

# LHC 実験によるゲージヒッグス統一モデルの検証

酒井 裕企

首都大学東京 理工学研究科  
物理学専攻 素粒子理論研究室

2015 年 2 月 2 日

# 概要

素粒子の標準模型は電弱相互作用と強い相互作用に関するゲージ対称性をもとに構成されており、知られている実験と矛盾しない理論体系である。しかしながら、標準模型はすべての自然現象を説明できておらず、また、解決すべき理論的な問題も含む。そのため、標準模型よりも、より基本的な理論があると期待される。そのような基本的な理論は、標準模型を有効理論として導くべきであることから、標準模型を超える理論と呼ばれる。一般に、標準模型を超える理論が標準模型における電弱のエネルギースケールよりも非常に大きいエネルギースケールの物理であるとする、微調整問題と呼ばれる新たな問題も生まれる。したがって、この問題も解決するような標準模型を超える理論が望まれる。標準模型を超える理論の候補の一つである超対称標準模型はこの問題を解決するが、この理論で予言される超対称性粒子は発見されていない。このような背景のなか、本論文では、別の候補であるゲージヒッグス統一模型に着目した。

ゲージヒッグス統一模型は超対称性を仮定せずに微調整問題を解決するシナリオとして研究が盛んに行われている。ゲージヒッグス統一模型の考えは、高次元時空において、標準模型の電弱ゲージ場と Higgs 場が統一されるとするものである。そのため、高次元時空に標準模型の電弱ゲージ対称性の起源となる、より大きなゲージ対称性が課されることになるが、このとき、標準模型の強い相互作用に関するゲージ対称性も高次元時空に課されると考える方が、標準模型を超える理論がより基本的な理論であるとする観点から自然である。すなわちゲージヒッグス統一模型では、我々の住む 4 次元時空以外の余剰次元はコンパクト化されるが、その際に余剰次元方向に運動量をもつ Kaluza-Klein mode のグルーオンが必然的に現れることになる。余剰次元がコンパクト化されることによって現れた Kaluza-Klein mode の粒子の質量はコンパクト化スケールと場の運動方程式によって関係づけられ、コンパクト化スケールは高次元理論において非常に重要な物理量である。そのため、コンパクト化スケールに制限を与えることは、理論の検証において非常に有意義である。

本論文では、大型加速器 LHC による実験によって、5 次元時空のゲージヒッグス統一模型で予言される Kaluza-Klein mode のグルーオンを探索することで、ゲージヒッグス統一模型にかかる制限について議論する。また近い将来予定されている衝突エネルギー  $\sqrt{s} = 14$  TeV の LHC 実験について探索可能な Kaluza-Klein グルーオンの質量の上限を明らかにする。

# 目次

導入	1
第 1 章 標準模型	4
1.1 ゲージ理論	4
1.2 電弱相互作用	8
1.2.1 Brout-Englert-Higgs 機構	10
1.2.2 湯川相互作用	13
1.3 強い相互作用	14
1.3.1 漸近的自由性	15
1.3.2 カラー閉じ込めと jet	15
第 2 章 Parton Model	16
2.1 Parton Distribution Function	16
2.2 Drell-Yan process	17
2.2.1 rapidity	18
2.2.2 積分範囲	21
2.2.3 Drell-Yan process の不変質量分布 (tree level)	21
2.2.4 LHC 実験との比較	24
第 3 章 ゲージヒッグス統一模型	26
3.1 標準模型の理論的問題点	26
3.2 高次元時空理論	27
3.3 ゲージ群の破れ	28
3.4 簡単な模型 (delta 関数分布型模型)	29
3.5 湯川結合定数を再現する模型	35
3.5.1 bulk mass matrix の導入	36
3.5.2 結合定数の計算	37
第 4 章 解析	41
4.1 QCD background	41
4.2 signal-to-noise ratio	42
4.3 衝突エネルギーが 8 TeV の LHC の場合	43
4.4 衝突エネルギーが 14 TeV の LHC の場合	45

---

第 5 章	結論と議論	48
付録 A	散乱の過程	50
A.1	重心系での散乱断面積と Mandelstam 変数 . . . . .	50
A.2	深非弾性レプトン核子散乱 . . . . .	52
	謝辞	57
	参考文献	58

# 導入

素粒子論とはすべての自然現象が単一の原理によって説明できると信じ、それを究明することである。現在最も通用している素粒子の振る舞いを記述する体系とは、「素粒子の標準模型 (the Standard Model)」である [1, 2, 3]。

標準模型には物質を構成する粒子としてレプトンと呼ばれる電子 ( $e$ )、ミュー粒子 ( $\mu$ )、タウ粒子 ( $\tau$ ) とそれらに関連するニュートリノ ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ )、クォークと呼ばれるアップ粒子 ( $u$ )、ダウン粒子 ( $d$ )、ストレンジ粒子 ( $s$ )、チャーム粒子 ( $c$ )、ボトム粒子 ( $b$ )、トップ粒子 ( $t$ ) と相互作用を媒介するゲージボソンと呼ばれる光子 ( $\gamma$ )、W ボソン ( $W^\pm$ )、Z ボソン ( $Z^0$ )、グルーオン ( $g$ )、そして、標準模型で重要な役割を担う Higgs 粒子 ( $h$ ) が含まれている。素粒子の相互作用は  $SU(3)_C$  ゲージ対称性に関連する強い相互作用と  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  ゲージ対称性に関連する弱い相互作用と電磁相互作用 (併せて電弱相互作用と呼ぶ) によって記述されている。これらの素粒子を表にまとめたものが表 1 である。

		強い相互作用	電弱相互作用
媒介するゲージ粒子		$g$	$\gamma, W^\pm, Z^0$
レプトン	$e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	しない	する
クォーク	$u, d, s, c, b, t$	する	する
Higgs	$h$	しない	する

表 1 標準模型の素粒子

電弱相互作用に関する現象についての精密測定が加速器実験によって行われており、理論からの予言と非常に良く一致している [4, 5]。さらに 2012 年 7 月に大型加速器 LHC (Large Hadron Collider) [6] で Higgs 粒子が発見され [7, 8]、現行で最も受け入れられたモデルとしての地位を確立した。

この素粒子の標準模型は実験と矛盾しないにも関わらず、一方で素粒子論的に不完全であり、理論的な問題が存在する。例えば、なぜ様々な質量の値を素粒子は持つのか (質量階層性の問題) や、重力相互作用について記述されていない等、全ての自然現象が素粒子の標準模型によって説明されているわけではない。また、宇宙論的な観点からみると、観測から示唆される暗黒物質や暗黒エネルギーなどを素粒子の標準模型は説明することが出来ない。そのため、標準模型は何かより基本的な理論の有効理論であると期待される。しかし、より基本的な、新しい物理が電弱相互作用のエネルギースケールよりも高いスケールにあるとすると、Higgs 粒子の質量が量子補正に対して不安定であることから起因する理論的な問題が起こる。これを微調整問題と呼ぶ。新しい物理の理論ではこの問題も解決されることが望ましい。この微調整問題から由来する新しい物理への指針を提唱し

たのは't Hooft である [9]。<sup>\*1</sup>

この微調整問題の解決を目指した基本的な理論としてのいわゆる、「標準模型を超える理論 (Beyond the Standard Model)」がいくつも提唱されてきた。しかしながら、現在の実験結果から、数多く存在する標準模型を超える理論のうちどの理論を自然が選んでいるのかを決定する証拠は見つかっていない。それは理論を直接検証することができるエネルギースケールに、加速器の到達可能なエネルギーが達していないからである。理論と実験の乖離が現在の解決すべき物理学の課題の一つであるとも言える。

そのような背景において、現行の実験結果から標準模型を超える理論にどのような制限がかかる可能性があるのかを議論することは非常に有意義である。

標準模型を超える理論の中でも、超対称性を理論に課す模型についてはよく議論されているが、本論文では超対称性を課すこと無く微調整問題を解決することができるシナリオである「ゲージヒッグス統一模型 (Gauge-Higgs Unification Model)」 [11, 12, 13, 14] に着目する<sup>\*2</sup>。ゲージヒッグス統一模型は Higgs 粒子の起源や質量階層性の由来を説明しているという点で、他の標準模型を超える理論とは一線を画しており、その有力な候補であると言える。この模型については第 3 章でレビューをするが、ゲージヒッグス統一模型は 4 次元時空の他に空間を余剰次元として導入する高次元時空の理論である。

ゲージヒッグス統一模型では高次元時空において、標準模型の電弱ゲージ場と Higgs 場が統一されるが、このとき高次元時空に標準模型の電弱ゲージ対称性の起源となる、より大きなゲージ対称性が課される。余剰次元をある非自明な境界条件付きでコンパクト化することによって、高次元に用意されたより大きなゲージ対称性は標準模型の電弱ゲージ対称性へと遷移する。そのため、ゲージヒッグス統一模型の研究は電弱相互作用に関連したものが数多くされてきているが [16, 17, 18, 19]、強い相互作用に関連した研究は比較的少ない。

高次元時空に電弱相互作用に関するゲージ対称性が課される一方で、強い相互作用に関するゲージ対称性についても高次元時空に課されるとした方が、4 次元時空にのみ課される理由も無く、ゲージヒッグス統一模型がより基本的な理論であるべしとする観点からも自然であると言える。このため、余剰次元のコンパクト化に伴い、標準模型にはない新粒子として余剰次元方向に運動量をもった Kaluza-Klein mode のグルーオンが必然的に予言される。高次元時空の理論において、余剰次元の大きさは様々な物理量と関連しており、模型を特徴付けている重要な量であると言っても過言ではない。Kaluza-Klein mode の粒子の 4 次元時空における質量は余剰次元の大きさと場の運動方程式によって関連づけられているため、Kaluza-Klein mode の粒子を探索することによって余剰次元の大きさに制限を付けることができる。

本論文では、ゲージヒッグス統一模型の検証において、探索すべき新粒子として強い相互作用を媒介する粒子、グルーオンの Kaluza-Klein mode の粒子を選んだ。なぜなら、この粒子は大型加速器 LHC での探索に適した粒子であるからである。LHC の実験では陽子を加速し正面衝突させるが、加速されて高エネルギーになった陽子は、第 2 章で説明する parton model を応用させることができ、あたかも構成粒子であるクォーク同士の衝突とみなすことができる。クォークはグルーオンを介して強い相互作用をする。そのため LHC ではグルーオンを含む強い相互作用の過程を数多く観測することが可能になり、グルーオンの Kaluza-Klein mode の粒子の探索において有利になる。

<sup>\*1</sup> しかし、一方で現行の LHC の実験結果からのもはや指導原理とすべきであるかという疑問も提唱されている [10]。

<sup>\*2</sup> 超対称性を課したゲージヒッグス統一模型 [15] というものも存在する。

本論文の構成は以下の通りである。まず、第 1 章で素粒子の標準模型について概観し、第 2 章で高エネルギーのハドロン物理の解析に必要な道具立てとして、parton model について説明をする。そして、第 3 章ではゲージヒッグス統一模型のうち、まず簡単な模型について紹介し、次に質量階層性を再現出来る模型について議論する。第 4 章では現在の LHC 実験の再現をし、ゲージヒッグス統一模型で予言される物理過程と parton model を応用することによって、現在の LHC の実験からゲージヒッグス統一模型にどのような物理的な制限がかかるのかを議論する。また近い将来予定されている LHC 実験において探索可能な Kaluza-Klein mode のグルーオンの質量の上限について議論する。そして、第 5 章は結論と議論に費やす。

# 第 1 章

## 標準模型

標準模型には強い相互作用と電弱相互作用が素粒子の相互作用として含まれている。それらの相互作用はゲージ理論で記述されている。この章ではゲージ理論について概説した後、系の Lagrangian 密度を書き下す。まず電弱相互作用の部分についてまとめておき、Higgs 場を導入する理由とその役割を概観した後、強い相互作用の部分について簡単に触れることにする。

### 1.1 ゲージ理論

ゲージ理論とは、相対論的場の量子論にゲージ不変性（対称性）を課したものである。量子力学において観測が可能な量は、波動関数の絶対値の 2 乗であり、波動関数の位相は不定である。そのため、位相の変換に対して系の作用は不変である。ゲージ不変性とはこのような位相変換に対する不変性をより一般的にしたものである。

理論に時空に依存するような局所的なゲージ不変性を課すとゲージ場が自然に導入され、ゲージ場と物質場の相互作用が一意的に決まる。実際に知られている素粒子の相互作用を再現するように、ゲージ対称性を理論に課すことによって、それを含んだ現象論を作ることが出来る。まずはゲージ不変性について述べる。

ゲージ不変性  例えば  $N$  成分 Dirac 場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i \quad (1.1.1)$$

と与えられる。ここで

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \ \bar{\psi}_2 \ \cdots \ \bar{\psi}_N),$$

で  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ 、 $\gamma^\mu$  は Dirac の  $\gamma$ -行列である。本論文では、自然単位系  $c = \hbar = 1$  を用いる。4 次元テンソルの添字はギリシャ文字  $\mu, \nu, \rho, \dots$  で、3 次元空間成分の添字はラテン小文字  $i, j, k, \dots$ 、高



次元の添字はラテン大文字  $M, N, L, \dots$  で表す:

$$\begin{aligned} \text{4元ベクトル } x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i) = (t, \mathbf{x}) \\ \text{計量 } g_{\mu\nu} &: g_{00} = +1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \text{ 他は } 0 \\ \text{内積 } a \cdot b &\equiv ab \equiv a_\mu b^\mu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \\ \text{微分 } \partial_\mu &\equiv \partial/\partial x^\mu. \end{aligned}$$

また、添字の繰り返しがあつた場合は和の記号を省略するという Einstein の規約を用いることにする。

さて、Dirac の  $\gamma$ -行列は

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} \quad (1.1.2)$$

の代数を満たす任意の行列である。ここで、 $\mathbf{1}$  は単位行列である。 $\psi$  に対する大域的な、時空に依存しないようなユニタリー変換  $\psi \rightarrow \psi' = U\psi$  によって Dirac 方程式は

$$(iU^{-1}\gamma^\mu U\partial_\mu - m)\psi' = 0$$

となり、新たに  $\gamma^{\mu'} = U^{-1}\gamma^\mu U$  と選べば、Dirac 方程式の形は変わらない。したがって、代数 (1.1.2) を満たす  $\gamma$ -行列の表現として、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i \text{ は Pauli 行列 (後述)} \quad (1.1.3)$$

と選ぶことが出来る。これは Weyl 表現、または chiral 表現と呼ばれる。また 4 成分スピノール  $\psi$  の上 2 つと下 2 つの成分にわけてそれぞれ

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_l \end{pmatrix}$$

と表す。右手型  $\psi_r$ 、左手型  $\psi_l$  は 2 成分スピノールであり、これらは Weyl スピノールと呼ばれる。

便利のため、新たに  $\gamma^5$  なるものを以下のように定義する。

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 \equiv \gamma_5$$

すると

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$$

となる。この  $\gamma^5$  を用いて、次のような射影演算子を定義する。

$$P_L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad P_R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2}.$$

すると

$$P_{L,R}^2 = P_{L,R}, \quad P_L P_R = 0, \quad P_L + P_R = 1$$

であり、さらに

$$P_L \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_l \end{pmatrix} \equiv \psi_L, \quad P_R \psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \psi_R$$

となる。こうすれば明らかに

$$\gamma^5 \psi_L = -\psi_L \quad , \quad \gamma^5 \psi_R = \psi_R$$

という固有値方程式を与える。 $\psi_L$  と  $\psi_R$  は連続的な Lorentz 変換で混ざることはない。

さて、Lagrangian 密度 (1.1.1) は一般の  $N \times N$  ユニタリー行列  $U$  による  $N$  成分の場の間の回転

$$\begin{aligned} \psi'_i(x) &= U_i^j \psi_j(x) \\ &= [\exp(i\theta_a T_a)]_i^j \psi_j(x) \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

の下で明らかに不変である。一般に  $\mathcal{L}$  を不変に保つ変換を 2 度行っても  $\mathcal{L}$  は不変であるから、そのような系の対称性の変換は群をなす。今の場合、 $N \times N$  ユニタリー行列のなす群なので  $U(N)$  群と呼ばれ、 $\theta_a$  は実の変換パラメタ、 $T_a$  は無限小変換の生成子 (generator) と呼ばれる。 $T_a$  は  $N \times N$  エルミート行列であることがわかるので、独立な生成子は  $N^2$  個あり、これがそのまま群の次元として定義される。

$T_a$  の規格直交化を以下のように定義する:

$$\text{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}.$$

$N = 2$  のとき、生成子  $T_a$  は

$$T_a = (T_0, \frac{1}{2} \sigma_\alpha) = \frac{1}{2} (\mathbf{1}, \sigma_\alpha) \quad , \quad a = 0, 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (1.1.5)$$

ここで、 $\mathbf{1}$  は単位行列であり、 $\sigma_\alpha$  はよく知られた Pauli 行列である:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$N = 3$  のとき、生成子  $T_a$  は

$$T_a = (T_0, \frac{1}{2} \lambda_\alpha) = (\frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{1}, \frac{1}{2} \lambda_\alpha) \quad , \quad a = 0, 1, \dots, 8, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 8$$

であり、 $\lambda_\alpha$  はよく知られた Gell-Mann 行列である:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = 1, 2, 3 \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

単位元に比例したもの ( $T_0$ ) を除く  $N^2 - 1$  個の生成子  $T_\alpha$  はトレースが 0 になるため、それらをつくる元  $\exp(i\theta_\alpha T_\alpha)$  は行列式が 1 の特殊ユニタリー群  $SU(N)$  を張る。

一般に群  $G$  の生成子  $T_a$  は特定の交換関係

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (1.1.6)$$

を満たし、係数  $f_{abc}$  は群  $G$  の構造定数 (structure constant) と呼ばれる。

今、実の変換パラメタ  $\theta_a$  が時空に依存する関数  $\theta_a(x)$  であるとし、局所変換

$$\begin{aligned}\psi'_i(x) &= U_i^j(x)\psi_j(x) \\ &= [\exp(ig\theta_a(x)T_a)]_i^j\psi_j(x)\end{aligned}\quad (1.1.7)$$

を行っても理論は不変であると要求する。今、結合定数  $g$  だけ  $\theta$  をリスケールした。つまり、場の各時空点で独立に内部座標軸を設定できると要求する。すると点  $x$  における  $\psi_i(x)$  を無限小離れた点  $x + dx$  へ平行移動したものの  $\psi_{\parallel i}(x + dx)$  は、内部座標軸の無限小回転を指定する量（行列） $A_\mu = (A_\mu)_i^j$  を用いて

$$\psi_{\parallel i}(x + dx) = \psi_i(x) + ig(A_\mu)_i^j(x)\psi_j(x)dx^\mu$$

と定義される。このときの  $A_\mu$  がゲージ場と呼ばれ生成子  $T_a$  の線形結合で与えられる:

$$(A_\mu)_i^j(x) = \sum_a A_\mu^a(x)(T_a)_i^j$$

点  $x$  から点  $x + dx$  に平行移動された  $\psi_{\parallel i}(x + dx)$  もそもそも点  $x + dx$  にある  $\psi_i(x + dx)$  も局所変換 (1.1.7) をするので、もちろんその差

$$\begin{aligned}\psi_i(x + dx) - \psi_{\parallel i}(x + dx) &= \left( \partial_\mu \psi_i(x) - ig(A_\mu)_i^j(x)\psi_j(x) \right) dx^\mu \\ &\equiv D_\mu \psi_i(x) dx^\mu\end{aligned}$$

も  $U_i^j(x + dx)$  によって変換する。従って、

$$(D_\mu \psi)'(x) = U(x)D_\mu \psi(x)\quad (1.1.8)$$

となり、 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$  を共変微分演算子という。 $D_\mu$  だけでは変換則 (1.1.8) から

$$D_\mu(x) \longrightarrow D'_\mu(x) = U(x)D_\mu(x)U^{-1}(x)$$

と変換することがわかり、すなわち、ゲージ場は

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = \frac{i}{g}U(x)(\partial_\mu U^{-1}(x)) + U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x)\quad (1.1.9)$$

