } \pi$	図 4.1, 図 4.2	図 4.3, 図 4.4
$\arg(\eta_{e\tau}) = \pi/2 \text{ or } -\pi/2$	図 4.5, 図 4.6	図 4.7, 図 4.8

表 4.1:  $\arg\eta_{e\tau}, \delta + \arg\eta_{e\tau}$  によるグラフの分類

次に、グラフの傾向を考える。図 4.1 から図 4.8 までのグラフは  $\arg(\eta_{e\tau})$  と  $\delta + \arg(\eta_{e\tau})$  の組み合わせで表 4.1 のように分類できる。ここで、ユニタリ性が破れた場合の  $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$  の振動確率を示す。

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) &= |(H^2)_{e\tau}|^2 \\
&- 4 \sum_{j < k} \Re(\tilde{x}_j^{e\tau} \tilde{x}_k^{e\tau*}) \sin^2\left(\frac{\Delta \tilde{E}_{jk} L}{2}\right) \\
&+ 2 \sum_{j < k} \Im(\tilde{x}_j^{e\tau} \tilde{x}_k^{e\tau*}) \sin(\Delta \tilde{E}_{jk} L) \tag{4.38}
\end{aligned}$$

$\eta^2$  を無視すると右辺第一項はゼロである。第三章で行った近似 (3.16) を用いて振動確率中の  $\tilde{x}_j^{e\tau} \tilde{x}_k^{e\tau*}$  を表すと

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_j^{e\tau} \tilde{x}_k^{e\tau*} &\simeq \frac{1}{\Delta \tilde{E}_{jk} \prod_{j,k}^{cyclic} \Delta \tilde{E}_{jk}} \\
&\times \left[ \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} s_{23}^2 c_{13}^2 (\Delta E_{21})^2 (\Delta E_{21} - \tilde{E}_l - \tilde{E}_j) (\Delta E_{21} - \tilde{E}_l - \tilde{E}_k) \right. \\
&+ \frac{1}{4} c_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} (\Delta E_{31})^2 (\Delta E_{31} - \tilde{E}_l - \tilde{E}_j) (\Delta E_{31} - \tilde{E}_l - \tilde{E}_k) \\
&- \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} c_{13} \sin 2\theta_{13} \Delta E_{21} \Delta E_{31} \\
&\times \left( 2(\Delta E_{21} - \tilde{E}_l - \tilde{E}_k) (\Delta E_{31} - \tilde{E}_l - \tilde{E}_j) \cos \delta + \Delta E_{23} \Delta E_{12} e^{-i\delta} \right) \\
&+ c_{23} \sin 2\theta_{13} \Delta E_{31} \Re(e^{i\delta} \eta_{e\tau}) \\
&\times \left( -2\tilde{E}_j \tilde{E}_l (\tilde{E}_k + \tilde{E}_l) - \frac{A^2}{2} (\tilde{E}_k + \tilde{E}_l - \Delta E_{31}) + c_{23}^2 A \Delta E_{31} (\tilde{E}_k + \tilde{E}_l - \Delta E_{31}) \right. \\
&+ \Delta E_{31} (c_{23}^2 \tilde{E}_k \tilde{E}_l + c_{23}^2 \tilde{E}_k \tilde{E}_j + c_{23}^2 \tilde{E}_l^2 + (2 + c_{23}^2) \tilde{E}_l \tilde{E}_j) \\
&- \left. c_{23}^2 \Delta E_{31}^2 (\tilde{E}_j + \tilde{E}_k + 2\tilde{E}_l - \Delta E_{31}) \right) \\
&+ \sin 2\theta_{12} s_{23} c_{13} \Delta E_{21} \Re(\eta_{e\tau}) \\
&\times \left( -2\tilde{E}_j \tilde{E}_l (\tilde{E}_k + \tilde{E}_l) - \frac{A^2}{2} (\tilde{E}_k + \tilde{E}_l + \Delta E_{21}) + c_{23}^2 A \Delta E_{31} (\tilde{E}_k + \tilde{E}_l + \Delta E_{21}) \right. \\
&+ \Delta E_{31} (c_{23}^2 \tilde{E}_k \tilde{E}_l + c_{23}^2 \tilde{E}_k \tilde{E}_j + c_{23}^2 \tilde{E}_l^2 + (2 + c_{23}^2) \tilde{E}_l \tilde{E}_j) \\
&+ \left. c_{23}^2 \Delta E_{21} \Delta E_{31} (\tilde{E}_j + \tilde{E}_l) - c_{23}^2 \Delta E_{31}^2 (\tilde{E}_l + \tilde{E}_k + \Delta E_{21}) \right) \\
&+ \frac{1}{2} \Delta \tilde{E}_{jk} c_{23} \sin 2\theta_{13} \Delta E_{31} e^{i\delta} \eta_{e\tau} \\
&\times \left( 2\tilde{E}_l^2 - 2\Delta E_{31} \tilde{E}_l^2 + c_{23}^2 A \Delta E_{31} - \frac{A^2}{2} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \Delta \tilde{E}_{jk} \sin 2\theta_{12} s_{13} \Delta E_{21} \eta_{e\tau} \\
&\times \left. \left( 2\tilde{E}_l^2 - 2\Delta E_{31} \tilde{E}_l^2 + c_{23}^2 \Delta E_{31} (A - \Delta E_{21} - \Delta E_{31}) - \frac{A^2}{2} \right) \right] \quad (4.39)
\end{aligned}$$