と変換される。変換 (1.1.7) と (1.1.9) を併せて、局所ゲージ変換と呼ぶ。変換則をみると、局所ゲージ変換に対して不変な Lagrangian 密度を書き下すには (1.1.1) において微分を共変微分に置き換えればいいことがわかる。Dirac 場の Lagrangian 密度から始めたが、scalar 場の時も同じ結論に行き着く。

次にゲージ場の運動項や自己相互作用を導く場の強さ（field strength）と呼ばれる量を定義する。先ほど  $\psi(x)$  を点  $x$  から点  $x + dx$  へ平行移動させたものと、そもそもその点  $x + dx$  での  $\psi(x + dx)$  がそれぞれ共变的であるが故、その差も共变的であるということから共変微分を定義した。今、もう1段階の平行移動を考える。すなわち、 $\psi(x)$  を点  $x$  から点  $x + dx + dy$  へ平行移動させる。このとき2通りの経路を考える。ひとつ目の経路は、 $\psi(x)$  を点  $x$  から点  $x + dx$  へ平行移動させ、それから点  $x + dx + dy$  へ平行移動させる経路である。もうひとつは順序がその逆で、 $\psi(x)$  を点  $x$  から点  $x + dy$  へ平行移動させ、それから点  $x + dx + dy$  へ平行移動させる経路である。これらの経路を

平行移動してきた  $\psi$  は共に点  $x + dx + dy$  での共変な量であるから、その差  $\Delta\psi(x)$  も当然共変な量である。交換関係 (1.1.6) があることに注意して計算すると

$$\Delta\psi(x) = [D_\mu, D_\nu]\psi(x)dx^\mu dy^\nu \rightarrow (\Delta\psi)'(x) = U(x + dx + dy)\Delta\psi(x) \simeq U(x)\Delta\psi(x)$$

となる。最後の变形では  $\Delta\psi$  が既に2次の微小量であることを用いた。ここで現れた交換子を

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (1.1.10)$$

とあらわしたときの  $F_{\mu\nu}$  が場の強さと呼ばれるものである。ここで  $g$  は相互作用の係数となるので結合定数と呼ばれる。  $F_{\mu\nu}$  は

$$(\Delta\psi)'(x) = \frac{g}{i}F_{\mu\nu}\psi(x)dx^\mu dy^\nu$$

と局所変換 (1.1.7) から

$$F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}(x)U(x)^{-1}$$

と変換することがわかる。場の強さ  $F_{\mu\nu}$  もゲージ場と同様に生成子を用いて展開される:

$$(F_{\mu\nu})_i^j = \sum_a F_{\mu\nu}^a (T_a)_i^j.$$

さて、物質場  $\psi$  やゲージ場  $A_\mu$  の変換則がわかったので、一般的に局所ゲージ変換 (1.1.7)、(1.1.9) のもとで不変な Lagrangian 密度を書き下すことができる:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - V(\phi^\dagger\phi) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

ここで、場  $\phi$  は scalar 場を表しており、変換則は以下で与えられる。

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta^a(x)T^a}\phi(x). \quad (1.1.11)$$

一般の場合、生成子  $T_a$  は交換関係 (1.1.6) で与えられるように非可換であるため、(1.1.10) にあるようにゲージ場は自己相互作用をする。群が  $U(1)$  の場合、生成子がひとつしかないため可換となり、自己相互作用が起こらない。

また、ゲージ場の質量項  $m^2\text{tr}(A_\mu A^\mu)$  はゲージ場が (1.1.9) のように変換し、局所ゲージ対称性を破るため禁止される。このことは後に Higgs 場を導入するための動機のひとつになる。標準模型の Lagrangian 密度を書き下すには、電弱相互作用と強い相互作用を記述するゲージ群を指定すればよい。

## 1.2 電弱相互作用

多くの実験的、理論的研究を経て構成された標準模型に含まれている素粒子はレプトン ( $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ )、クォーク ( $u, d, s, c, b, t$ )、ゲージボソン ( $W_\mu^\pm, Z_\mu^0, A_\mu, g$ )、ヒッグスボソン ( $h$ ) である。物質粒子はレプトンとクォークであり、これらは Dirac 方程式に従うスピン  $\frac{1}{2}$  のフェルミオン場として記述される。

この節では、標準模型に含まれている電弱相互作用について概説する。電弱相互作用を記述するゲージ群は  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  であることが知られている。ここで言う  $L$  とは左手型を指しており、右手型は弱い相互作用をしないことを表している。このことからすぐにフェルミオンの質量項  $m\bar{\psi}\psi$  が  $SU(2)_L$  ゲージ不変性を破ることがわかる:

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R.$$

ここで  $\overline{\psi_{R,L}}$  は  $(P_{R,L}\psi)^\dagger\gamma_0$  を表す。右手型と左手型とで  $SU(2)_L$  変換が異なるので、あきらかにフェルミオンの質量項がゲージ不変性によって禁止される。しかし現実にはフェルミオンには質量が存在している。このことも後に Higgs 場を導入する動機になっている。

$SU(2)_L$  の基本表現として以下の 2 重項を導入する。

$$\text{レプトン } SU(2)_L \text{ 2 重項} : l_L^i = \left( \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{クォーク } SU(2)_L \text{ 2 重項} : q_L^i = \left( \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \right).$$

また右手型成分は  $SU(2)_L$  1 重項をとらねばならない。

$$\begin{aligned} \nu_R^i &= (\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}), \\ e_R^i &= (e_R, \mu_R, \tau_R), \\ u_R^i &= (u_R, c_R, t_R), \\ d_R^i &= (d_R, s_R, b_R). \end{aligned}$$

ここで  $e$  や  $\nu_e$ 、 $u$  など是对応する Dirac 場を表す。このように表されるのは、 $e, \mu, \tau$  が質量の違いを除き、互いに全く同じ性質をもっていることからきており、それが電弱相互作用において多重項の繰り返しとして反映されている。レプトンの場合もクォークの場合もこの繰り返しを世代 (generation) といい、 $i$  はどちらも 3 つ分走る。なぜ 3 つなのかという謎に標準模型は答えることができない。

レプトンやクォークの  $SU(2)_L$  2 重項において、弱い相互作用と電磁相互作用が独立でない。そこで、弱超電荷  $Q_Y = Y/2$  と呼ばれる電荷 (生成子) をもつ  $SU(2)_L$  に直交する  $U(1)_Y$  群を導入する。レプトン  $SU(2)_L$  2 重項に  $Y = -1$ 、クォーク  $SU(2)_L$  2 重項に  $Y = 1/3$  をそれぞれ付与してやれば、電磁相互作用の電荷  $Q$  は

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2} \quad (1.2.1)$$

で与えられる。つまり、電磁相互作用  $U(1)_{EM}$  の生成子は  $SU(2)_L$  の生成子  $T^3$  と  $U(1)_Y$  の生成子で与えられるものである。

右手型成分は  $SU(2)_L$  変換を受けないので、当然  $T^3$  の固有値は 0 である。つまり電荷  $Q$  と弱超電荷  $Q_Y$  が一致する。 $Q_Y$  をそれぞれ表にしたものが表 1.1 である。

以上より電弱相互作用する系の Lagrangian 密度を書き下すことができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW} &= -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &+ \bar{q}_L^i i\gamma^\mu D_\mu q_{Li} + \bar{u}_R^i i\gamma^\mu D_\mu u_{Ri} + \bar{d}_R^i i\gamma^\mu D_\mu d_{Ri} \\ &+ \bar{l}_L^i i\gamma^\mu D_\mu l_{Li} + \bar{\nu}_R^i i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{Ri} + \bar{e}_R^i i\gamma^\mu D_\mu e_{Ri}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

	$Q_Y$
$q_L^i$	1/6
$u_R^i$	2/3
$d_R^i$	-1/3
$l_L^i$	-1/2
$\nu_R^i$	0
$e_R^i$	-1

表 1.1 素粒子の弱超電荷

ここで

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\
 F_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\
 D_\mu &= \partial_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a - ig_1 Q_Y B_\mu, \\
 \bar{q}_L &= \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} q \right)^\dagger \gamma_0 \text{ etc}
 \end{aligned}$$

であり、 $\epsilon^{abc}$  は Levi-Civita 記号で  $g_1$  は  $U(1)_Y$  ゲージの結合定数、 $g_2$  は  $SU(2)_L$  ゲージの結合定数である。

前述したが、この系のゲージ場やフェルミオン場に質量項がないのは、それらがゲージ不変性を破るからである。しかし、現実的にゲージボソンやフェルミオンには質量がある。この問題を解決する仕組みについては次の節で述べることにする。

### 1.2.1 Brout-Englert-Higgs 機構

局所ゲージ不変性が自発的に破れることによって、ベクトル場が有限の質量をもつ。この機構のことを Brout-Englert-Higgs 機構（以下、Higgs 機構と呼ぶことにする。）という [20, 21]。この節ではこの機構を用いて、ゲージボソンやフェルミオンが質量を獲得する様子を見る。まず対称性の自発的破れについて説明する。

対称性の自発的破れ 例として自己相互作用する中性スカラー場を記述する Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4$$

は  $\phi \rightarrow -\phi$  変換に対して不変である。スカラー場の従うポテンシャル  $V(\phi)$  はこの Lagrangian 密度より

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4$$

である。今、 $\mu^2 > 0$  とすると、これは質量  $\mu$  のスカラー場が 4 体相互作用している理論を表している、基底状態は  $\phi = 0$  である。

一方、 $\mu^2 < 0$  のとき  $V$  の極値は

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0$$

によって与えられ、極小値は  $\phi = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v$  である。+v も -v も同じ物理を記述しているため、さしあたって +v を選び、これは真空期待値 (Vacuum Expectation Value) と呼ばれる。φ の真空からのずれを η で表す。これは真空からどれだけ励起するかを表す物理的な場である:

$$\phi(x) = v + \eta(x).$$

これによって、系の Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{2}\mu^2(v^2 + 2v\eta + \eta^2) - \frac{\lambda}{4}(v^2 + 2v\eta + \eta^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{2}(-2\mu^2)\eta^2 - \frac{1}{3}(3\lambda v)\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 + (\text{const.})\end{aligned}$$

となり、これは質量が  $\sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2}$  のスカラー場が 3 点と 4 点の自己相互作用をしている理論を記述している。この系では、 $\eta \rightarrow -\eta$  の変換に対して、不変ではなく、もともともっていた対称性が破れ、質量をもつスカラー場が現れた。ここで注目すべき点は、対称性を破るような項を加えることなく正しい真空の定義をただけである、という点である。正しい真空の定義によってもとの対称性が現実に現れないというだけであり、このような対称性の破れを「真空が対称性を破る」や「対称性の自発的破れ」という言葉で表現される。

電弱相互作用における対称性の自発的破れ では、これを電弱相互作用する系に応用した場合についてみていく。まず、複素スカラー場として  $SU(2)_L 2$  重項

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pi_1 + i\pi_2 \\ \sigma + i\pi_3 \end{pmatrix} \quad (1.2.3)$$

と\*1、ポテンシャル

$$V = -\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$$

を導入する。このポテンシャルは明らかに

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow e^{i\theta_a T_a} \Phi & SU(2)_L, \\ \Phi &\rightarrow e^{i\theta_Y Q_Y} \Phi & U(1)_Y\end{aligned}$$

の変換に対して、不変である。また場 Φ の弱超電荷は 1/2 である。

電荷 Q は現実で保存されているので、(1.2.1) で与えられるような生成子をもつ群  $U(1)_{EM}$  の対称性は残る、ということをつまえて真空を選ぶことができる。真空は電氣的に中性であるので上成分は真空期待値を持たず、さらに σ だけが真空期待値をもつように基底をとることができて

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0 &\Leftrightarrow 0 = -\mu^2 + (\pi_1^2 + \pi_2^2 + \sigma^2 + \pi_3^2)\lambda, \\ &\Rightarrow \langle \sigma \rangle = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv v\end{aligned}$$

となることから

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

\*1 + は  $Q = 1$ 、0 は  $Q = 0$  の電荷に対応している。

となる。ここで  $SU(2)_L$ ,  $U(1)_Y$ ,  $U(1)_{EM}$  について微小変換してみて、真空の対称性について調べる。

$$\begin{aligned} SU(2)_L : \sigma_1 \langle \Phi \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \\ \sigma_2 \langle \Phi \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \\ \sigma_3 \langle \Phi \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \neq 0, \\ U(1)_Y : Y \langle \Phi \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

となり、破れているが

$$U(1)_{EM} : \frac{1}{2}(\sigma_3 + Y) \langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = 0$$

となって  $U(1)_{EM}$  は破れていないことがわかる。このため、4つのゲージボソンのうち3つが質量を獲得したことになる。これは実際に以下のように計算してみてもわかる。

真空からのずれとして、Higgs 場  $h$  を導入すると

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}.$$

共変微分は

$$D_\mu \Phi = \left( \partial_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a - ig_1 Q_Y B_\mu \right) \Phi$$

で与えられ、Higgs 部分の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (1.2.4)$$

である。この第1項には、 $h$  に関して  $0 \sim 2$  次の項がある。これをそれぞれ計算してみる。

$h$  の 0 次の項

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \partial_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a - ig_1 Q_Y B_\mu \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right\}^\dagger \left\{ \left( \partial^\mu - ig_2 \frac{\sigma^b}{2} W^{\mu b} - ig_1 Q_Y B^\mu \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{8} g_2^2 v^2 (W_1^a W^{a1} + W_2^a W^{a2}) + \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} B_\mu & W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{\mu 3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

第2項をみると  $W_\mu^3$  と  $B_\mu$  が混ざっている。対称行列を対角化するように基底をとりなおすと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} g_2^2 v^2 (W_1^a W^{a1} + W_2^a W^{a2}) \\ & + \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} B_\mu & W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_1^2 + g_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{\mu 3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで  $\tan \theta_W = g_1/g_2$  を採用した。このときの  $\theta_W$  は Weinberg 角と呼ばれる。さらに

$$A_\mu \equiv B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W, \quad Z_\mu^0 \equiv -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W,$$



$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$$

とおくと、最終的に

$$\frac{1}{4}g_2^2 v^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{8}(g_1^2 + g_2^2)v^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu}$$

となる。すなわち、 $h$  の 0 次の項からはゲージボソンの質量項があらわれる。

$$m_W^2 = \frac{g_2^2}{4}v^2, \quad m_Z^2 = \frac{g_1^2 + g_2^2}{4}v^2.$$

これらをよく見ると次の関係が成り立つことがわかる。

$$\rho \equiv \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1.$$

これは  $\rho$  パラメタと呼ばれ、理論の検証に使われる。

### $h$ の 1 次、2 次の項

0 次の結果をふまえると、 $h$  の 1 次の項からは Higgs 場とゲージボソンとの 3 点相互作用、2 次の項からは 4 点相互作用と Higgs 場の運動項があらわれる。

以上の結果

$$\begin{aligned} & (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g_2^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{(g_1^2 + g_2^2)v^2}{8} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \\ &+ \frac{g_2^2 v}{2} W_\mu^+ W^{\mu-} h + \frac{(g_1^2 + g_2^2)v}{4} Z_\mu^0 Z^{0\mu} h \\ &+ \frac{g_2^2}{2} W_\mu^+ W^{\mu-} h^2 + \frac{(g_1^2 + g_2^2)}{4} Z_\mu^0 Z^{0\mu} h^2 \end{aligned}$$

となり 4 つのゲージボソンのうち 3 つ ( $W$  ボソン、 $Z$  ボソン) が質量を獲得し、残り 1 つのゲージボソン ( $A$ ) が光子とみなされることになる。はじめ、複素スカラー場が 2 つと無質量ゲージ場が 4 つあり、自由度は  $2 \times 2 + 4 \times 2 = 12$  である。対称性が破れたあとでは、スカラー場 1 つと質量をもったゲージ場が 3 つ、無質量ゲージ場が 1 つあるため自由度は  $1 + 3 \times 3 + 2 = 12$  となっていて自由度の勘定は合っており、このことからスカラー場の自由度がゲージ場の縦波成分となって、質量をもったゲージ場があらわれたと理解することができる。これが Higgs 機構の中身である。

### 1.2.2 湯川相互作用

Higgs 2 重項 (1.2.3) が導入されたことによって、以下の  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  ゲージ群による変換に対して不変な項も Lagrangian 密度に許されるようになった。これらを湯川相互作用という。 $h.c.$  はエルミート共役を表す。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= \bar{q}_L^i (g_Y^{(u)})_i^j \tilde{\Phi} u_{Rj} + \bar{q}_L^i (g_Y^{(d)})_i^j \Phi d_{Rj} \\ &+ \bar{l}_L^i (g_Y^{(\nu)})_i^j \tilde{\Phi} \nu_{Rj} + \bar{l}_L^i (g_Y^{(e)})_i^j \Phi e_{Rj} + h.c. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

ここで  $g_Y$  のことを Yukawa couplings と呼ぶ。また、

$$\tilde{\Phi}_i \equiv (i\tau_2)_{ij} \Phi^{*j}$$

と定義され、場の変換則は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \Phi' = e^{i\theta^a \frac{\sigma^a}{2}} e^{i\theta_Y/2} \Phi, \\ \tilde{\Phi} &\rightarrow \tilde{\Phi}' = e^{i\theta^a \frac{\sigma^a}{2}} e^{-i\theta_Y/2} \tilde{\Phi}\end{aligned}$$

真空期待値をとると (1.2.5) は

$$\begin{aligned}& \frac{\overline{u}_L g_Y^{(u)} v}{\sqrt{2}} u_R + \frac{\overline{u}_R (g_Y^{(u)})^\dagger v}{\sqrt{2}} u_L + \frac{\overline{u}_L g_Y^{(u)}}{\sqrt{2}} u_R h + \frac{\overline{u}_R (g_Y^{(u)})^\dagger}{\sqrt{2}} u_L h \\ & + \frac{\overline{d}_L g_Y^{(d)} v}{\sqrt{2}} d_R + \frac{\overline{d}_R (g_Y^{(d)})^\dagger v}{\sqrt{2}} d_L + \frac{\overline{d}_L g_Y^{(d)}}{\sqrt{2}} d_R h + \frac{\overline{d}_R (g_Y^{(d)})^\dagger}{\sqrt{2}} d_L h \\ & + \frac{\overline{\nu}_L g_Y^{(\nu)} v}{\sqrt{2}} \nu_R + \frac{\overline{\nu}_R (g_Y^{(\nu)})^\dagger v}{\sqrt{2}} \nu_L + \frac{\overline{\nu}_L g_Y^{(\nu)}}{\sqrt{2}} \nu_R h + \frac{\overline{\nu}_R (g_Y^{(\nu)})^\dagger}{\sqrt{2}} \nu_L h \\ & + \frac{\overline{e}_L g_Y^{(e)} v}{\sqrt{2}} e_R + \frac{\overline{e}_R (g_Y^{(e)})^\dagger v}{\sqrt{2}} e_L + \frac{\overline{e}_L g_Y^{(e)}}{\sqrt{2}} e_R h + \frac{\overline{e}_R (g_Y^{(e)})^\dagger}{\sqrt{2}} e_L h\end{aligned}\quad (1.2.6)$$

となり、フェルミオンの質量項とヒッグスボソンとの 3 点相互作用があらわれる。

最終的に電弱相互作用を記述する Lagrangian 密度は (1.2.2) (1.2.4) (1.2.5) を併せたものとなる。

### 1.3 強い相互作用

強い相互作用はカラー  $SU(3)_C$  と呼ばれるゲージ群によって記述される。これはカラーと呼ばれる内部自由度を回転させる変換である。クォークには赤 (R)、青 (B)、緑 (G) の色の区別があるとし、色空間におけるカラー 3 重項であると仮定されて

$$q = \begin{pmatrix} q_R \\ q_B \\ q_G \end{pmatrix} \quad (q = \text{quarks})$$

と表される。この局所  $SU(3)_C$  ゲージ不変な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} + \bar{q}^i i\gamma^\mu D_\mu q^i \quad (1.3.1)$$

で与えられる。共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_3 \frac{\lambda^A}{2} G_\mu^A, \quad A = 1, 2, \dots, 8$$

で  $G_\mu^A$  はグルーオンと呼ばれる無質量のゲージボソン場である。クォークとグルーオンの相互作用によって強い相互作用を記述する力学のことを量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) と呼ぶ。  $g_3$  は強い相互作用の結合定数でこれについて重要な事柄を次の節で述べる。