となり、上から標準的な項、 $\Re(e^{i\delta} \eta_{e\tau})$  に比例する項、 $\Re(\eta_{e\tau})$  に比例する項、 $e^{i\delta} \eta_{e\tau}$  に比例する項、 $\eta_{e\tau}$  に比例する項である。大雑把に言うと、ユニタリ性の破れの関わる項においては  $e^{i\delta} \eta_{e\tau}, \eta_{e\tau}$  が実数なのか純虚数なのかで振動確率の  $\Re(\tilde{x}_j^{e\tau} \tilde{x}_k^{e\tau*})$  や  $\Im(\tilde{x}_j^{e\tau} \tilde{x}_k^{e\tau*})$  に現れる項が違ってくる。

## 第5章 結論

本研究ではニュートリノの固有状態の混合のユニタリ性からのずれの影響を観測するのに適したエネルギー、基線長を探すためのものである。前章で図示した通り、Figure Of Merit が大きくなる基線長は現時点での不確定要素である CP 位相  $\delta$  とユニタリ性からのずれの  $e\tau$  成分の偏角  $\arg(\eta_{e\tau})$  の値によって異なる。本研究でわかったことは以下の点である。

1. 崩壊ミューオンのエネルギーが大きい方が Figure Of Merit が大きい傾向にある。
2.  $\arg(\eta_{e\tau})$  と  $\delta + \arg(\eta_{e\tau})$  で Figure Of Merit の図の形を分類できる。
  - (a)  $\arg(\eta_{e\tau}) = 0$  or  $\pi, \delta + \arg(\eta_{e\tau}) = 0$  or  $\pi$  では長基線で Figure Of Merit が大きい。全ての図において  $E_\mu > 35\text{GeV}, L > 5000\text{km}$  で Figure Of Merit が 1 を超える。(図 4.1, 図 4.2)
  - (b)  $\arg(\eta_{e\tau}) = 0$  or  $\pi, \delta + \arg(\eta_{e\tau}) = \pm\pi/2$  では全体的に Figure Of Merit は 1 を下回る。(図 4.3, 図 4.4)
  - (c)  $\arg(\eta_{e\tau}) = \pm\pi/2, \delta + \arg(\eta_{e\tau}) = 0$  or  $\pi$  では基線長による Figure Of Merit の大きさに大きな違いが見られない。全ての図において  $E_\mu > 25\text{GeV}$  で Figure Of Merit が 1 を超える。(図 4.5, 図 4.6)
  - (d)  $\arg(\eta_{e\tau}) = \pm\pi/2, \delta + \arg(\eta_{e\tau}) = \pm\pi/2$  では短基線で Figure Of Merit が大きい。(図 4.7, 図 4.8)
3.  $\theta_{13}$  の大きさによる Figure Of Merit の違いは  $\delta + \arg(\eta_{e\tau}) = 0$  or  $\pi$  ではあまり顕著ではなく、 $\delta + \arg(\eta_{e\tau}) = \pm\pi/2$  では顕著である。
  - (a)  $\arg(\eta_{e\tau}) = 0$  or  $\pi, \delta + \arg(\eta_{e\tau}) = -\pi/2$  で、 $\theta_{13}$  が小さくなるに従って基線長の長い箇所に Figure Of Merit のピークが見えるようになる。(図 4.3)
  - (b)  $\arg(\eta_{e\tau}) = \pm\pi/2, \delta + \arg(\eta_{e\tau}) = \pm\pi/2$  で、 $\theta_{13}$  が小さくなるに従って Figure Of Merit の大きさが極端に大きくなり、Figure Of Merit が 1 を超える領域が広がる。(図 4.7, 図 4.8)

以上のように、Figure Of Merit が大きくなる基線長は不確定要素である CP 位相  $\delta$  とユニタリ性からのずれの  $e\tau$  成分の偏角  $\arg(\eta_{e\tau})$  の値によって異なる。

今回作成したグラフから、 $\theta_{13}, \delta, \arg(\eta_{e\tau})$  の値が図 4.1, 図 4.2, 図 4.5, 図 4.6, 図 4.7, 図 4.8 での値に近いならばニュートリノ振動におけるユニタリ性の破れの影響を観測できる可能性があることがわかった。また、本研究によりユニタリ性の破れの影響が観測可能となるような  $\theta_{13}, \delta, \arg(\eta_{e\tau})$  を仮定し、適切な  $E_\mu, L$  においてユニタリ性の破れが観測されなければ、 $\theta_{13}, \delta, \arg(\eta_{e\tau}), |\eta_{e\tau}|$  の関係に制限を付けることが可能である。

今後の課題としては、今回の図が得られた原因の解析的な方面からの探求、不確定要素である CP 位相  $\delta$  と混合角  $\theta_{13}$ 、ユニタリ性からのずれの  $e\tau$  成分の偏角  $\arg(\eta_{e\tau})$  を連続的に動かした場合の Figure Of Merit の振舞い、逆階層性 ( $\Delta m_{31}^2 < 0$ ) を仮定した場合の Figure Of Merit の振舞い、さらには不確定要素にどのような制限を課せられるかの研究等が考えられる。

# 謝辞

本研究および本論文の作成にあたり、安田先生には全面的に御指導を賜りました。ここに感謝の意を示します。研究室のメンバーと有意義な議論をできたことにも感謝しております。誠に有難い環境でした。最後に、私の人生を支えてくれた全てに感謝をして本文の結びとします。

## 付録A $\tilde{x}_j^{\alpha\beta}$ の導出

ここではユニタリ性の破れた場合のニュートリノ振動に現れる  $\tilde{x}_j^{\alpha\beta}$  の導出を行う。以下、 $H = 1$  とすれば  $\tilde{X}_j^{\alpha\beta}$  の導出と同等である。まず、 $\tilde{x}_j^{\alpha\beta} = (H\tilde{U})_{\alpha j}(H\tilde{U})_{\beta j}^*$  を  $j$  について和をとると、 $\tilde{U}$  のユニタリ性より

$$\sum_j \tilde{x}_j^{\alpha\beta} = (H^2)_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.1})$$

次に (2.35) の左右から  $H$  を掛けると

$$H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)H = H\tilde{U}\tilde{\mathcal{E}}\tilde{U}^{-1}H. \quad (\text{A.2})$$

$\tilde{U}$  のユニタリ性と  $H$  のエルミート性より (A.2) の  $(\alpha\beta)$  成分は

$$[H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)H]_{\alpha\beta} = \sum_j \tilde{E}_j \tilde{x}_j^{\alpha\beta} \quad (\text{A.3})$$