### 1.3.1 漸近的自由性

強い相互作用の結合定数  $g_3$  は原子核程度のスケールでは大きいため、一見して摂動論が適用できないと思われる。しかし、非可換なゲージ理論には、物質場の数によっては、結合定数が高エネルギーの領域で 0 になるという性質があり、このことを漸近的自由性 (Asymptotic freedom) という。量子効果によってあられる高次の項の発散を処理するために正則化と繰り込みと言われる処方を施さなければならないが、その過程でエネルギースケールが導入され、結合定数はエネルギー依存性をもつのである。

実際に結合定数のエネルギー依存性は

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{(11 - 2n_F/3) \ln(Q^2/\Lambda^2)}$$

とわかり、ここで  $n_F$  はクォークの種類の数、 $\Lambda$  は QCD の典型的なエネルギースケールである。おおよそ  $\alpha_s$  は  $(\ln Q^2)^{-1}$  で 0 に向かう。このことから、運動量遷移の大きな深非弾性散乱においては摂動計算が妥当となる。したがって複合粒子であるハドロンを自由粒子のように振る舞うクォーク場やグルーオン場によって記述することができ、ハドロンをこのように取り扱うモデルを parton model といい、これについては章をあらためて概観することにする。

### 1.3.2 カラー閉じ込めと jet

実験ではカラー自由度をもたない、カラー 1 重項の状態のみが観測される。このことから、漸近状態では QCD の非摂動的な効果によって、カラー自由度をもった状態では物理的状态として存在し得ないのではないかと「カラー閉じ込め (color confinement) の問題」が提起される。この問題は完全に解決されていないが、至極直感的な解釈をすることができる。

クォークやグルーオンの間の相互作用の大きさは結合定数のエネルギー依存性から、長距離にいくとそれだけ大きくなるのがわかる。これはあたかもクォーク間ではねやひもがつながれているといった描写として解釈することができる。そのため長距離になればなるだけ、大きなエネルギーが必要になる、と予想される。

例えば、中間子を構成しているクォークと反クォークを引き伸ばすとそのために必要なエネルギーが、あるところで新たな中間子を作るエネルギーを超えてしまう。つまりクォークと反クォークを作り、そのときにもとのクォークと反クォークを組になって 2 つの中間子を作る方がエネルギー的に有利になる。クォークが単体で取り出せないと言うのは以上のように直感的に解釈される。

この現象が起きていることにより、クォークが単独で観測されるということはなく、カラー荷が 0 のハドロンの集まりとなって観測される。このハドロンの集まりのことを jet と呼ぶ。

## 第 2 章

# Parton Model

標準模型の強い相互作用に特徴的な漸近的自由性のために、高エネルギースケールではハドロンを自由に運動する構成粒子、parton、の複合体として取り扱う事が出来る parton model と呼ばれる模型がある。parton とは Richard P. Feynman が名付けたものであり、現在では通常、クォークやグルーオンのことを指す。この模型を用いて、ある過程の散乱断面積を計算した結果と実験結果が一致すれば、その模型のひとつの検証となると言える。ひいては場の理論における繰り込み理論の検証にもなっていると言える。

まずは、parton model において重要な役割を担う parton distribution function について説明した後、この模型が Drell-Yan process と呼ばれる散乱過程をよく説明していることを確認する。

### 2.1 Parton Distribution Function

parton model とは前述の通り、高エネルギーで運動するハドロンは構成要素 parton の複合体であり、それらが自由に運動しているとみなすものである。そこで parton  $i$  の 3 次元運動量  $\mathbf{p}_i$  を

$$\mathbf{p}_i = \xi_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}, 0 \leq \xi_i \leq 1$$

とする。  $\xi_i$  はハドロンの 3 元運動量の運動量割合 (momentum fraction) で、  $P$  はハドロンの運動量である。つまり、  $\xi$  は parton  $i$  がハドロンの運動量  $P$  のうちどれだけを担っているかを表している。

特に parton とハドロンの質量を無視できるような高エネルギー極限では

$$p_i^\mu = \xi_i P^\mu$$

を満たす。

またハドロン内の parton  $i$  が運動量割合  $\xi_i$  を持つ確率を  $N_i(\xi_i)d\xi_i$  で表し、関数  $N_i(\xi_i)$  は parton distribution function と呼ばれる。勿論、parton distribution function は対象とするハドロンによって異なるが、本論文では特に陽子の parton distribution function のことを指すことにする。正味の  $u$ -クォーク、 $d$ -クォークの数がそれぞれ 2 つと 1 つになるように parton distribution function は規格化される必要がある:

$$\int_0^1 d\xi [N_u(\xi) - N_{\bar{u}}(\xi)] = 2, \quad \int_0^1 d\xi [N_d(\xi) - N_{\bar{d}}(\xi)] = 1.$$

また、parton によって運ばれる運動量の合計は陽子のそれと一致しなければならないので

$$\int_0^1 d\xi \xi [N_u(\xi) + N_d(\xi) + N_{\bar{u}}(\xi) + N_{\bar{d}}(\xi) + N_g(\xi)] = 1$$

も制限として課される。ここで、 $s$ -クォークよりも重いクォークは無視した。これらの制限を満たしつつ、parton distribution function はエネルギースケールに依存する。図 2.1 はエネルギースケール

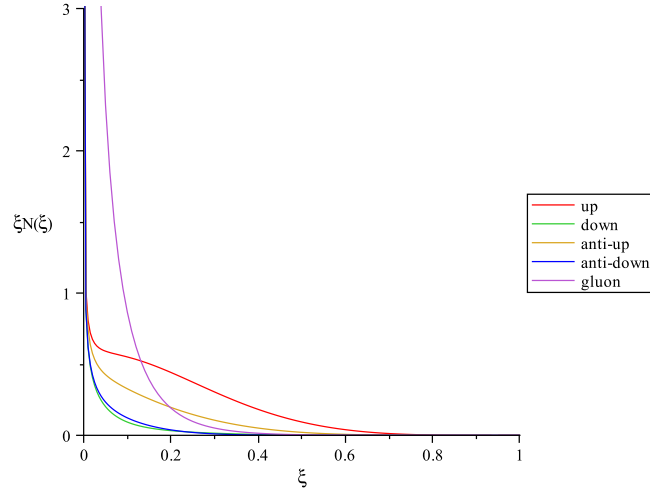


図 2.1 エネルギースケールが 500GeV のときの parton distribution function に運動量割合を掛けた  $\xi N(\xi)$  をプロットしたものである。Alan Martin , James Stirling , Robert Thorne , Graeme Watt たちによって与えられているデータを用いた。縦軸が  $\xi N(\xi)$  で横軸が  $\xi$  である。

ルが 500GeV のときの parton distribution function に運動量割合を掛けた  $\xi N(\xi)$  をプロットしたものである。これらの関数を parton 毎に運動量割合で積分した値から、ハドロンの運動量のうちどれだけの割合をその parton が担っているかがわかる。この場合

$$\int_0^1 d\xi \xi [N_u(\xi) + N_d(\xi) + N_{\bar{u}}(\xi) + N_{\bar{d}}(\xi)] = 0.37,$$

$$\int_0^1 d\xi \xi N_g(\xi) = 0.63$$

となり、陽子の運動量を主に運んでいるのは gluon であることがわかる。parton model において、各素過程に parton distribution function で重みをつけて足し合わせた散乱断面積が構成されている粒子の衝突を記述する散乱断面積であるとみなす。

## 2.2 Drell-Yan process

陽子-反陽子の衝突からレプトン対が生成される過程

$$p(P_1) + \bar{p}(P_2) \longrightarrow \mu^-(k_1) + \mu^+(k_2) + X$$

について、parton model を用いて散乱断面積を計算する。まず、素過程  $q\bar{q} \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^-\mu^+$  によって、この過程が起こるとする。この過程における摂動の最低次の Feynmann diagram を図 2.2 に示した。

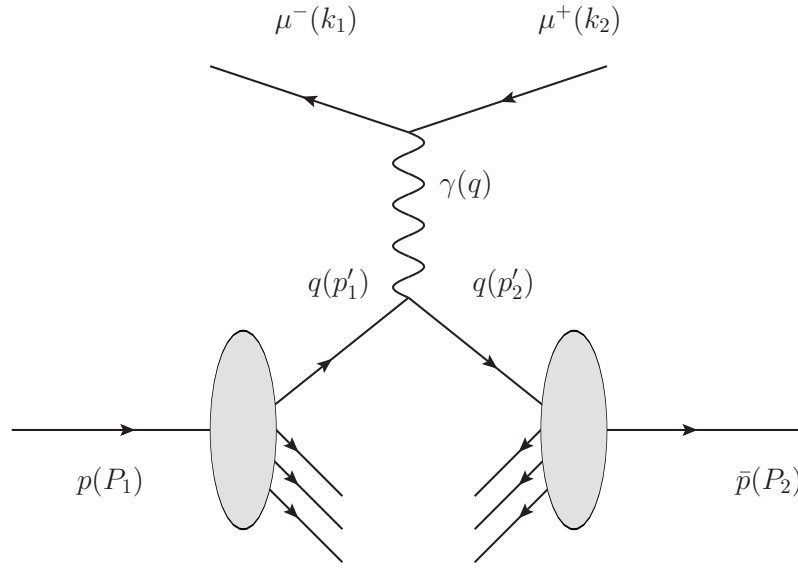


図 2.2 Drell-Yan process

ハドロン-ハドロン衝突において、ハドロン重心系をとったとしても、それらを構成する parton の衝突する素過程は一般には重心系ではなく、幾分 boost された系での衝突を観測することになる。なぜなら、parton model の仮定よりクォークと反クォークはそれぞれ、

$$\begin{aligned} p_1'^{\mu} &= \xi_1 P_1^{\mu}, \\ p_2'^{\mu} &= \xi_2 P_2^{\mu} \end{aligned}$$

といった異なる 4 元運動量をもつからである。これらの  $\xi_1, \xi_2$  によって、素過程が起きた系が重心系からどれだけ衝突軸にそって boost された系であるかを決定する。この過程に対し、parton model を用いて計算するとは、素過程の微分散乱断面積  $d\sigma(q_i + \bar{q}_i \rightarrow \mu^- + \mu^+)$  を計算し、始状態の parton  $i(= u, d)$  について parton distribution function をふまえて足し合わせ、それらの散乱断面積の合計を Drell-Yan process の散乱断面積  $d\sigma(p + \bar{p} \rightarrow \mu^- + \mu^+ + X)$  とみなすことである。したがって、ハドロン-ハドロン衝突に対する微分散乱断面積を計算するにはとり得る運動量割合で積分しなければならない。また起こりうる素過程を足し合わせるには素過程の始状態について可能な parton で足し合わせる必要がある。しかし  $\xi_1, \xi_2$  は直接観測できる量ではない。かわりに rapidity という量を定義する。

### 2.2.1 rapidity

質量  $m$  の粒子の静止系を Lorentz boost してみる。1 軸に沿って boost すると

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y_0 & \sinh y_0 \\ \sinh y_0 & \cosh y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cosh y_0 \\ m \sinh y_0 \end{pmatrix}.$$

ここから、 $y_0$  について解くと

$$y_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{p^0 + p^1}{p^0 - p^1} \tag{2.2.1}$$

となり、この量のことを rapidity という。静止系では、rapidity は 0 になる。粒子がある運動をしている系から、別の運動している系へ 1 軸に沿って Lorentz boost をして移り変われるとすると、そのとき rapidity  $y_0$  は線形変換を受けることがわかる：

$$\begin{pmatrix} p'^0 \\ p'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \cosh \phi + p^1 \sinh \phi \\ p^0 \sinh \phi + p^1 \cosh \phi \end{pmatrix}$$

なので

$$y'_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{p'^0 + p'^1}{p'^0 - p'^1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p^0 + p^1 e^\phi}{p^0 - p^1 e^{-\phi}} = y_0 + \phi.$$

となる。

以降、高エネルギー極限において 2 体散乱する素過程を考える。散乱過程の終状態の粒子 1、粒子 2 の rapidity  $y_1, y_2$  はそれぞれ

$$y_1 \sim \frac{1}{2} \ln \frac{E + E \cos \theta}{E - E \cos \theta} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta},$$

$$y_2 \sim \frac{1}{2} \ln \frac{E' - E' \cos \theta'}{E' + E' \cos \theta'} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos \theta'}{1 + \cos \theta'}$$

である。ここで、 $\theta, \theta'$  はそれぞれ終状態の粒子 1, 2 の、衝突軸とのなす散乱角である。これらを用いて

$$\frac{y_1 + y_2}{2} \equiv Y \quad (2.2.2)$$

のような量を定義すると重心系 ( $\theta = \theta'$ ) では  $Y = 0$  となり、また boost すると

$$Y' = \frac{y'_1 + y'_2}{2} = \frac{y_1 + \phi + y_2 + \phi}{2} = Y + \phi$$

と線形変換を受けることがわかる。したがって  $Y$  は見ている素過程での散乱する系が重心系からどれくらい boost されたかという量を表している。

さらに、粒子 1 の rapidity  $y_1$  は

$$y_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} = -\ln \tan \frac{\theta}{2}$$

となり、高エネルギー極限では散乱角度にのみ依存する "pseudorapidity" と呼ばれるものと一致する。

以上のことから高エネルギー極限では、粒子 1、2 の散乱角度を観測することによって、重心系からどれだけ衝突軸にそって boost された系での散乱過程だったのかがわかる。先の見ている系が重心系からどれくらい boost されたかという量を表している  $Y$  を観測するには、粒子 1、2 の散乱角度を観測し (2.2.2) 式を計算すればよいことになる。

運動量割合  $\xi_1, \xi_2$  と rapidity の和  $Y$  との関係 次に、運動量割合  $\xi_1, \xi_2$  と rapidity の和  $Y$  との関係を求める。観測するのは偏った運動量をもった parton の衝突過程であるため、重心系から衝突軸に沿って boost された系で考えなければならない。そこで virtual photon を重心系から、衝突軸  $x^1$  に沿って  $k^\mu = \xi_1 P_1^\mu + \xi_2 P_2^\mu$  という運動量を持つような系へ boost することを考える。ただし、

ここで  $P_1^\mu, P_2^\mu$  は陽子、反陽子の運動量である:

$$\begin{aligned} P_1^\mu &= (P_1^0, \mathbf{P}_1) = (\sqrt{|\mathbf{P}_1|^2 + m_1^2}, \mathbf{P}_1) \sim (|\mathbf{P}_1|, \mathbf{P}_1), \\ P_2^\mu &= (P_2^0, \mathbf{P}_2) = (\sqrt{|\mathbf{P}_2|^2 + m_2^2}, \mathbf{P}_2) \sim (|\mathbf{P}_2|, \mathbf{P}_2). \end{aligned}$$

重心系では  $\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{cm}$  となる。

また Mandelstam 変数 (付録参照) を計算すると Lorentz 不変な量だったので

$$s = (P_1^\mu + P_2^\mu)^2 = P_1^2 + 2P_1 \cdot P_2 + P_2^2 \sim 2P_1 \cdot P_2 = 4|\mathbf{P}_{cm}|^2$$

となる。クォークと反クォークの対消滅であらわれた virtual photon を衝突軸に沿って、重心系から boost する。

$$\begin{pmatrix} \sqrt{M^2 + k^2} \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh Y & \sinh Y & 0 & 0 \\ \sinh Y & \cosh Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで  $M$  は不変質量 (invariant mass) で

$$M^2 = \hat{s} = (\xi_1 P_1^\mu + \xi_2 P_2^\mu)^2$$

と素過程における終状態の parton の運動量の和の 2 乗で与えられる。したがって、高エネルギー極限では

$$M^2 = \hat{s} = (\xi_1 P_1 + \xi_2 P_2)^2 \sim 2\xi_1 \xi_2 P_1 \cdot P_2 = \xi_1 \xi_2 s$$

という関係が得られる。

また (2.2.2) 式より、 $\xi_1, \xi_2$  と  $Y$  とがある関係式に従うことがわかる。陽子反陽子衝突軸に沿って  $\mathbf{P}_{cm}$  をとると、この関係式は以下のように確かめられる:

$$k^\mu = \xi_1 P_1^\mu + \xi_2 P_2^\mu \Rightarrow |\mathbf{k}| = k = (\xi_1 - \xi_2)|\mathbf{P}_{cm}| = M \sinh Y.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{e^Y - e^{-Y}}{2} &= (\xi_1 - \xi_2) \frac{|\mathbf{P}_{cm}|}{M} = (\xi_1 - \xi_2) \frac{|\mathbf{P}_{cm}|}{\sqrt{\xi_1 \xi_2 s}} \\ &= (\xi_1 - \xi_2) \frac{1}{2\sqrt{\xi_1 \xi_2}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2}} - \sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1}} \right), \end{aligned}$$

$$\therefore e^Y = \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2}} = \xi_1 \frac{\sqrt{s}}{M}, \quad (2.2.3)$$

$$\therefore \xi_1 = \frac{M}{\sqrt{s}} e^Y, \quad \xi_2 = \frac{M}{\sqrt{s}} e^{-Y}$$

条件  $0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < 1$  より、 $Y$  の取り得る値は

$$-\ln \frac{\sqrt{s}}{M} < Y < \ln \frac{\sqrt{s}}{M}$$



となる。

また一方で

$$\frac{y_1 - y_2}{2} \equiv y$$

と定義された量は、boost すると

$$y' = \frac{y'_1 - y'_2}{2} = \frac{y_1 + \phi - y_2 - \phi}{2} = y$$

となり、Lorentz 不変な量とわかる。したがって、その代表として重心系の値をとってもよい。すると、

$$y = \frac{y_1^{\text{cm}} - y_2^{\text{cm}}}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) = y_1^{\text{cm}}$$

となることから、終状態の粒子がもつ衝突軸と垂直方向の運動量 (transverse momentum)  $p_T$  を  $y$  で表すことができる:

$$\begin{aligned} p_T &= p \sin \theta \\ &= \frac{M}{2} \sqrt{1 - \cos \theta} = \frac{M}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \right)^2} \\ &= \frac{M}{2} \frac{1}{\cosh y}. \end{aligned}$$

### 2.2.2 積分範囲

先の  $\xi_1, \xi_2$  の範囲の他に、実験では rapidity の cut や横方向運動量 (transverse momentum) の cut などがある。衝突軸からの散乱角が小さいような、いわゆる「かすり散乱」はほとんどが運動量遷移の小さな非摂動 QCD のイベントであり、新粒子探索を念頭に置いた場合、このかすり散乱によるイベントは取り除かなければならない。したがって、大角度散乱のイベントを抜き出すために、観測する散乱角に制限をかける。また、横方向運動量  $p_T$  にも下限値を与える。これらはかすり散乱のうち、散乱角が大きいイベントを取り除くためである。これは高エネルギー極限では、すなわち rapidity に制限をかけることになる。積分領域を図に表すと図 2.3 のようになる。

この領域内で 2 つの変数について 2 重積分をすることによって不変質量分布を得ることができる。

### 2.2.3 Drell-Yan process の不変質量分布 (tree level)

始めに、 $q(p'_1) + \bar{q}(p'_2) \rightarrow \mu^-(k_1) + \mu^+(k_2)$  の過程に対する散乱断面積を計算する。この不変散乱振幅は

$$\mathcal{M} = -e^2 Q_q \bar{v}(p'_2) \gamma_\mu u(p'_1) \frac{1}{q^2} \bar{u}(k_1) \gamma^\mu v(k_2)$$

で与えられる。ここで  $Q_q$  はクォークの電荷である。初状態においてスピンやカラーの平均をとることなどをふまえると、不変散乱振幅の 2 乗は式 (A.1.1) や  $q^2 = (p'_1 + p'_2)^2$  となることをふまえて

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4}{3} \frac{e^4 Q_q^2}{q^4} \times 2 \{ (p'_1 \cdot k_1)(p'_2 \cdot k_2) + (p'_1 \cdot k_2)(p'_2 \cdot k_1) \} \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^4 Q_q^2}{\hat{s}^2} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) \end{aligned}$$