と書ける。さらに (A.2) の両辺を間に  $H^{-1}H^{-1}$  をはさんで掛け合わせれば

$$\begin{aligned} & H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)HH^{-1}H^{-1}H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)H \\ &= H\tilde{U}\tilde{\mathcal{E}}\tilde{U}^{-1}HH^{-1}H^{-1}H\tilde{U}\tilde{\mathcal{E}}\tilde{U}^{-1}H \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となり、その  $(\alpha\beta)$  成分は

$$[H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)^2H]_{\alpha\beta} = \sum_j \tilde{E}_j^2 \tilde{x}_j^{\alpha\beta} \quad (\text{A.5})$$

である。

(A.1)(A.3)(A.5) を行列形式で書くと以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_3 \\ \tilde{E}_1^2 & \tilde{E}_2^2 & \tilde{E}_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{\alpha\beta} \\ \tilde{x}_2^{\alpha\beta} \\ \tilde{x}_3^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (H^2)_{\alpha\beta} \\ [H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)H]_{\alpha\beta} \\ [H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)^2H]_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

この式の左から (A.6) の左辺にある  $3 \times 3$  行列の逆行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\tilde{E}_2\tilde{E}_3}{\Delta\tilde{E}_{12}\Delta\tilde{E}_{13}} & -\frac{\tilde{E}_2+\tilde{E}_3}{\Delta\tilde{E}_{12}\Delta\tilde{E}_{13}} & \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{12}\Delta\tilde{E}_{13}} \\ \frac{\tilde{E}_3\tilde{E}_1}{\Delta\tilde{E}_{23}\Delta\tilde{E}_{21}} & -\frac{\tilde{E}_3+\tilde{E}_1}{\Delta\tilde{E}_{23}\Delta\tilde{E}_{21}} & \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{23}\Delta\tilde{E}_{21}} \\ \frac{\tilde{E}_1\tilde{E}_2}{\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}} & -\frac{\tilde{E}_1+\tilde{E}_2}{\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}} & \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$



を掛ける。

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{\alpha\beta} \\ \tilde{x}_2^{\alpha\beta} \\ \tilde{x}_3^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{E}_2\tilde{E}_3}{\Delta\tilde{E}_{12}\Delta\tilde{E}_{13}} & -\frac{\tilde{E}_2+\tilde{E}_3}{\Delta\tilde{E}_{12}\Delta\tilde{E}_{13}} & \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{12}\Delta\tilde{E}_{13}} \\ \frac{\tilde{E}_3\tilde{E}_1}{\Delta\tilde{E}_{23}\Delta\tilde{E}_{21}} & -\frac{\tilde{E}_3+\tilde{E}_1}{\Delta\tilde{E}_{23}\Delta\tilde{E}_{21}} & \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{23}\Delta\tilde{E}_{21}} \\ \frac{\tilde{E}_1\tilde{E}_2}{\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}} & -\frac{\tilde{E}_1+\tilde{E}_2}{\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}} & \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (H^2)_{\alpha\beta} \\ [H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)H]_{\alpha\beta} \\ [H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)^2H]_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

つまり、

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j^{\alpha\beta} &= \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{jk}\Delta\tilde{E}_{jl}} [\tilde{E}_k\tilde{E}_l(H^2) - (\tilde{E}_k + \tilde{E}_l)H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)H + H(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)^2H]_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{jk}\Delta\tilde{E}_{jl}} [H(\tilde{E}_k\tilde{E}_l - (\tilde{E}_k + \tilde{E}_l)(U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H) + (U\mathcal{E}U^{-1} + H\mathcal{A}H)^2)H]_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{jk}\Delta\tilde{E}_{jl}} [H(\tilde{E}_k - U\mathcal{E}U^{-1} - H\mathcal{A}H)(\tilde{E}_l - U\mathcal{E}U^{-1} - H\mathcal{A}H)H]_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

## 付録B 物質中のエネルギー固有値

本研究で用いた物質中のエネルギー固有値はエルミート行列 (3.17)

$$\begin{pmatrix} \sum_k \Delta E_{k1} X_k^{ee} + A(\frac{1}{2} + \eta_{ee}) & \sum_k \Delta E_{k1} X_k^{e\mu} & \sum_k \Delta E_{k1} X_k^{e\tau} \\ \sum_k \Delta E_{k1} X_k^{\mu e} & \sum_k \Delta E_{k1} X_k^{\mu\mu} - A(\frac{1}{2} + \eta_{\mu\mu}) & \sum_k \Delta E_{k1} X_k^{\mu\tau} - A\eta_{\mu\tau} \\ \sum_k \Delta E_{k1} X_k^{\tau e} & \sum_k \Delta E_{k1} X_k^{\tau\mu} - A\eta_{\tau\mu} & \sum_k \Delta E_{k1} X_k^{\tau\tau} - A(\frac{1}{2} + \eta_{\tau\tau}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

の固有方程式の解であり、三次方程式の解である。エルミート行列の固有値は全て実数である。以下のような形の三次方程式

$$\tilde{E}_j^3 + \alpha \tilde{E}_j^2 + \beta \tilde{E}_j + \gamma = 0 \quad (\text{B.2})$$

が三つの実数解を持つならば、その解は

$$\tilde{E}_j = -\frac{\alpha}{3} - \frac{2}{3}(\alpha^2 - 3\beta)^{\frac{1}{2}} \cos \left[ \frac{\theta}{3} - \frac{2}{3}(j-1)\pi \right] \quad (\text{B.3})$$

となる。但し、

$$\tilde{E}_1 \leq \tilde{E}_2 \leq \tilde{E}_3 \quad (\text{B.4})$$

$$\theta = \arccos \left[ \frac{2\alpha - 3 - 9\alpha\beta + 27\gamma}{2(\alpha^2 - 3\beta)\sqrt{\alpha^2 - 3\beta}} \right]. \quad (\text{B.5})$$

解の差とその巡回積は

$$\Delta \tilde{E}_{jk} = \frac{4}{3}(\alpha^2 - 3\beta)^{\frac{1}{2}} \sin \left( \frac{\theta}{3} - \frac{j+k-2}{3}\pi \right) \sin \left( \frac{k-j}{3}\pi \right) \quad (\text{B.6})$$

$$\prod_{j,k}^{\text{cyclic}} \Delta \tilde{E}_{jk} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[ 4(\alpha^2 - 3\beta)^3 - (2\alpha - 3 - 9\alpha\beta + 27\gamma)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.7})$$

物質中のエネルギー固有値  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3$  とその差  $\Delta \tilde{E}_{12}, \Delta \tilde{E}_{23}, \Delta \tilde{E}_{31}$  を  $\theta_{13} = 8^\circ, \delta = \pi/2$  としてグラフにすると次のようになる。グラフはいずれも横軸がニュートリノのエネルギー/GeV、縦軸が物質中のエネルギー固有値ないしはそれらの差/peV。