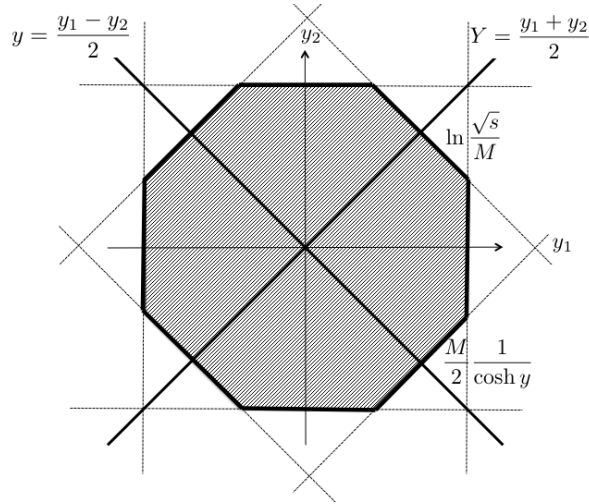


図 2.3 積分領域:太線で囲まれた内側の斜線領域が積分領域

となる。ただし、クォークやレプトンの質量を無視し、parton の Mandelstam の変数には記号  $\hat{\phantom{x}}$  を用いて記述した。このことより、式 (A.1.3) から

$$\frac{d\sigma}{d(-\hat{t})} = \frac{2\pi\alpha^2 Q_q^2}{3\hat{s}^2} \cdot \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$$

が得られる。

さて、parton model の仮定より

$$\begin{aligned} & \sigma(p + \bar{p} \longrightarrow \mu^- + \mu^+) \\ &= \sum_{q=u,d,\bar{u},\bar{d}} \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \sigma(q + \bar{q} \longrightarrow \mu^- + \mu^+) N_q^p(\xi_1) N_{\bar{q}}^{\bar{p}}(\xi_2) \end{aligned}$$

という関係式が与えられる。これを変形する。

$$\begin{aligned} & \int dM^2 \frac{d\sigma}{dM^2}(p + \bar{p} \longrightarrow \mu^- + \mu^+) \\ &= \int dM^2 \sum_{q=u,d,\bar{u},\bar{d}} \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \sigma(q + \bar{q} \longrightarrow \mu^- + \mu^+) (M^2) \delta(M^2 - \hat{s}) N_q^p(\xi_1) N_{\bar{q}}^{\bar{p}}. \end{aligned}$$

(2.2.4)

我々が観測するのはこの被積分関数で、不変質量分布 (invariant mass distribution) と呼ばれ、以下これに注目する。  $\sigma(q + \bar{q} \longrightarrow \mu^- + \mu^+) \equiv \sigma_{\text{parton}}$  とする。

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma}{dM^2}(p + \bar{p} \longrightarrow \mu^- + \mu^+) \\ &= \sum_q \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 N_q^p(\xi_1) N_{\bar{q}}^{\bar{p}}(\xi_2) \sigma_{\text{parton}}(M^2) \delta(M^2 - \xi_1 \xi_2 s) \\ &= \sum_q \int_0^1 d\xi_1 N_q^p(\xi_1) N_{\bar{q}}^{\bar{p}}\left(\frac{M^2}{\xi_1 s}\right) \sigma_{\text{parton}}(M^2) \frac{1}{\xi_1 s} \end{aligned}$$

で与えられる。(2.2.3)式を用いて変数変換すれば

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma}{dM^2}(p + \bar{p} \rightarrow \mu^- + \mu^+) \\ &= \sum_q \int_0^1 d\xi_1 N_q^p(\xi_1) N_{\bar{q}}^{\bar{p}}\left(\frac{M^2}{\xi_1 s}\right) \sigma_{\text{parton}}(M^2) \frac{1}{\xi_1 s} \\ &= \sum_q \int dY N_q^p\left(\frac{M}{\sqrt{s}} e^Y\right) N_{\bar{q}}^{\bar{p}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}} e^{-Y}\right) \frac{\sigma_{\text{parton}}(M^2)}{s} \end{aligned}$$

を得る。ここで (A.1.2) 式において  $\hat{s} \rightarrow M^2$  の変数変換をしたものを用いて

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{parton}}(M^2) &= \int d(\cos \theta) \frac{d\sigma_{\text{parton}}(M^2)}{d(-\cos \theta)} \\ &= \int \frac{dy}{\cosh^2 y} \frac{d\sigma_{\text{parton}}(M^2)}{d(-\cos \theta)} \\ &= \int \frac{dy}{\cosh^2 y} \frac{M^2}{2} \frac{d\sigma_{\text{parton}}(M^2)}{d(-\hat{t})} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma}{dM^2}(p + \bar{p} \rightarrow \mu^- + \mu^+) \\ &= \sum_q \int dY \int dy \frac{1}{2 \cosh^2 y} f_q^p\left(\frac{M}{\sqrt{s}} e^Y\right) f_{\bar{q}}^{\bar{p}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}} e^{-Y}\right) \frac{d\sigma_{\text{parton}}(M^2)}{d(-\hat{t})}, \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma}{dM}(p + \bar{p} \rightarrow \mu^- + \mu^+) \\ &= M \sum_q \int dY \int dy \frac{1}{\cosh^2 y} f_q^p\left(\frac{M}{\sqrt{s}} e^Y\right) f_{\bar{q}}^{\bar{p}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}} e^{-Y}\right) \frac{d\sigma_{\text{parton}}(M^2)}{d(-\hat{t})} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

が得られる。ここで、 $f_{q,\bar{q}}^{p,\bar{p}}(x) = x N_{q,\bar{q}}^{p,\bar{p}}(x)$  であり、また素過程の散乱断面積  $\frac{d\sigma_{\text{parton}}(M^2)}{d(-\hat{t})}$  は Mandelstam 変数を  $y$  や  $M$  に変数変換したものを使う。運動量割合での積分から rapidity に関する積分に書き直した事によって、積分範囲の実験の制限からくる依存性が明らかになった。

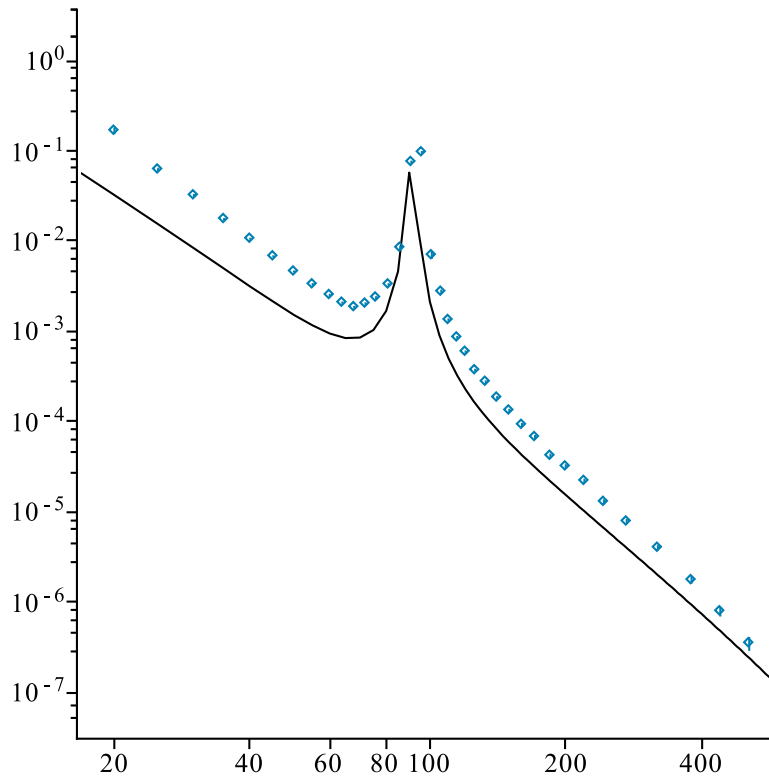


図 2.4 Drell-Yan process における終状態のレプトン対に関する不変質量分布：縦軸は、 $Z$  ボソンのピーク付近の値を 1 に規格化しているため  $1/\sigma_Z \cdot d\sigma/dM[\text{GeV}^{-1}]$ ，横軸は不変質量  $M[\text{GeV}]$  である。実線が計算結果で、エラーバー付きの点線が CMS による実験結果 [22] である。

## 2.2.4 LHC 実験との比較

LHC 実験で CMS collaborator によって、Drell-Yan process の結果が与えられている [22]。parton model を用いた数値計算がこの結果を再現できるか確認してみる。再現するにあたり、積分領域の条件は文献 [22] を採用し、parton distribution function については、web 上の文献 [23] を参照した。前節 2.2.3 で得られた不変質量分布 (2.2.5) 式を応用する。先の状況と異なる点を列挙すると、LHC 実験は陽子-陽子の衝突実験である点、観測する終状態はミュオン反ミュオン対と電子陽電子対の 2 種類である点、中間状態として光子と  $Z$  ボソンを考慮しなければならない点が挙げられる。これらをふまえた計算結果を表した不変質量分布が図 2.4 である。

実験結果と比べると数値計算の結果は、値の減少の仕方やシグナルの位置などといった実験結果の傾向をよく表している。特に  $Z$  ボソンのシグナルのある 90 GeV 辺りのピークのあたりは非常によい一致を見せており、本研究ではシグナルが現れる領域の値を用いて計算するということを踏まえると、この計算結果と実験結果との比較から、parton model を用いて計算した結果の妥当性を支持しているということが出来る。

実験結果と数値計算の結果が完全に一致しなかったのは、tree level における数値計算の結果であること、parton distribution function のエネルギー依存性を考慮していないこと、tree level でも

高次の摂動の項からの寄与を考慮していないことが考えられる。

## 第 3 章

# ゲージヒッグス統一模型

この章では、高次元時空の理論であるゲージヒッグス統一模型について見ていく。ゲージヒッグス統一模型の基本的な考え方は、高次元時空にゲージ対称性を課し、標準模型における電弱相互作用のゲージ場と Higgs 場を統一するものである。そのため、電弱相互作用に関連してゲージヒッグス統一模型の研究がこれまでに数多くなされている [16, 17, 18, 19]。ところが、強い相互作用に関連した研究は比較的少ない。高次元時空に電弱ゲージ対称性の起源となるより大きなゲージ対称性が課され、電弱ゲージ場と Higgs 場が高次元時空に分布すると考えるならば、その一方で標準模型の強い相互作用に関連するゲージ対称性も高次元時空に課されると考えるのが自然である。なぜなら、もしそうでなければ、高次元時空に電弱ゲージ場と Higgs 場が分布しているのにも関わらず、4 次元時空だけにグルーオン場が分布することになり不自然だからである。また、標準模型には強い相互作用に関連するゲージ対称性と電弱ゲージ対称性が密接に関わっていることを示す、例えばゲージアノマリーの相殺などがあることを考えると、高次元時空にも強い相互作用に関連するゲージ対称性が課され、グルーオン場が分布すると考えるのが自然である。

始めに標準模型における理論的問題点に触れて、それからゲージヒッグス統一模型の大雑把な考えを理解するために、中でも単純でかつ基本的なものである、5 次元に  $SU(3)_C \times SU(3)_W$  ゲージ対称性が課され、余剰次元を  $S^1/Z_2$  にコンパクト化された模型について考察する。さらに可能な 3 点相互作用の結合定数を計算した後、LHC 実験で Kaluza-Klein グルーオンを探索するために必要な散乱過程の計算を parton level で行い parton model を応用して終状態が parton 対に関する不変質量分布を計算する。

次に、湯川結合定数を再現出来る模型について説明をし、3 点相互作用を計算し、その模型で湯川結合定数を再現しようとする 3 点相互作用の結合定数はどのような値となるのかを議論する。

### 3.1 標準模型の理論的問題点

素粒子の標準模型の理論的な問題点は様々あるが、特に本論文の内容に関連が強いものとして 2 つ挙げる。

**微調整問題** より基本的な理論を仮定して、Higgs の質量に対する量子補正を計算すると、それは理論の cut off スケール  $\Lambda$  に依存する:

$$\delta m_H^2 \approx \frac{\Lambda^2}{16\pi^2}.$$

この cut off スケール  $\Lambda$  では標準模型はより基本的な理論に取って代わられるべきである。この cut off スケールが電弱スケールと比べて非常に大きいと、低エネルギーの物理に影響を与える可能性がある。これを hierarchy problem という。これは観測される Higgs 質量  $m_H$  を出すときにパラメタを微調整しなければならないことを意味している:

$$m_H^2 = \mu^2 + \delta m_H^2 \approx \mathcal{O}((100\text{GeV})^2).$$

cut off スケールがプランクスケール ( $10^{19}\text{GeV}$ ) だとすると、 $32$ 桁の調整を  $\mu^2$  に対して行わなければならない。これは不自然である、とするのが微調整問題 (fine-tuning problem) である。

ゲージヒッグス統一模型では高次元時空に拡張した理論にゲージ対称性を課し、そのゲージ場の偏極の4次元成分を  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  のゲージ場、余剰次元成分を Higgs 場とみなすため、Higgs 場の質量項は高次元時空におけるゲージ対称性で禁止される。したがってこの問題は起こらない。

**フェルミオン質量階層性の問題** フェルミオンの質量は湯川結合定数の大きさで決まる。しかしそれらはすべて標準模型では決定することの出来ない任意パラメータである。ゲージヒッグス統一模型においては Higgs 場はもともと高次元のゲージ場であるとみなしているため、標準模型における湯川結合は元々はゲージ結合であったと主張する。このため、ゲージ結合定数はフェルミオンの世代によらず一定なので質量の階層性を再現出来ないように思われる。しかし、余剰次元にフェルミオンを分布させることでこの問題は解決される。言い換えれば、余剰次元でのフェルミオンの分布の仕方によってその結合定数の大きさが異なるということが主張できる。このことについてはまた後ほど触れる。

## 3.2 高次元時空理論

余剰次元  $y \in (-\infty, \infty)$  に対して、2つの Parity 変換、 $y \rightarrow -y$  で移る点と、 $y' \rightarrow -y'$  ( $y' \equiv y - \pi R$ ) で移る点を同一視することによって、orbifold  $S^1/Z_2$  が得られる [24]。コンパクト化された余剰次元は  $y \in [0, \pi R]$  の線分とみなす事が出来、 $y = 0$  と  $y = \pi R$  は Parity 変換によって移らないために fixed point と呼ばれる。このときの  $R$  の逆数  $1/R$  をコンパクト化スケールと呼び、新しい物理の典型的なエネルギースケールを与える。またコンパクト化スケールは場の Kaluza-Klein mode の質量とある関係式で結ばれている。例えば

$$\phi(x^\mu, y) \rightarrow \phi(x^\mu, -y) = P\phi(x^\mu, y) \quad (3.2.1)$$

と Parity 変換が定義される場を考える。 $P$  は  $+1$  か  $-1$  のどちらかの値をとり、符号に対応する場をそれぞれ  $\phi_+$ 、 $\phi_-$  と表す。fixed point には  $\phi_+$  のみが存在出来る。これらのフーリエ展開は、 $n$  を整数として

$$\phi_+(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_+^{(n)}(x^\mu) \cos \frac{ny}{R}, \quad (3.2.2)$$

$$\phi_-(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_-^{(n)}(x^\mu) \sin \frac{ny}{R} \quad (3.2.3)$$

となる。ここで、高次元の Klein-Gordon 方程式が

$$\begin{aligned}\partial_M \partial^M \phi &= 0, \\ \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + \partial_y \partial^y \phi &= 0, \\ \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi - \left(\frac{n}{R}\right)^2 \phi &= 0,\end{aligned}$$

となることから  $\phi_\pm^{(n)}$  は質量  $m = \frac{n}{R}$  をもつことがわかり、 $\phi_+$  にのみ無質量場 (0-mode) が現れることがわかる。

高次元に課された  $SU(3)_W$  群の変換に対して、フェルミオン場を基本表現にとる。5次元の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_D^{(5)} = i\bar{\Psi}\gamma^M \partial_M \Psi \quad (3.2.4)$$

で与えられる。ここで  $M = 0, 1, \dots, 4$  に対して

$$\gamma^M = (\gamma^\mu, i\gamma^5), \quad (3.2.5)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

である。

この5次元の Lagrangian 密度は Parity 変換  $y \rightarrow -y$  を

$$\Psi(x^\mu, y) \rightarrow \Psi(x^\mu, -y) = -P\gamma_5 \Psi(x^\mu, y) \quad (3.2.7)$$

と定めると不変になる。ここでの  $P$  はゲージ空間に作用する  $3 \times 3$  行列である。この変換の下で、5次元での素朴な質量項  $M\bar{\Psi}\Psi$  は禁止される。

### 3.3 ゲージ群の破れ

その有効理論として標準模型を導かなければ、ゲージヒッグス統一模型は標準模型を超える理論であるということができない。言い換えれば、標準模型のゲージ群  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  を導かなければならない。標準模型のゲージ群は境界条件を課することによって再現される。

(3.2.4) 式を共変微分に置き換えて  $SU(3)_W$  ゲージ場は随伴表現として、Parity 変換に対して

$$A_\mu(x, -y) = PA_\mu(x, y)P^\dagger, \quad A_5(x, -y) = -PA_5(x, y)P^\dagger \quad (3.3.1)$$

と変換すれば、Lagrangian 密度は不変に保たれる。今、 $SU(3)_W$  が  $SU(2) \times U(1)$  に破れ、Higgs 2重項が5次元のゲージ多重項の余剰次元成分からあらわれるように、境界条件として、 $P$  を選ぶ。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

とするとゲージ多重項は以下のような符号が付与される。

$$A_\mu = \begin{pmatrix} + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & + \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} - & + & + \\ + & - & - \\ + & - & - \end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$



先に述べたように + 成分だけが 0-mode をもつので、 $A_\mu$  の 0-mode から電弱ゲージボソン、 $A_5$  の 0-mode から Higgs 2 重項があらわれて、fixed point 上ではゲージ群が  $SU(2) \times U(1)$  に破れていることがわかる。

一方  $SU(3)_C$  ゲージ多重項には Parity の付与は  $G_\mu$  には +、 $G_5$  には - とする:

$$G_\mu(x, -y) = G_\mu(x, y) \quad , \quad G_5(x, -y) = -G_5(x, y). \quad (3.3.4)$$

先にも述べているが、標準模型に見られるゲージカイラルアノマリーの相殺などからも示唆されるように、高次元時空に標準模型の電弱ゲージ対称性の起源となるより大きなゲージ対称性  $SU(3)_W$  が課されているので、強い相互作用に関するゲージ対称性  $SU(3)_C$  も高次元時空に課すほうが自然である。

### 3.4 簡単な模型 (delta 関数分布型模型)

後で見ることになるが、ゲージヒッグス統一模型では余剰次元方向にフェルミオンを分布させることによって標準模型の湯川結合定数の再現を行う。しかしここでは、多少複雑になるので、まずはフェルミオンが  $y = 0$  に delta 関数的に分布する模型の  $SU(3)_C$  部分について考える [25]。この系の作用と Lagrangian 密度は (1.3.1) 式のゲージ場を高次元において

$$S_5 = \int d^4x \int \mathcal{L}_5 dy \quad , \quad \mathcal{L}_5 = -\frac{1}{4} G_{MN}^A G^{MNA} + i\bar{q}\gamma^\mu D_\mu q \delta(y) \quad (3.4.1)$$

のように与えられる。ここで、 $G_{MN}^A$  は 5 次元グルーオンの場の強さで  $D_\mu$  は通常の共変微分である:

$$G_{MN}^A = \partial_M G_N^A - \partial_N G_M^A - g_5 f^{ABC} G_M^B G_N^C \quad M, N = 0, 1, 2, 3, 5. \quad (3.4.2)$$

さて、ユニタリーゲージ  $G_5^A(x, y) = 0$  をとるとゲージ場  $G_M^A$  の Kaluza-Klein mode 展開は

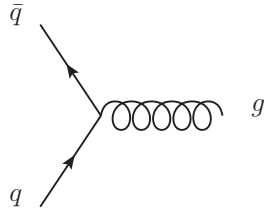
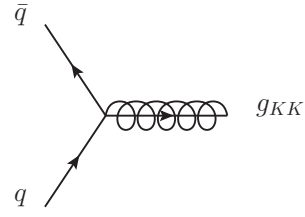
$$G_\mu^A(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \left( G_\mu^{A(0)}(x) + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} G_\mu^{A(n)} \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \right). \quad (3.4.3)$$

ここで第 2 項の  $\sqrt{2}$  は、場の係数が  $-\pi R$  から  $\pi R$  にわたって  $y$  積分したときに 1 になるように決めると現れる規格化因子である。 $m_n = n/R$  の質量を持つ、 $n(\neq 0)$ -mode のグルーオンを Kaluza-Klein グルーオンと呼ぶ。本論文では、 $n$ -mode のうち、Kaluza-Klein 1-mode のグルーオンについてのみを取り扱う。従って、Kaluza-Klein グルーオンと言うときには特に断りが無ければこの Kaluza-Klein 1-mode のグルーオンを指し、 $g_{KK}$  と表す。まず、いくつかの diagram の結合定数を計算する。

今、tree level の  $ggg_{KK}$  の結合定数は

$$\mathcal{L}_5 \supset -g_5 f^{ABC} G_\mu^B G_\nu^C (\partial^\mu G^{A\nu} - \partial^\nu G^{A\mu}) \quad (3.4.4)$$

の Kaluza-Klein グルーオン 1 つと通常のグルーオン 2 つを含む項からあらわれるがこの場合、係数の  $y$ -依存性が  $\cos$  関数なので、 $y$  積分すると 0 になる。つまり、このような相互作用は tree level では存在しないことになる。この相互作用は、5 次元方向の運動量保存が成り立っており、並進対称性を保つ。

図 3.1  $q\bar{q}g$ -vertex図 3.2  $q\bar{q}g_{KK}$ -vertex

次に tree level の  $q\bar{q}g_{KK}$  の結合定数を計算する。これは

$$\mathcal{L}_5 \supset i\bar{q}\gamma^\mu D_\mu q \delta(y) = i\bar{q}\gamma^\mu (\partial_\mu - ig_5 G_\mu^A T^A) q \delta(y) \quad (3.4.5)$$

の相互作用項からあらわれ、 $n=0$  の項 (図 3.1) からは通常の強い相互作用の結合定数  $g_3$  と  $g_5$  との関係式を与える:

$$\int_{-\pi R}^{\pi R} \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}} \bar{q}\gamma^\mu G_\mu^{A(0)} T^A q \delta(y) dy = \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}} \bar{q}\gamma^\mu G_\mu^{A(0)} T^A q. \quad (3.4.6)$$

したがって

$$g_3 \equiv \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}} \quad (3.4.7)$$

であることがわかる。 $n=1$  の項 (図 3.2) からは Kaluza-Klein グルーオンとクォークとの相互作用の強さを与える:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi R}^{\pi R} \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}} \bar{q}\gamma^\mu \sqrt{2} G_\mu^{A(1)} \cos\left(\frac{y}{R}\right) T^A q \delta(y) dy \\ &= \sqrt{2} \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}} \bar{q}\gamma^\mu G_\mu^{A(1)} T^A q \\ &= \sqrt{2} g_3 \bar{q}\gamma^\mu G_\mu^{A(1)} T^A q. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

ここで、 $\delta(y)$  が 5 次元方向の運動量保存を破っており、並進対称性がない。

Kaluza-Klein グルーオンの 2 体崩壊について計算する。Kaluza-Klein グルーオンの質量  $m_1$  は  $\mathcal{O}(\text{TeV})$  とし、計算する diagram は図 3.2 で、これの不变散乱振幅  $\mathcal{M}$  は

$$\mathcal{M} = \sqrt{2} g_3 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu \epsilon_\mu^{A(1)}(k) T^A v(p_1) \quad (3.4.9)$$

で与えられる。ここで  $u, v$  はフェルミオンのスピノール、 $\epsilon_\mu^A$  はグルーオンの偏極ベクトルである。また、クォークの質量を無視すると偏極の和において

$$\sum_\sigma \epsilon_\mu^{A(n)*}(k, \sigma) \epsilon_\nu^{B(n)}(k, \sigma) = \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_n^2} \right) \delta^{AB} \quad (3.4.10)$$

の第 2 項が 0 になる。したがって、スピンと偏極の和をとった不变散乱振幅の 2 乗は

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}|^2 &= 2g_3^2 \text{tr}(\not{p}_1 \gamma^\nu (-g_{\mu\nu}) \not{p}_2 \gamma^\mu) \text{tr}(T^A T^A) \\ &= 64g_3^2 (p_1 \cdot p_2) \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

で、さらに初期状態でスピンとカラーの平均をとり、可能な終状態をふまえて崩壊幅を計算すると

$$\Gamma(g_{KK} \rightarrow q\bar{q}) = 2\alpha_s m_1 \tag{3.4.12}$$

となる。ここで、 $\alpha_s$  は  $g_3^2$  を  $4\pi$  で割ったものである。

さて、LHC 実験での 2-jets イベントをみて Kaluza-Klein グルーオンを探索することを考える。2-jets イベントとは終状態の parton が quark のカラー閉じ込めによってハドロン化して作られるものである。Kaluza-Klein グルーオンを含むようないくつかの過程の散乱断面積を計算しなければならない。陽子陽子衝突の実験であることをふまえると、始状態は  $u$ -クォーク、 $d$ -クォークとそれらの反粒子を考えれば tree level ではよい。以下に可能な diagram をすべて書き出す。それぞれの過程について、不変散乱振幅の 2 乗を計算し Mandelstam 変数で表す。さらに、始状態のスピンやカラーの平均をふまえて不変質量分布を求める。

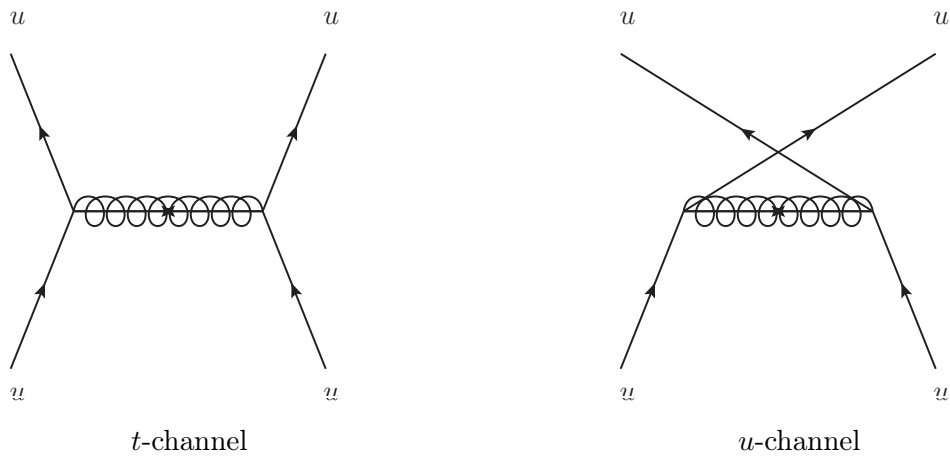


図 3.3  $\mathcal{M}(uu \rightarrow uu)$

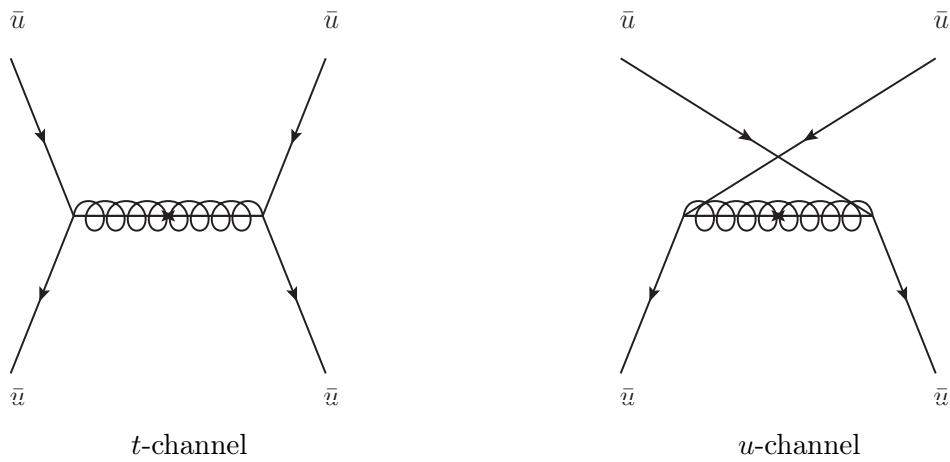


図 3.4  $\mathcal{M}(\bar{u}\bar{u} \rightarrow \bar{u}\bar{u})$

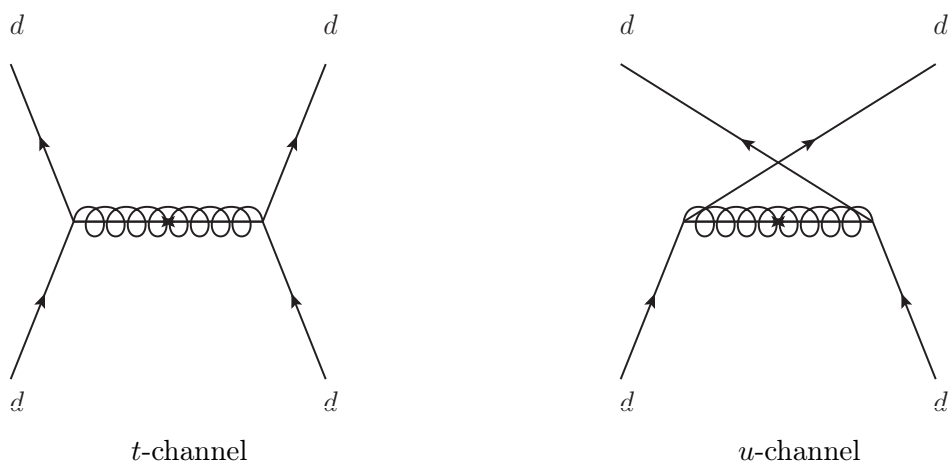


図 3.5  $\mathcal{M}(dd \rightarrow dd)$

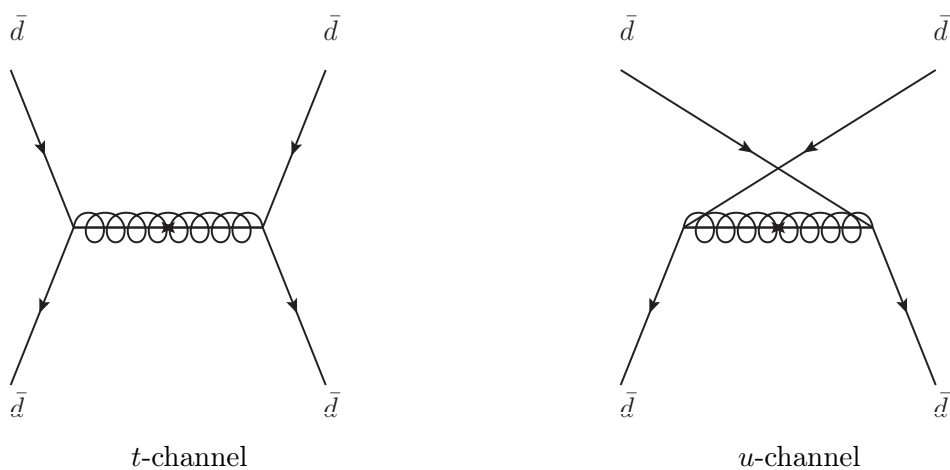


図 3.6  $\mathcal{M}(d\bar{d} \rightarrow d\bar{d})$

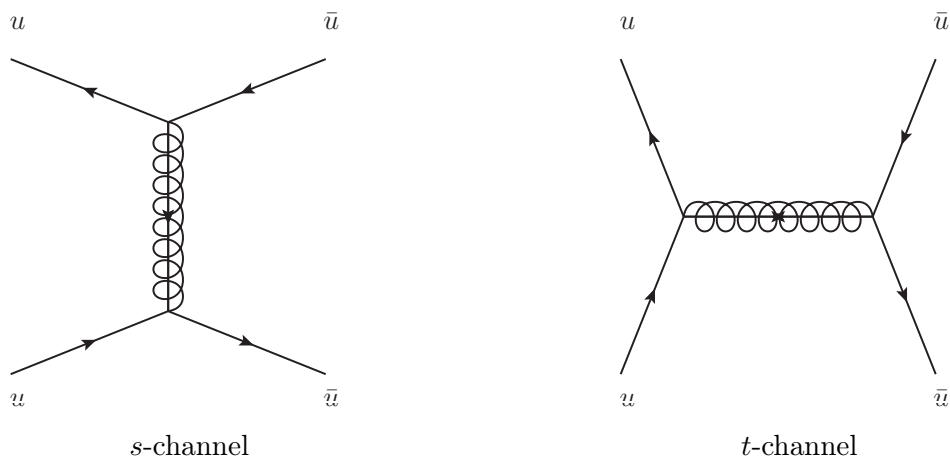


図 3.7  $\mathcal{M}(u\bar{u} \rightarrow u\bar{u})$

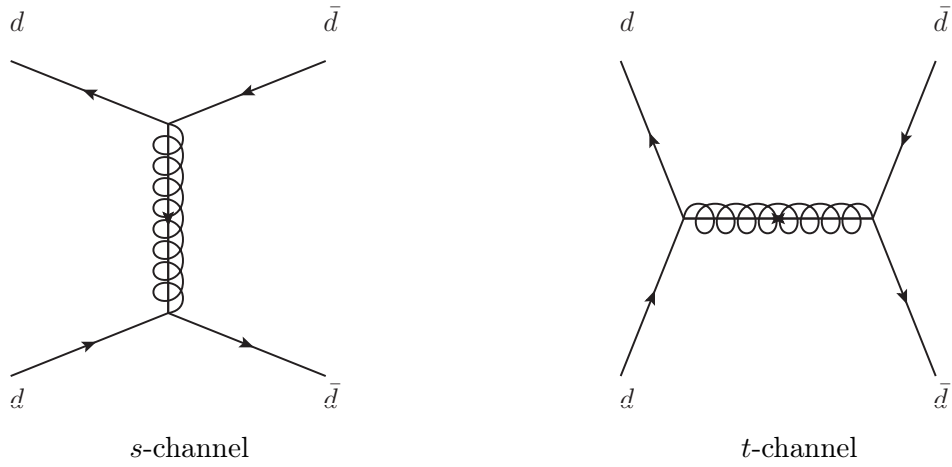


図 3.8  $\mathcal{M}(d\bar{d} \rightarrow d\bar{d})$

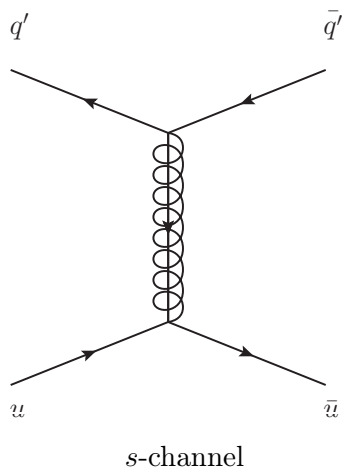


図 3.9  $\mathcal{M}(u\bar{u} \rightarrow d\bar{d}, s\bar{s}, c\bar{c}, b\bar{b}, t\bar{t})$

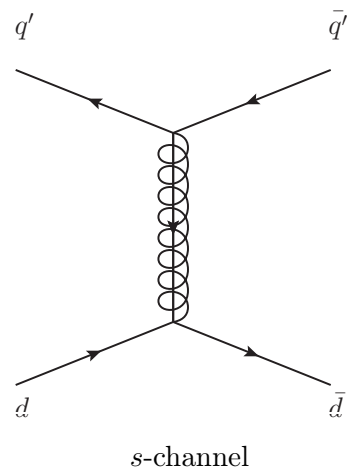


図 3.10  $\mathcal{M}(d\bar{d} \rightarrow u\bar{u}, s\bar{s}, c\bar{c}, b\bar{b}, t\bar{t})$

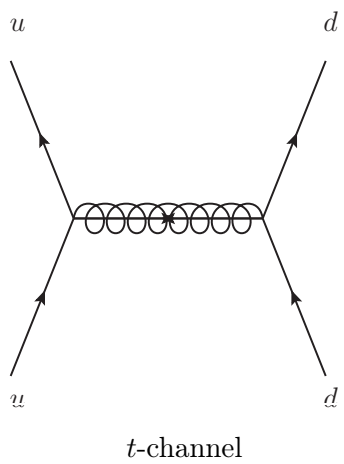


図 3.11  $\mathcal{M}(u\bar{u} \rightarrow d\bar{d})$

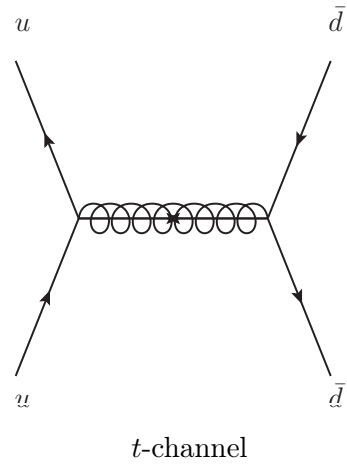
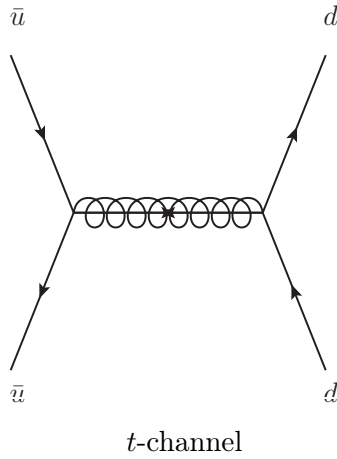
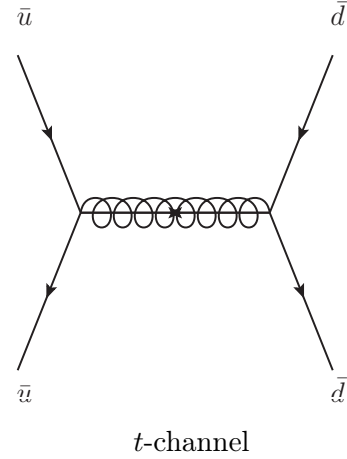


図 3.12  $\mathcal{M}(u\bar{u} \rightarrow d\bar{d})$

図 3.13  $\mathcal{M}(\bar{u}d \rightarrow \bar{u}d)$ 図 3.14  $\mathcal{M}(\bar{u}\bar{d} \rightarrow \bar{u}\bar{d})$ 

まず、図 3.3 の diagram から

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}(uu \rightarrow uu)|^2 &= 16 \frac{(8\pi\alpha_s)^2}{(\hat{t} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2} (\hat{s}^2 + \hat{u}^2) + 16 \frac{(8\pi\alpha_s)^2}{(\hat{u} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2} (\hat{s}^2 + \hat{t}^2) \\
 &+ \frac{32}{3} \frac{(8\pi\alpha_s)^2 \{(\hat{t} - m_1^2)(\hat{u} - m_1^2) + (m_1\Gamma)^2\}}{\{(\hat{t} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2\} \{(\hat{u} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2\}} \hat{s}^2 \equiv |\mathcal{M}_{qq}|^2 \quad (3.4.13)
 \end{aligned}$$

となる。同様に、図 3.4~3.6 はすべてこれと同じ形の振幅を与える。したがって、求める不変質量分布には、適当な parton distribution function をこの振幅に掛けて足し合わせたものが寄与する。

次に、図 3.7 の diagram から

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}(u\bar{u} \rightarrow u\bar{u})|^2 &= 16 \frac{(8\pi\alpha_s)^2}{(\hat{s} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) + 16 \frac{(8\pi\alpha_s)^2}{(\hat{t} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2} (\hat{s}^2 + \hat{u}^2) \\
 &+ \frac{32}{3} \frac{(8\pi\alpha_s)^2 \{(\hat{s} - m_1^2)(\hat{t} - m_1^2) + (m_1\Gamma)^2\}}{\{(\hat{s} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2\} \{(\hat{t} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2\}} \hat{s}^2 \\
 &\equiv |\mathcal{M}_{q\bar{q}}|^2 \quad (3.4.14)
 \end{aligned}$$

となる。同様に、図 3.8 も同じ形の振幅を与える。これらも適当な parton distribution function を掛けて足し合わせたものが不変質量分布に寄与する。

さらに、図 3.9 の diagram から

$$|\mathcal{M}(u\bar{u} \rightarrow d\bar{d}, s\bar{s}, c\bar{c}, b\bar{b}, t\bar{t})|^2 = 5 \times 16 \frac{(8\pi\alpha_s)^2}{(\hat{s} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) \quad (3.4.15)$$