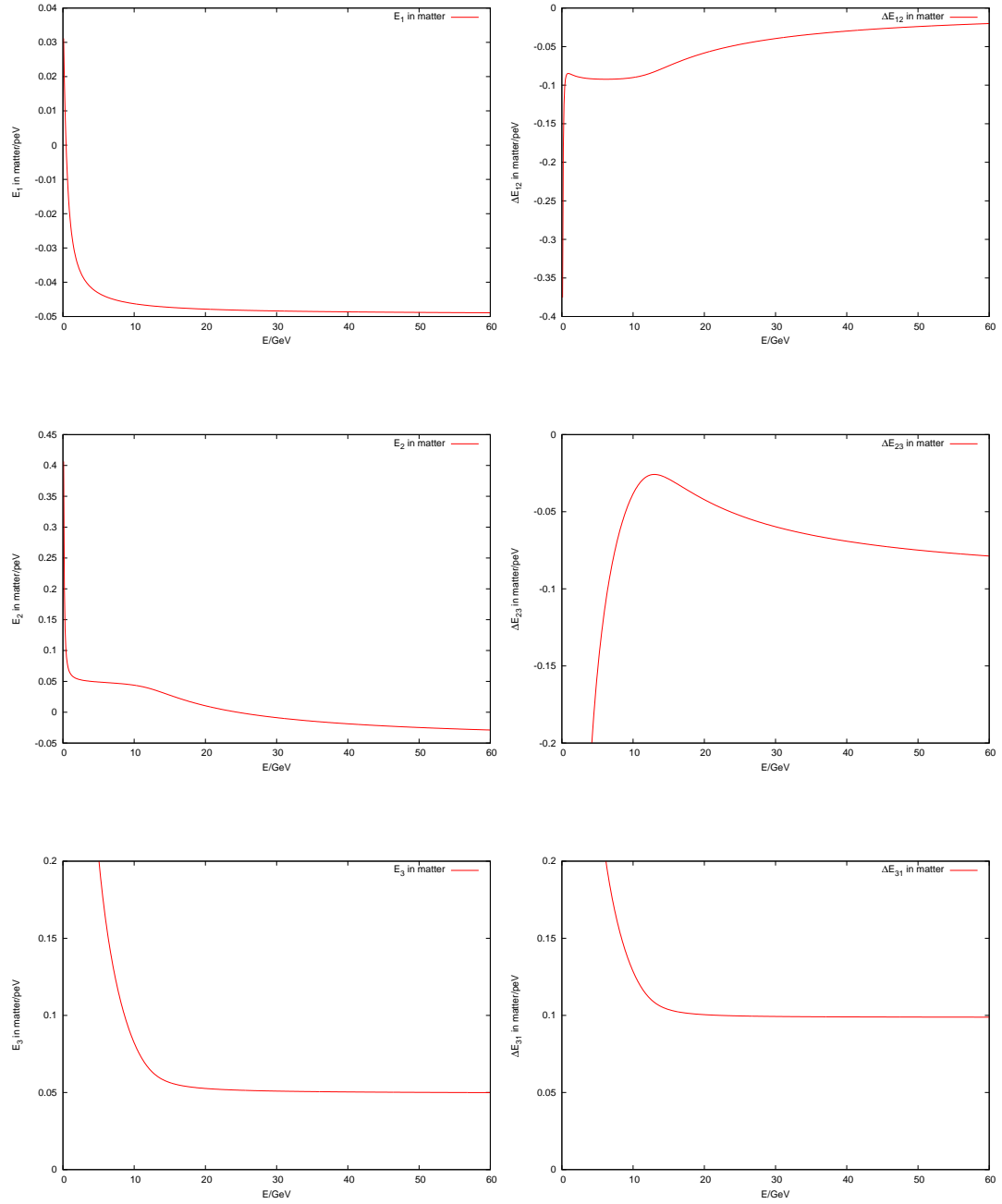


図 B.1: 左は上から  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3$ 、右は上から  $\Delta\tilde{E}_{12}, \Delta\tilde{E}_{23}, \Delta\tilde{E}_{31}$ 。

## 関連図書

- [1] G. Altarelli, M. W. Grunewald, arXiv:hep-ph/0404165v1
- [2] S. Antusch, C. Biggio, E. Fernandez-Martinez, M. B. Gavela, J. Lopez-Pavon, arXiv:hep-ph/0607020v5
- [3] E. Fernandez-Martinez, M. B. Gavela, J. Lopez-Pavon, O. Yasuda, arXiv:hep-ph/0703098v2
- [4] S. F. King, K. Long, Y. Nagashima, B. L. Roberts, O. Yasuda, arXiv:0710.4947v2[hep-ph]
- [5] A. Abda, C. Biggio, F. Bonnet, M. B. Gavela and T. Hambye, arXiv:0707.4058v2[hep-ph]
- [6] S. Geer, arXiv:hep-ph/9712290v1
- [7] G. Danby et al., Phys.Rev.Lett.9.36(1962)
- [8] M. L. Perl et al., Phys.Rev.Lett.35.1489(1975)
- [9] DONUT Collaboration (K. Kodama et al.), Phys.Lett.B504,218(2001)
- [10] KAMIOKANDE-II Collaboration (K. S. Hirata et al.), Phys.Lett.B205,416(1988)
- [11] J. N. Bahcall and M. H. Pinsonneault, Phys.Rev.Lett.92,121301(2003)
- [12] R. Davis, Jr. et al., Phys.Rev.Lett.20,1205(1968)