となり、同様に図 3.10 の diagram から

$$|\mathcal{M}(d\bar{d} \rightarrow u\bar{u}, s\bar{s}, c\bar{c}, b\bar{b}, t\bar{t})|^2 = 5 \times 16 \frac{(8\pi\alpha_s)^2}{(\hat{s} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) \quad (3.4.16)$$

が得られる。これらから (3.4.14) 式の第一項を 6 倍して計算すれば上の (3.4.15) (3.4.16) 式の

寄与も考慮したことになる。このことをふまえて改めて

$$|\mathcal{M}_{q\bar{q}}|^2 \equiv 6 \times 16 \frac{(8\pi\alpha_s)^2}{(\hat{s} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) + 16 \frac{(8\pi\alpha_s)^2}{(\hat{t} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2} (\hat{s}^2 + \hat{u}^2) \\ + \frac{32}{3} \frac{(8\pi\alpha_s)^2 \{(\hat{s} - m_1^2)(\hat{t} - m_1^2) + (m_1\Gamma)^2\}}{\{(\hat{s} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2\} \{(\hat{t} - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2\}} \hat{s}^2 \quad (3.4.17)$$

と定める。

最後に図 3.11 の diagram から

$$|\mathcal{M}(ud \rightarrow ud)|^2 = 16 \frac{(8\pi\alpha_s)^2}{(\hat{t}^2 - m_1^2)^2 + (m_1\Gamma)^2} (\hat{s}^2 + \hat{u}^2) \equiv |\mathcal{M}_{qq'}|^2 \quad (3.4.18)$$

となる。同様に、図 3.12 ~ 3.14 からもすべてこれと同じ形の振幅を与えるので、不変質量分布には、適当な parton distribution function をこの振幅に掛けて足し合わせたものが寄与する。

始状態に対してスピンやカラーの平均をふまえると

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\hat{s}^2} \frac{1}{16\pi} \frac{1}{36} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.4.19)$$

を満たす。これによって不変質量分布は (3.4.13)(3.4.17)(3.4.18) 式を用いて

$$\frac{d\sigma}{dM} = M \int dY \int dy \frac{1}{\cosh^2 y} \frac{1}{\hat{s}^2} \frac{1}{16\pi} \frac{1}{36} \\ \times \left[ \left\{ f_u\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_u\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) + f_{\bar{u}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_{\bar{u}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + f_d\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_d\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) + f_{\bar{d}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_{\bar{d}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) \right\} |\mathcal{M}_{qq}|^2 \right. \\ \left. + \left\{ f_u\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_{\bar{u}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) + f_{\bar{u}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_u\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + f_d\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_{\bar{d}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) + f_{\bar{d}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_d\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) \right\} |\mathcal{M}_{q\bar{q}}|^2 \right. \\ \left. + \left\{ f_u\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_d\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) + f_d\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_u\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + f_u\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_{\bar{d}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) + f_{\bar{d}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_u\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + f_{\bar{u}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_d\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) + f_d\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_{\bar{u}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + f_{\bar{u}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_{\bar{d}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) + f_{\bar{d}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^Y\right) f_{\bar{u}}\left(\frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}\right) \right\} |\mathcal{M}_{qq'}|^2 \right] \quad (3.4.20)$$

となる。

### 3.5 湯川結合定数を再現する模型

ここではゲージヒッグス統一模型において、どのように湯川相互作用が再現されるかをみる。高次元時空に課すゲージ対称性やコンパクト化の仕方は先の模型と同じであるが、フェルミオンが余剰次元に分布するその形が先の模型と異なる。つまり、フェルミオンの波動関数に  $\delta(y)$  でない  $y$  依存性があらわれる。余剰次元にフェルミオンを分布させる方法として、高次元時空に bulk mass matrix を導入する方法を紹介する。さらに、フェルミオンの波動関数の  $y$  依存性が 0-mode フェルミオンと Kaluza-Klein グルーオンとの結合定数にどのような影響が表れるかをみる。

## 3.5.1 bulk mass matrix の導入

Higgs 場はもともとゲージ場であるので、湯川結合は始め高次元のゲージ結合であり、これは世代に依らない。しかし、実際には世代毎に湯川結合定数は異なる値をとり、フェルミオンに質量の階層性を与えている。このため、現実にあるフェルミオンの質量階層性を実現する方法として、5次元の質量行列を導入する方法がある。この質量行列のことを bulk mass matrix という。先ほどみたように素朴な質量項は Lagrangian 密度の  $Z_2$  対称性を破る。しかし、 $y$  に関して反対称な bulk mass は  $Z_2$  対称性を破らない。反対称ならばなんでもよいが、ここでは sign function、

$$\epsilon(y) = \begin{cases} +1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases} \quad (3.5.1)$$

を用いて、フェルミオンセクターの Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{5F} = \bar{\Psi}_i i \not{D} \Psi_i - M^{ij} \epsilon(y) \bar{\Psi}_i \Psi_j \quad (3.5.2)$$

と書き下す。ここで、添字  $i, j$  は世代を走る。ここであらわれる bulk mass は行列の形をしており、その非対角成分から flavor 混合があらわれるが、本論文では簡単のため、flavor 混合は無視し、対角成分だけをもつものとする。

フェルミオンの zero-mode の波動関数は、5次元のフェルミオンは Dirac 方程式に従うことから

$$[\gamma^5 \partial_5 + M \epsilon(y)] f_{L,R}^{(0)}(y) = 0 \quad (3.5.3)$$

を満たすことがわかる。従って、規格化条件から

$$f_L^{(0)}(y) = \sqrt{\frac{M}{1 - e^{-2\pi MR}}} e^{-M|y|}, \quad f_R^{(0)}(y) = \sqrt{\frac{M}{e^{2\pi MR} - 1}} e^{M|y|}.$$

となる。余剰次元方向の波動関数の分布の様子を図 3.15 に示した。

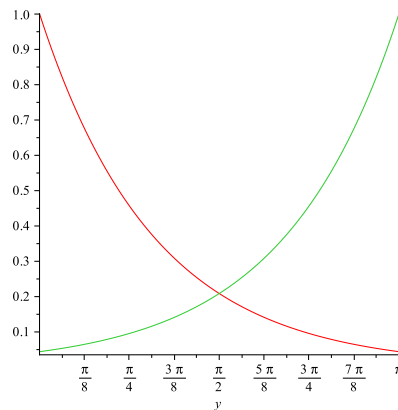


図 3.15 余剰次元方向の波動関数の分布の様子。  $R=1$ 、 $M=1$  とした。赤色の線が  $f_L^{(0)}(y)$  で緑色の線が  $f_R^{(0)}(y)$  を表している。

結局、今考えている  $S^1/Z_2$  にコンパクト化された 5次元に  $SU(3)_C \times SU(3)_W$  対称性が課されたゲージヒッグス統一模型の Lagrangian 密度は以下のようにまとめられる。

$$\mathcal{L}_5^{GHU} = -\frac{1}{4} G_{MN}^a G^{MN a} - \frac{1}{4} F_{MN}^a F^{MN a} + \bar{\Psi}_i i \not{D} \Psi_i - M^{ij} \epsilon(y) \bar{\Psi}_i \Psi_j.$$



ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\equiv \Gamma^M D_M \quad , \quad \Gamma^M = (\gamma^\mu, i\gamma^5), \\ G_{MN}^a &= \partial_M G_N^a - \partial_N G_M^a - g_5 f^{abc} G_M^b G_N^c, \\ F_{MN}^a &= \partial_M A_N^a - \partial_N A_M^a - g_5' \epsilon^{abc} A_M^b A_N^c. \end{aligned}$$

であり、ゲージ場の Kaluza-Klein mode 展開は

$$\begin{aligned} A_M^{(+,+)}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \left\{ A_M^{(0)}(x) + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_M^{(n)}(x) \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \right\}, \\ A_M^{(-,-)}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} A_M^{(n)}(x) \sin\left(\frac{n}{R}y\right), \\ G_\mu(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \left\{ G_\mu^{(0)}(x) + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} G_\mu^{(n)}(x) \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \right\} \\ G_5(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(n)}(x) \sin\left(\frac{n}{R}y\right) \end{aligned}$$

となる。

### 3.5.2 結合定数の計算

ここでは、ゲージヒッグス統一模型の Lagrangian 密度にあらわれるゲージ結合定数  $g_5, g_5'$  と標準模型のゲージ結合定数の関係を明らかにする。

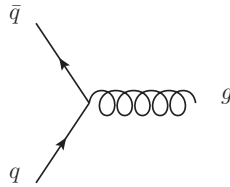


図 3.16  $q\bar{q}g$ -vertex

強い相互作用の結合定数 この diagram ( 図 3.16 ) の結合定数は通常の強い相互作用の結合定数を与える。  $g_5 \bar{\Psi}_i \Gamma^M G_M \Psi_i$  の項より

$$g_5 \int_{-\pi R}^{\pi R} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} |f_L^{(0)}(y)|^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} |f_R^{(0)}(y)|^2 \right\} dy. \quad (3.5.4)$$

$\Gamma^5 G_5$  の 0-mode は、  $G_5$  の parity が奇であるために現れない。第一項の積分値を  $g_L$  , 第二項を  $g_R$  とすると

$$g_L = \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}} \int_{-\pi R}^{\pi R} |f_L^{(0)}(y)|^2 dy = \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}}, \quad (3.5.5)$$

$$g_R = \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}} \int_{-\pi R}^{\pi R} |f_R^{(0)}(y)|^2 dy = \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (3.5.6)$$

$g_L = g_R$  より正しく vector-like な diagram になっている。

$$g_L = g_R \equiv g_s = \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (3.5.7)$$

弱い相互作用においても同様に計算することができ、

$$g_2 = \frac{g'_5}{\sqrt{2\pi R}} \quad (3.5.8)$$

という関係式が与えられる。

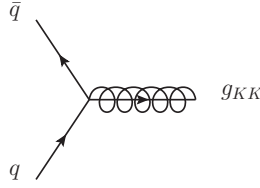


図 3.17  $q\bar{q}g_{KK}$ -vertex

クォークと Kaluza-Klein グルーオンとの結合定数 0-mode のクォークと Kaluza-Klein グルーオンとの結合定数を計算する。先と同様に、この diagram ( 図 3.17 ) は  $g_5 \bar{\Psi}_i \Gamma^M G_M \Psi_i$  よりあらわれる。

$$g_5 \int_{-\pi R}^{\pi R} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} |f_L^{(0)}(y)|^2 \sqrt{2} \cos\left(\frac{y}{R}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} |f_R^{(0)}(y)|^2 \sqrt{2} \cos\left(\frac{y}{R}\right) \right\} dy. \quad (3.5.9)$$

第一項の積分値を  $g_L^*$  , 第二項を  $g_R^*$  とすると

$$\begin{aligned} g_L^* &= \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}} \int_{-\pi R}^{\pi R} |f_L^{(0)}(y)|^2 \sqrt{2} \cos\left(\frac{y}{R}\right) dy \\ &= \frac{g_5}{\sqrt{\pi R}} \frac{4M^2 R^2}{4M^2 R^2 + 1} \frac{1 + e^{-2\pi MR}}{1 - e^{-2\pi MR}}, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

$$\begin{aligned} g_R^* &= \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}} \int_{-\pi R}^{\pi R} |f_R^{(0)}(y)|^2 \sqrt{2} \cos\left(\frac{y}{R}\right) dy \\ &= -\frac{g_5}{\sqrt{\pi R}} \frac{4M^2 R^2}{4M^2 R^2 + 1} \frac{1 + e^{-2\pi MR}}{1 - e^{-2\pi MR}} \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

となり、 $g_L = -g_R$  であることがわかる。これは chirality が  $L$  と  $R$  で異なるために余剰次元でのフェルミオンの分布の仕方に影響しているからである。さらに、bulk mass matrix の情報は式にあることから、クォークと Kaluza-Klein グルーオンの 3 点結合定数は世代毎に異なることがわかる。また  $MR$  が 1 より十分大きいとき

$$g_L^* \sim \sqrt{2}g_s, \quad g_R^* \sim -\sqrt{2}g_s \quad (3.5.12)$$

となる。この極限で結合定数の大きさが先の模型と一致する。

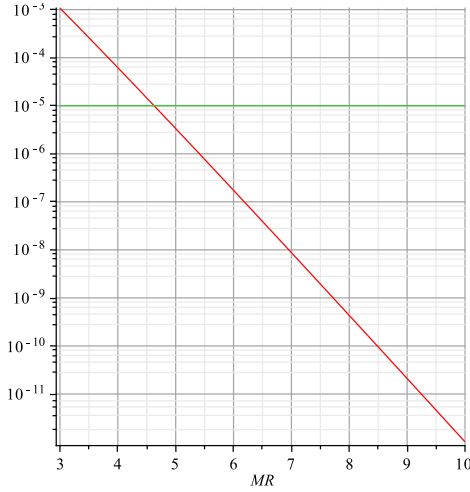


図 3.18 赤線が湯川結合定数の係数の  $MR$  依存性を表す。 $u$ -クォークや  $d$ -クォークを再現する場合、湯川結合定数の係数がおおよそ  $10^{-5}$  程度の大きさにならなければならない。したがってクォークの質量を再現する  $MR$  はおおよそ 4.5 であることがわかる。

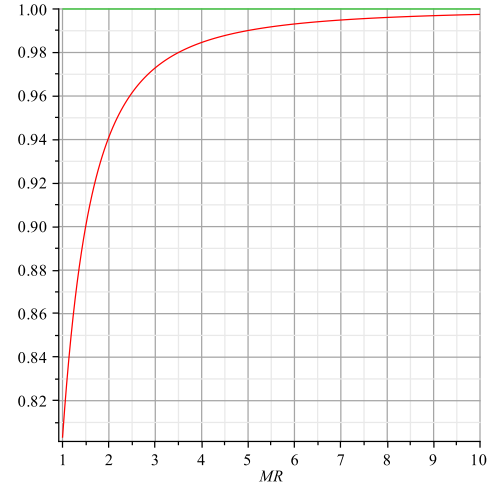


図 3.19 赤線は  $g^*$  の係数の  $MR$  依存性を表す。 $MR > 2$  の領域では  $g^*$  は  $MR$  の変化に対して鈍感になる。 $MR$  が 4.5 のあたりでは  $g^*$  の係数が 0.99 程度であることがわかる。

湯川結合定数 次に湯川結合定数を計算する。これはフェルミオンの運動項からあらわれる。

$$\bar{\Psi}_i i \not{D} \Psi_i \supset \bar{\Psi}_i g'_5 \Gamma^5 A_5 \Psi_i. \quad (3.5.13)$$

この 0-mode のフェルミオン場とゲージ場の結合定数が湯川結合定数になる。これを  $g_Y^{(i)}$  とすると、

$$\begin{aligned} g_Y^{(i)} &= \int_{-\pi R}^{\pi R} \sqrt{\frac{M}{1 - e^{-2\pi MR}}} e^{-M|y|} \frac{g'_5}{\sqrt{2\pi R}} \sqrt{\frac{M}{e^{2\pi MR} - 1}} e^{M|y|} dy \\ &= g'_5 \sqrt{2\pi R} \sqrt{\frac{M}{1 - e^{-2\pi MR}}} \sqrt{\frac{M}{e^{2\pi MR} - 1}} \\ &= g'_5 \sqrt{2\pi R} \sqrt{\frac{M^2}{2(\cosh(2\pi MR) - 1)}} = g_2 \frac{\sqrt{2\pi MR}}{\sqrt{\cosh(2\pi MR) - 1}} \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

となる。標準模型にて、Higgs の真空期待値によって生じるクォークの質量項は (1.2.6) 式で与えられており、混合を無視すれば、

$$g_Y^{(u,d)} = \begin{cases} m_u \sqrt{2}/v & u\text{-quark} \\ m_d \sqrt{2}/v & d\text{-quark} \end{cases} \quad (3.5.15)$$

などとなる。今、parameter は  $R$  だけなので探索する Kaluza-Klein グルーオンの質量を決めれば、bulk mass もクォーク毎に決定し、 $g_L^*, g_R^*$  も決定する。先の結果より、

$$g_Y^{(i)} = \frac{m_i \sqrt{2}}{v} \quad i = u, d, \dots \quad (3.5.16)$$

などとすれば

$$\therefore \frac{\pi MR}{\sqrt{\cosh(2\pi MR) - 1}} = \frac{m_i}{g_2 v}. \quad (3.5.17)$$

$g_2 \lesssim \mathcal{O}(1)$  なので  $u$ -クォークや  $d$ -クォークの場合

$$\text{RHS} \sim 10^{-5} \quad (3.5.18)$$

となる。これを満たす  $MR$  は定量的にはどれくらいの値なのか見積もることができる。言い換えれば、この模型が湯川結合定数を再現するには  $MR$  がどれほどの大きさでなければならないのかを見積もることが出来る。

式 (3.5.17) の左辺を  $MR$  の関数として書いたグラフが図 3.18 の赤い線である。 $u$ -クォークや  $d$ -クォークの場合は、この図で緑色の直線と赤色の直線との交点における  $MR$  の値となり、おおよそ、 $MR \sim 4.5$  あたりで見積もられる。このとき、 $g^*$  の  $g_s$  の係数がどれほどの大きさになるのか見積もってみると、おおよそ  $\sqrt{2}g_s$  になることがわかる (図 3.19)。従って、この模型から得られる不変質量分布は先の  $\delta$  関数分布型模型から得られた不変質量分布とほぼ一致するとしてよいといえる。

簡単のため解析には  $\delta$  関数分布型模型から得られた不変質量分布 (3.4.20) 式を用いることにする。

## 第 4 章

# 解析

現在までの LHC 実験では標準模型に含まれないような粒子は発見されていない。このことから、本論文で採用したゲージヒッグス統一模型で预言される Kaluza-Klein グルーオンの質量に制限が付けられることになる。すなわち、余剰次元のコンパクト化スケールに制限がつく。この章では、その制限を parton level で定量的に見積もる。また近い将来に予定されている衝突エネルギーが 14 TeV の LHC 実験において、探索可能な Kaluza-Klein グルーオンの質量の上限を定量的に見積もる。

### 4.1 QCD background

散乱過程

$$pp \rightarrow 2\text{jets} \quad (4.1.1)$$

の素過程の散乱断面積は [26] によれば

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q_i q_j \rightarrow q_i q_j) = \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(\bar{q}_i \bar{q}_j \rightarrow \bar{q}_i \bar{q}_j) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right], \quad (4.1.2)$$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q_i \bar{q}_i \rightarrow q_j \bar{q}_j) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right], \quad (4.1.3)$$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q_i \bar{q}_i \rightarrow q_i \bar{q}_i) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} + \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} - \frac{2}{3} \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}} \right], \quad (4.1.4)$$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q_i q_i \rightarrow q_i q_i) = \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(\bar{q}_i \bar{q}_i \rightarrow \bar{q}_i \bar{q}_i) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{t}^2 + \hat{s}^2}{\hat{u}^2} + \frac{\hat{u}^2 + \hat{s}^2}{\hat{t}^2} - \frac{2}{3} \frac{\hat{s}^2}{\hat{u}\hat{t}} \right], \quad (4.1.5)$$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow gg) = \frac{32\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} - \frac{9}{4} \left( \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right) \right], \quad (4.1.6)$$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \rightarrow q\bar{q}) = \frac{\pi\alpha_s^2}{6\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} - \frac{9}{4} \left( \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right) \right], \quad (4.1.7)$$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(qg \rightarrow qg) = \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(\bar{q}g \rightarrow \bar{q}g) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[ -\frac{\hat{u}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{9}{4} \left( \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right) \right], \quad (4.1.8)$$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \rightarrow gg) = \frac{9\pi\alpha_s^2}{2\hat{s}^2} \left[ 3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2} \right] \quad (4.1.9)$$

である。ただし、 $i \neq j$  である。これらから parton model を応用して素過程において終状態に表れる parton の不変質量分布を求めてみる。LHC 実験での結果が [27] より ATLAS Collaboration に

よって与えられており、シミュレーションするには、まずこの実験結果を再現出来ているかを確認しなければならない。計算結果を図 4.1 に示す。

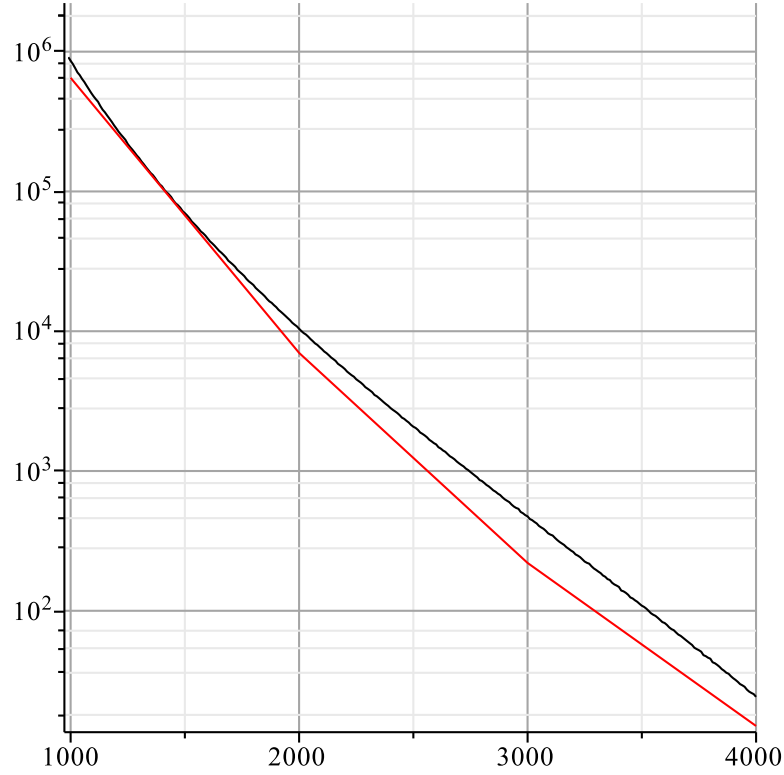


図 4.1 QCD 過程 (4.1.1) の終状態にあらわれる parton 対または 2-jets の不変質量分布。重心系のエネルギー  $\sqrt{s} = 8\text{TeV}$  ,  $\int Ldt = 20.3\text{fb}^{-1}$  , 縦方向運動量の下限は  $50\text{GeV}$  , rapidity の cut は 2.8 である。グラフの縦軸はイベント数。横軸は不変質量 [GeV]。赤色の線が ATLAS による実験結果 (2-jets) [27]。黒色の線が計算結果 (parton 対) である。

この計算結果は実験結果の傾向をよく表していると言える。実験結果と完全に一致しない原因は、計算結果は終状態の parton 対の不変質量分布であるのに対し、実験ではハドロニ化した 2-jets の不変質量分布を観測しているからであることが挙げられる。実験結果をより再現したい場合は、終状態の parton 対をハドロニ化する必要がある。新粒子、または新物理による効果を探る際、この QCD 過程の不変質量分布を背景に、新粒子の不変質量分布への寄与をシグナルとして探索をするため、この過程の不変質量分布を QCD background と呼ぶことにする。

## 4.2 signal-to-noise ratio

前章では Kaluza-Klein グルーオン  $g_{KK}$  を含む過程による不変質量分布、前節では QCD における過程による不変質量分布がそれぞれ求まったので、今度は Kaluza-Klein グルーオンによるシグナルが発見できるかどうかを見積もらなければならない。そのために次のような量を定義する:

$$\frac{N_s}{\sqrt{N_b}}. \quad (4.2.1)$$

ここで

$N_s = (g_{KK}$ を含む過程のみを Kaluza – Klein グルーオンの質量  $m_1$  付近で積分して得られたイベント数),  
 $N_b = (\text{QCD の過程のみを } m_1 \text{ 付近で積分して得られたイベント数})$

である。この比のことを signal-to-noise ratio といい、これは信号の統計的有意さを与える。イベント数を得るための不変質量に関する積分は、本研究においては、Kaluza-Klein グルーオンの質量を中心に  $\pm 250 \text{ GeV}$  の領域で行った。

### 4.3 衝突エネルギーが 8 TeV の LHC の場合

まず衝突エネルギーが 8 TeV の LHC の場合 signal-to-noise ratio の値を計算する。rapidity の cut は 2.5 から 2.0 , 1.5 の 3 つをとり、小さくなるにつれて観測されるイベントが大角度のものに限られていく。本論文では、探索する Kaluza-Klein グルーオンの質量は  $m_1 = 2, 3, 4 \text{ TeV}$  を例にとった。縦方向運動量の下限が 30 GeV の計算結果のプロットが図 4.2、500 GeV のときの計算結果のプロットが図 4.3 である。

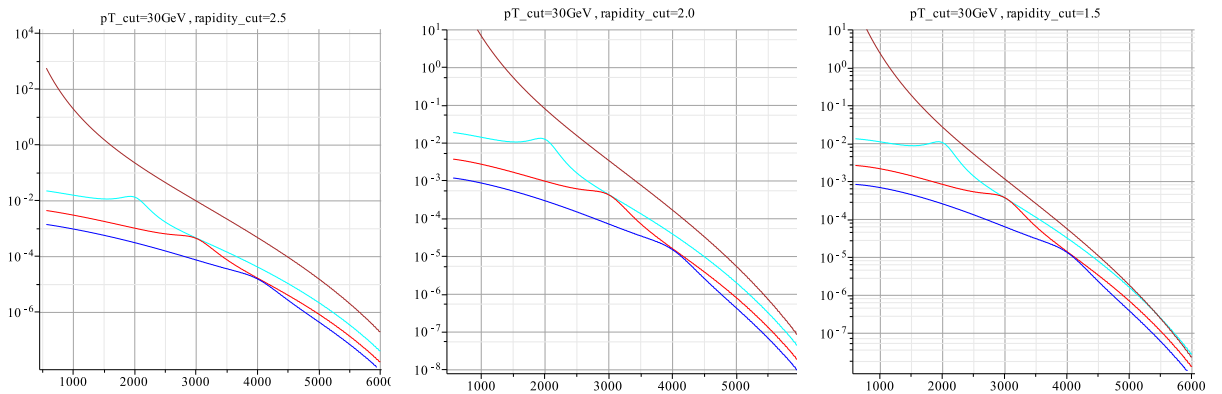


図 4.2 衝突エネルギー 8 TeV の場合の、QCD の 2 体散乱と Kaluza-Klein グルーオンを含む 2 体散乱の不変質量分布の計算結果。いずれも縦軸は  $d\sigma/dM[\text{pb/GeV}]$ 、横軸は不変質量  $M[\text{GeV}]$  である。積分領域はそれぞれ、縦方向運動量の下限を 30 GeV、rapidity の cut を 2.5, 2.0, 1.5 とした。

図中の茶色の線が QCD background である。また水色、赤色、青色の線は順に Kaluza-Klein グルーオンの質量が 2, 3, 4 TeV の場合の不変質量分布を表している。図 4.2、4.3 から読み取れる共通のことは 2 つある。まず rapidity の cut を強くすると QCD background の微分散乱断面積が Kaluza-Klein グルーオンの微分散乱断面積と比べると大きく下がっていることがわかる。これは QCD background には散乱角が小さなイベントが多く含まれているからである。このことから、rapidity の cut を強くすれば signal-to-noise ratio は良くなるということができ、Kaluza-Klein グルーオンのイベント数も少なくなってしまうということや実験装置による限界等があるため、rapidity の cut の強さには上限がある。

次に、探索する Kaluza-Klein グルーオンの質量と幅の関係 (3.4.12) についてである。探索する Kaluza-Klein グルーオンの質量が大きくなるほど、幅が広がりシグナルが見えにくくなる。この問

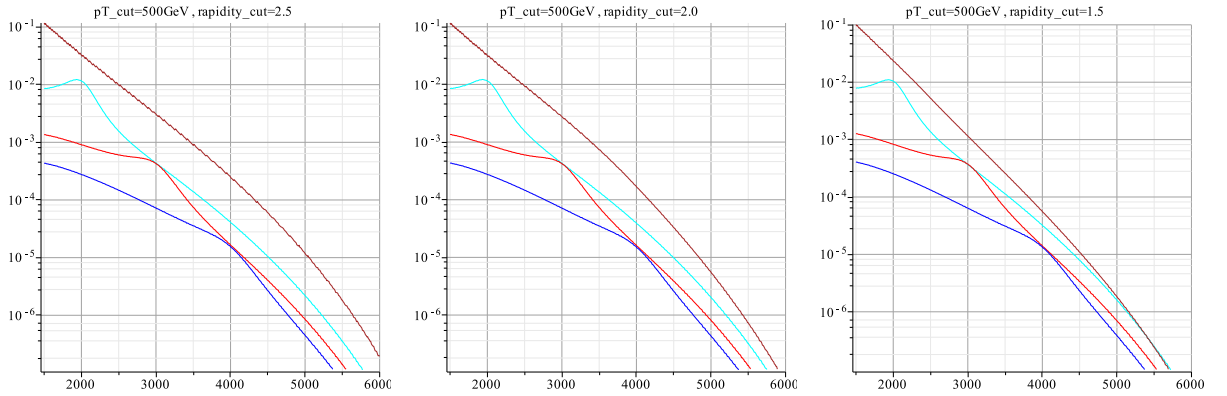


図 4.3 衝突エネルギー 8 TeV の場合の、QCD の 2 体散乱と Kaluza-Klein グルーオンを含む 2 体散乱の不変質量分布の計算結果。いずれも縦軸は  $d\sigma/dM$  [pb/GeV]、横軸は不変質量  $M$  [GeV] である。積分領域はそれぞれ、縦方向運動量の下限を 500 GeV、rapidity の cut を 2.5, 2.0, 1.5 とした。

$\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}, \int Ldt = 20.3 \text{ fb}^{-1}$	signal-to-noise ratio $S/\sqrt{B}$		
rapidity cut	2.5	2.0	1.5
$p_T$ -cut = 30 GeV			
m = 2 TeV	70.9	111.4	160.7
m = 3 TeV	13.0	20.9	31.7
m = 4 TeV	2.22	3.60	5.55
$p_T$ -cut = 500 GeV			
m = 2 TeV	164.5	165.4	173.0
m = 3 TeV	22.6	23.6	31.7
m = 4 TeV	3.08	3.60	5.55

表 4.1  $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}, \int Ldt = 20.3 \text{ fb}^{-1}$  における signal-to-noise ratio.

題は衝突エネルギーを上げたり、luminosity を上げたりすることで統計を増やすことで解消し得る。

これらの計算結果から、現行データである、衝突エネルギー  $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}$ 、integrated luminosity  $\int Ldt = 20.3 \text{ fb}^{-1}$  を用いて、各質量について signal-to-noise ratio を計算した結果を表に表したものが表 4.1 である。一般に、rapidity の cut が強くなる程、また探索する Kaluza-Klein グルーオンの質量が大きくなるほど、シグナルのイベント数は少なくなっていくが、例えば、Kaluza-Klein グルーオンの質量が 4 TeV、rapidity の cut が 1.5 のときのシグナルのイベント数は 140 である。signal-to-noise ratio が 5 を超えたとき有意な結果であるとすれば、rapidity の cut が 2.5 における結果では、Kaluza-Klein グルーオンの質量への制限は

$$m_1 \gtrsim 3 \text{ TeV}$$

であると言える。ATLAS[27] によって、崩壊幅と質量との比  $\Gamma/m$  が 0.05, 0.03, 0.01, 0.005 の場合における、Breit-Wigner 型のシグナルを仮定したときの散乱断面積に対して上限がつけられてい



る。しかしながら、本論文で扱っている Kaluza-Klein グルーオンの崩壊幅と質量の比はおよそ 0.23 であるので定量的な議論をすることができない。かわりに CMS から、よく似ている axigluon に対する質量への制限がつけられており [28]、その制限は  $m_{\text{axi}} > 3.6 \text{ TeV}$  である。

もし、rapidity の cut を 1.5 まで許せば Kaluza-Klein グルーオンの質量への制限は

$$m_1 \gtrsim 4 \text{ TeV}$$

であると言える。

#### 4.4 衝突エネルギーが 14 TeV の LHC の場合

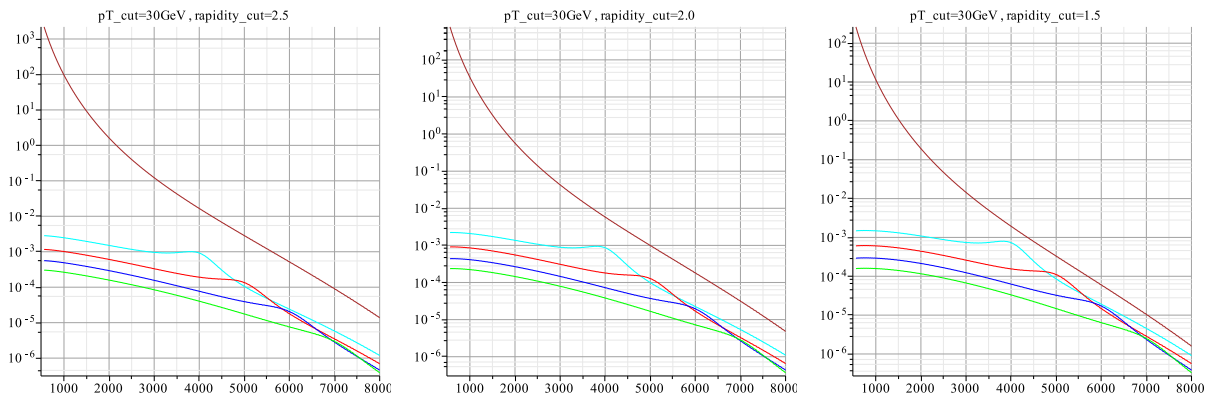


図 4.4 衝突エネルギー 14 TeV の場合の、QCD の 2 体散乱と Kaluza-Klein グルーオンを含む 2 体散乱の不変質量分布の計算結果。いずれも縦軸は  $d\sigma/dM$  [pb/GeV]、横軸は不変質量  $M$  [GeV] である。積分領域はそれぞれ、縦方向運動量の下限を 30 GeV、rapidity の cut を 2.5, 2.0, 1.5 とした。

衝突エネルギーが 14 TeV の場合での signal-to-noise ratio の値を計算する。先の衝突エネルギーが 8 TeV の場合と同様に、rapidity の cut は 2.5 から 2.0 , 1.5 の 3 つをとり、縦方向運動量は下限を 30 , 500 GeV の 2 つをとる。探索する Kaluza-Klein グルーオンの質量は  $m_1 = 4, 5, 6, 7 \text{ TeV}$  を例にとる。図中の茶色の線が QCD background である。また水色、赤色、青色、緑色の線は順に Kaluza-Klein グルーオンの質量が 4, 5, 6, 7 TeV の場合に行った計算による不変質量分布を表している。縦方向運動量が 30 GeV のときの計算結果のプロットが図 4.4、500 GeV のときの計算結果のプロットが図 4.5 である。図から衝突エネルギー 8 TeV の場合と比べると 14 TeV の方が微分散乱断面積の値が大きいことがわかる。

これらの計算結果から衝突エネルギー  $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}$ 、integrated luminosity  $\int L dt = 4.0 \text{ fb}^{-1}$ ,  $25 \text{ fb}^{-1}$ ,  $100 \text{ fb}^{-1}$  を用いて、各質量について signal-to-noise ratio を計算した結果を表に表したものが表 4.2、4.3、4.4 である。また、Kaluza-Klein グルーオンの質量が 7 TeV、rapidity の cut が 1.5、integrated luminosity が  $100 \text{ fb}^{-1}$  のときのシグナルのイベント数は 127 である。signal-to-noise ratio が 5 を超えたとき有意な結果であるとすれば、rapidity の cut が 2.5 における結果では、探索可能な Kaluza-Klein グルーオンの質量への制限は

$$m_1 \lesssim 6 \text{ TeV}$$

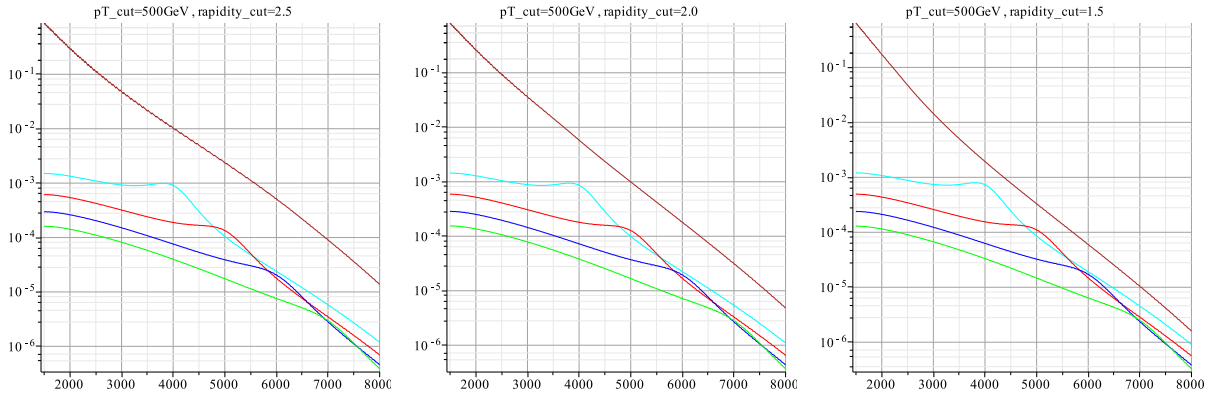


図 4.5 衝突エネルギー 14 TeV の場合の、QCD の 2 体散乱と Kaluza-Klein グルーオンを含む 2 体散乱の不変質量分布の計算結果。いずれも縦軸は  $d\sigma/dM$  [pb/GeV]、横軸は不変質量  $M$  [GeV] である。積分領域はそれぞれ、縦方向運動量の下限を 500 GeV、rapidity の cut を 2.5, 2.0, 1.5 とした。

$\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}, \int Ldt = 4.0 \text{ fb}^{-1}$	signal-to-noise ratio $S/\sqrt{B}$		
rapidity cut	2.5	2.0	1.5
$p_T$ -cut = 30 GeV			
m = 4 TeV	9.45	14.9	22.0
m = 5 TeV	3.45	5.52	8.31
m = 6 TeV	1.25	2.01	3.08
m = 7 TeV	0.43	0.70	1.09
$p_T$ -cut = 500 GeV			
m = 4 TeV	11.9	14.9	22.0
m = 5 TeV	3.77	5.52	8.31
m = 6 TeV	1.26	2.01	3.08
m = 7 TeV	0.43	0.70	1.09

表 4.2  $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}, \int Ldt = 4.0 \text{ fb}^{-1}$  における signal-to-noise ratio。

であると言える。もし、rapidity の cut を 1.5 まで許せば探索可能な Kaluza-Klein グルーオンの質量への制限は

$$m_1 \lesssim 7 \text{ TeV}$$

であると言える。

以上の結果より、将来的に、 $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}$  , integrated luminosity =  $100 \text{ fb}^{-1}$  で Kaluza-Klein グルーオンの質量 6 TeV まで探索が可能であることがわかった。また rapidity の cut 次第で 7 TeV までの探索可能性が示唆された。

$\sqrt{s} = 14 \text{ TeV} , \int Ldt = 25 \text{ fb}^{-1}$	signal-to-noise ratio $S/\sqrt{B}$		
rapidity cut	2.5	2.0	1.5
$p_T\text{-cut} = 30 \text{ GeV}$			
m = 4 TeV	23.6	37.4	55.0
m = 5 TeV	8.62	13.8	20.7
m = 6 TeV	3.13	5.04	7.70
m = 7 TeV	1.09	1.76	2.72
$p_T\text{-cut} = 500 \text{ GeV}$			
m = 4 TeV	29.8	37.4	55.0
m = 5 TeV	9.43	13.8	20.7
m = 6 TeV	3.16	5.04	7.70
m = 7 TeV	1.09	1.76	2.72

表 4.3  $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV} , \int Ldt = 25 \text{ fb}^{-1}$  における signal-to-noise ratio。

$\sqrt{s} = 14 \text{ TeV} , \int Ldt = 100 \text{ fb}^{-1}$	signal-to-noise ratio $S/\sqrt{B}$		
rapidity cut	2.5	2.0	1.5
$p_T\text{-cut} = 30 \text{ GeV}$			
m = 4 TeV	47.2	74.9	110.0
m = 5 TeV	17.2	27.6	41.5
m = 6 TeV	6.26	10.1	15.4
m = 7 TeV	2.18	3.53	5.45
$p_T\text{-cut} = 500 \text{ GeV}$			
m = 4 TeV	59.6	74.9	110.0
m = 5 TeV	18.8	27.6	41.5
m = 6 TeV	6.32	10.0	15.4
m = 7 TeV	2.18	3.53	5.45

表 4.4  $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV} , \int Ldt = 100 \text{ fb}^{-1}$  における signal-to-noise ratio。

## 第 5 章

# 結論と議論

標準模型では Higgs 場を導入することによってゲージ対称性を破らない項として湯川相互作用項が許されるが、その結合定数は標準模型のパラメータとして自由に導入することが出来る。一方で、ゲージヒッグス統一模型のうち、高次元時空にフェルミオンの bulk mass を導入することによってフェルミオンの波動関数を余剰次元に分布させて湯川相互作用を再現する模型では、この標準模型のパラメータはフェルミオンの波動関数の分布の仕方によって決定するという物理的な意味をもたせることができる。しかしながら、ゲージヒッグス統一模型は、なぜ観測されているようなパラメータの値を出すような波動関数の分布の仕方をするのかを説明することができない。また、有効理論として標準模型のゲージ対称性を再現するようにゲージヒッグス統一模型では境界条件を課すが、なぜこのような境界条件が課されるのか、言い換えれば、知られている標準模型のゲージ対称性がなぜ  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  となるのかをゲージヒッグス統一模型は説明することができない。すべての自然現象を説明する理論としてゲージヒッグス統一模型をみなすならば、これらは克服すべき点であると言えるし、そうでなければ、ゲージヒッグス統一模型はさらにより基本的な理論からの有効理論であるとみなされなければならないと言える。

本論文においてははじめに、標準模型の電弱ゲージ場と Higgs 場を高次元時空のゲージ場に統一されるとするゲージヒッグス統一模型では、標準模型の強い相互作用に関連するゲージ対称性も高次元時空の対称性であると考えたほうが自然であるということを議論した。したがって、余剰次元をコンパクト化することによって、Kaluza-Klein グルーオンが必然的にあらわれる。

次にクォークと Kaluza-Klein グルーオンとの 3 点相互作用の結合定数が 0 でない値をもつことを示すことによって LHC の実験によって Kaluza-Klein グルーオンの探索が可能であることがわかった。LHC の実験によって Kaluza-Klein グルーオンを探索するために、parton model を応用することによって、Kaluza-Klein グルーオンを含む 2 体散乱の散乱断面積を計算し、parton level における、終状態の parton 対に関する不変質量分布が得られた。探索する Kaluza-Klein グルーオンの質量を例として 2, 3, 4 TeV をとり、現在の LHC の実験から得られている実験結果からの制限をかけることが出来た。制限は rapidity の cut にもよるが、おおよそ可能な Kaluza-Klein グルーオンの質量への制限は

$$m_1 \gtrsim 4 \text{ TeV}$$

であることがわかった。

さらに、将来予定されている衝突エネルギー 14 TeV での LHC の実験による Kaluza-Klein グルーオンの探索はどの程度の質量まで可能かを見積もることが出来た。探索可能な Kaluza-Klein グ

ルーオンの質量への制限は

$$m_1 \lesssim 7 \text{ TeV}$$

であると言える。

模型によってはフェルミオンの余剰次元方向への分布の仕方が異なる。4次元時空での3点結合定数を求める時に余剰次元方向について積分をするために、分布の仕方の違いからくる影響は Kaluza-Klein グルーオンとの3点結合定数の値に与える。したがって、考えている模型に対応して  $g^*$  の値を変えることで、本論文と同じ方法で探索可能な Kaluza-Klein グルーオンの質量への制限について議論をすることが出来る。

今回扱った、高次元時空に  $SU(3)_C \times SU(3)_W$  ゲージ対称性を課す模型では Weinberg 角が正しく導出されないということがわかっている。そのため新たに別の  $U(1)$  ゲージ対称性を高次元時空に課すことによって、Weinberg 角を再現するという模型も存在する [16]。この模型に対して、探索可能な Kaluza-Klein グルーオンの質量への制限について議論したい場合も、不変散乱振幅における結合定数  $\alpha_s$  の値を変えて計算をすることによって得られる。

本論文の計算結果は parton level の計算である。今後の課題として、実際に実験で観測される結果と厳密に比較するためには、2体散乱の終状態を「ハドロ化」しなければならない。また、世代間の混合を考慮してより精密な議論をする必要もある。余剰次元方向フェルミオンの波動関数の分布が右手系と左手系とで異なることから起因するが、Kaluza-Klein グルーオンとフェルミオンとの3点相互作用の結合定数が右手系と結合するか、左手系と結合するかで値が異なることも非常に興味深い事実である。この事実からどのような散乱過程が新たに現れうるかということも議論する必要がある。

## 付録 A

# 散乱の過程

本研究では、粒子の 2 体 - 2 体散乱をよく使うのでここにまとめておく。

### A.1 重心系での散乱断面積と Mandelstam 変数

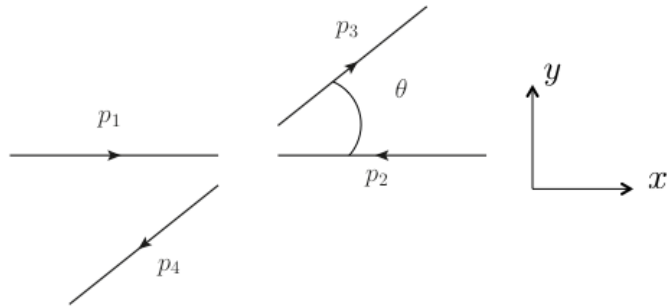


図 A.1 粒子の 2 体散乱

始状態 2 粒子、終状態 2 粒子の散乱過程において、重心系の散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|\mathbf{p}'|}{(p_1^0 + p_2^0)^2 |\mathbf{p}|} \sum |\mathcal{M}|^2$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

で与えられる。ここで、重心系では

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$$

$$\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 \equiv \mathbf{p}'$$

とできることを用いた。さらに Lorentz 不変な量として

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$

を導入する。これは Mandelstam 変数と呼ばれる量で外線粒子の質量  $m_i$  を用いて

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2$$

を満たす。

さて、高エネルギー極限では、外線粒子の質量を無視できる。したがって、

$$p_1^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} \sim |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}| = p_2^0$$

$$p_3^0 = \sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2} \sim |\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}'| = p_4^0$$

とできて、さらにエネルギー保存則より

$$p_1^0 + p_2^0 = p_3^0 + p_4^0 \Rightarrow 2|\mathbf{p}| = 2|\mathbf{p}'|$$

$$\therefore |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \equiv p$$

が成り立つ。このとき各粒子の 4 元運動量は

$$p_1^\mu = (p \quad p \quad 0 \quad 0)$$

$$p_2^\mu = (p \quad -p \quad 0 \quad 0)$$

$$p_3^\mu = (p \quad p \cos \theta \quad p \sin \theta \quad 0)$$

$$p_4^\mu = (p \quad -p \cos \theta \quad -p \sin \theta \quad 0)$$

となるので高エネルギー極限での Mandelstam 変数は

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2 = 2p_3 \cdot p_4 = 4p^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = -2p_1 \cdot p_3 = -2p_2 \cdot p_4 = -2p^2(1 - \cos \theta) = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \quad (\text{A.1.1})$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = -2p_1 \cdot p_4 = -2p_2 \cdot p_3 = -2p^2(1 + \cos \theta) = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta)$$

と書き換えられる。さらに散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \sum |\mathcal{M}|^2$$

と与えられる。

さらに重心系では  $\varphi$  依存性はないため

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= d(-\cos \theta) d\varphi$$

より両辺  $\varphi$  積分して

$$\frac{d\sigma}{d(-\cos \theta)} = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{s} \sum |\mathcal{M}|^2$$

となる。さらに積分を実行すれば散乱断面積が得られる。

$$\sigma(s) = \int_1^{-1} d(-\cos \theta) \frac{1}{32\pi} \frac{1}{s} \sum |\mathcal{M}|^2$$

$$= \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{d\sigma}{d(-\cos \theta)} \quad (\text{A.1.2})$$

一方、式 (A.1.2) の左辺は式 (A.1.1) より

$$d(-t) = \frac{s}{2} d(-\cos\theta)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d(-\cos\theta)} &= \frac{d\sigma}{d(-t)} \cdot \frac{d(-t)}{d(-\cos\theta)} \\ &= \frac{s}{2} \frac{d\sigma}{d(-t)} \end{aligned}$$

となるため

$$\frac{d\sigma}{d(-t)} = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{s^2} \sum |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{A.1.3})$$

となる。

先の Mandelstam 変数は不変質量  $M$  と rapidity  $y$  で書き換えることが出来る。 $s = M^2$  であることと式 (2.2.3) より

$$\cos\theta = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$\therefore t = -\frac{M^2}{2} \frac{e^{-y}}{\cosh y}, \quad u = -\frac{M^2}{2} \frac{e^y}{\cosh y}$$

であることがわかる。また

$$d(\cos) = \frac{dy}{\cosh^2 y}$$

となることから散乱断面積 (A.1.2) は

$$\sigma(s) = \int dy \frac{1}{\cosh^2 y} \frac{s}{2} \frac{d\sigma}{d(-t)}$$

で与えられる。

## A.2 深非弾性レプトン核子散乱

レプトン-核子散乱から核子の構造についての知見が得られる。まず

$$e + N \rightarrow e + X$$

について、結合定数  $\alpha$  の leading order だけを考慮し、電子の質量は無視する。電子は virtual な光子を放出して、それを核子が吸収し、その後、多くのハドロンに壊れる。

運動力学的量は表 A.1 にまとめてある<sup>\*1</sup>。

<sup>\*1</sup> 実験室系では、電子の質量  $m \rightarrow 0$  , 核子の 3 元運動量  $p \rightarrow 0$  としてやると

$$p \cdot k = (M, \mathbf{0}) \times (|\mathbf{k}|, k) = ME$$



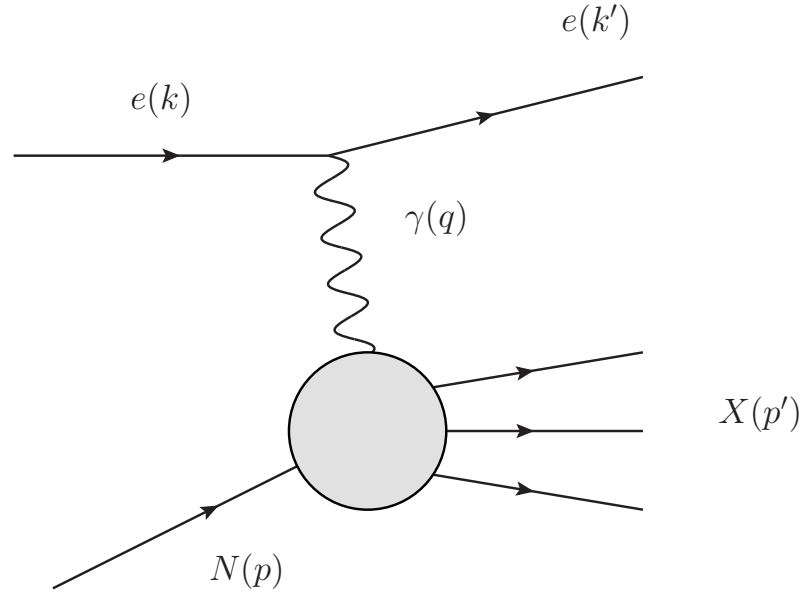


図 A.2 深非弾性レプトン核子散乱

表 A.1 レプトン-核子散乱の運動力学的量

量	説明
$M$	核子の質量
$E = pk/M$	実験室系での入射レプトンのエネルギー
$E' = pk'/M$	実験室系での散乱後のレプトンエネルギー
$\theta$	実験室系での散乱角度
$q = k - k'$	4元運動量遷移
$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \theta/2$	4元運動量遷移の平方
$\nu = pq/M$	実験室系でのエネルギー遷移
$W^2 = (p + q)^2$	終状態のハドロンの不変平方質量
$x \equiv \omega^{-1} = Q^2/(2M\nu)$	Bjorken スケーリング変数 ( $0 \leq x \leq 1$ )
$P = M\nu/Q = Q/(2x)$	Breit 系での nucleon の運動量

この過程に対する  $S$ -行列要素は

$$\begin{aligned}
 & \langle e(k')X(p')|S|e(k)N(p) \rangle \\
 &= ie^2 \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \frac{1}{q^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q) \langle X(p') | \mathcal{J}_\mu(0) | N(p) \rangle \\
 &\equiv i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q) \mathcal{M}
 \end{aligned}$$

ここで  $\mathcal{J}_\mu$  はハドロン部分の電磁相互作用カレントである。

散乱断面積は高エネルギー極限で

$$\begin{aligned} & d\sigma(e(k) + N(p) \rightarrow e(k') + X(p')) \\ &= \left( \prod_i \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^2 2p'_i} \right) \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'^0} \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p \cdot k)^2}} (2\pi)^2 \delta^{(4)} \left( \sum_i p'_i - p - q \right) \end{aligned}$$

となり、ここで  $\sum |\mathcal{M}|^2$  は始状態の粒子のスピンについて平均を取っていると約束すると、電子も核子もスピン 1/2 なので

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{q^4} |\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \langle X(p') | \mathcal{J}_\mu(0) | N(p) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{q^4} 4 (k'^\mu k^\nu + k^\mu k'^\nu - (k' \cdot k) g^{\mu\nu}) \sum \langle N(p) | \mathcal{J}_\nu(0) | X(p') \rangle \langle X(p') | \mathcal{J}_\mu(0) | N(p) \rangle \\ &\equiv \frac{(4\pi\alpha)^2}{q^4} l^{\mu\nu} \sum \langle N(p) | \mathcal{J}_\nu(0) | X(p') \rangle \langle X(p') | \mathcal{J}_\mu(0) | N(p) \rangle \end{aligned}$$

右辺の和はすべてのハドロン  $X$  に関する和を取っている。

実験系では

$$k^\mu = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k}), \quad k'^\mu = (|\mathbf{k}'|, \mathbf{k}'), \quad p = (M, 0)$$

となるので、散乱断面積は

$$\begin{aligned} & d\sigma(e(k) + N(p) \rightarrow e(k') + X(p')) \\ &\equiv \frac{dE' d\Omega}{q^4} \frac{E'}{E} \alpha^2 l^{\mu\nu} W_{\nu\mu} \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$W_{\nu\mu} \equiv \left( \prod_i \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2p'_i} \right) \frac{1}{2M} \sum \langle N(p) | \mathcal{J}_\nu(0) | X(p') \rangle \langle X(p') | \mathcal{J}_\mu(0) | N(p) \rangle (2\pi)^3 \delta^{(4)} \left( \sum_i p'_i - p - q \right)$$

となる、次元  $M^{-1}$  をもつ量である。さらにこの量は

- 可能なハドロン  $X$  について和をとっている
- 始状態の核子が偏極されていない

ということから  $p$  と  $q$  の Lorentz テンソルであり、中にカレントを含んでいるために保存則

$$\partial \mathcal{J} = 0$$

から

$$\begin{aligned} \partial_\mu \int dx e^{i(p'-p)x} \langle X(p') | \mathcal{J}^\mu(0) | N(p) \rangle &= \int dx e^{i(p'-p)x} q_\mu \langle X(p') | \mathcal{J}^\mu(0) | N(p) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることなどより、 $W_{\nu\mu}$  をテンソル基底を用いて以下のように展開できる。

$$W_{\nu\mu} = \left( -g_{\nu\mu} + \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} \right) W_1(\nu, Q^2) + \left( p_\nu - \frac{(pq)q_\nu}{q^2} \right) \left( p_\mu - \frac{(pq)q_\mu}{q^2} \right) \frac{1}{M^2} W_2(\nu, Q^2)$$

ここで  $W_1, W_2$  は核子の構造関数としてよく知られている量である。

バリオン数保存より終状態のハドロンの不変質量は少なくとも核子の不変質量と同じ、またはそれ以上でなければならない。運動力学的な制限が

$$W^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2M\nu - Q^2 \geq M^2$$

とかかり、等号は弾性散乱 (elastic scattering) に対応する。ここで  $pq \equiv M\nu$  とすると  $Q^2 \leq 2M\nu$  となるので

$$0 \leq \frac{Q^2}{2M\nu} \equiv x \leq 1$$

と言う無次元量を定義することができ、これを Bjorken スケーリング変数という。

ここでは核子の構造が知りたいので、3 元運動量遷移  $q$  が大きい極限を考慮する。  $x$  を固定したままで

$$Q \rightarrow \infty$$

とすると当然

$$P = \frac{Q}{2x} \rightarrow \infty$$

となる。つまり核子が高速で運動している系を記述することになる。この極限を Bjorken 極限といい、parton model を適用することが出来る。したがって、電子と parton の散乱断面積を計算し、それらを parton distribution function をふまえて parton 毎に足し合わせることによって、求めたい核子との散乱断面積が得られる。

まず、電子と parton との散乱断面積を求める。

$$\begin{aligned} & \langle e(k')a_i(p'_i) | S | e(k)a_i(p_i) \rangle \\ &= -e^2 Q_q \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \frac{1}{(k - k')^2} \bar{u}_i(p'_i) \gamma_\mu u_i(p_i) i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_i + k' - p_i - k) \\ &\equiv i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_i + k' - p_i - k) \mathcal{M}_i \end{aligned}$$

ここで、 $Q_q$  は parton の電荷である。不変散乱振幅の 2 乗はスピンについて平均をとったあとで

$$\begin{aligned} & \sum |\mathcal{M}_i| \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^4 Q_q^2}{q^4} \sum |\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \bar{u}_i(p'_i) \gamma_\mu u_i(p_i)|^2 \\ &= \frac{(4\pi\alpha)^2 Q_q^2}{q^4} l^{\mu\nu} 4 \{ p'_{i\mu} p_{i\nu} + p_{i\mu} p'_{i\nu} + [m_i^2 - (p'_i \cdot p_i)] g_{\mu\nu} \} \end{aligned}$$

となる。したがって散乱断面積は

$$\begin{aligned} & d\sigma_i(e(k) + a_i(p_i) \rightarrow e(k') + a_i(p'_i)) \\ &= \frac{d^4 p'_i}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p_i'^2 - m_i^2) \theta(p_i'^0) \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \frac{\sum |\mathcal{M}_i|^2}{4(p_i \cdot k)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_i + k' - p_i - k) \\ &= (2\pi) \delta[2p_i \cdot q + q^2] \theta((p_i + q)_0) \frac{dE' d\Omega' E'^2}{(2\pi)^3 2E'} \frac{1}{4(p_i \cdot k)} \\ & \quad \times \underbrace{\frac{(4\pi\alpha)^2 Q_q^2}{q^4} l^{\mu\nu} 4 \{ p'_{i\mu} p_{i\nu} + p_{i\mu} p'_{i\nu} + [m_i^2 - (p'_i \cdot p_i)] g_{\mu\nu} \}}_{(*)} \Big|_{p'_i = p_i + q} \end{aligned}$$

となる。ここで、(\*)の部分について

$$\begin{aligned} & (p_i + q)_\mu p_{i\nu} + p_{i\mu}(p_i + q)_\nu + [m_i^2 - (p_i + q) \cdot p_i] g_{\mu\nu} \\ &= 2p_{i\mu} p_{i\nu} + q_\mu \cdot p_{i\nu} + p_{i\mu} \cdot q_\nu + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

となるので、

$$A \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + B \left( p_{i\mu} - \frac{(p_i q) q_\mu}{q^2} \right) \left( p_{i\nu} - \frac{(p_i q) q_\nu}{q^2} \right)$$

と係数の比較をすると

$$A = -\frac{q^2}{2}, \quad B = 2$$

となる。また  $\delta$  関数については

$$\begin{aligned} \delta(2p_i q + q^2) &= \delta(-2\xi_i P(-Q) + (-Q^2)) \\ &= \frac{1}{2PQ} \delta(\xi_i - x) \end{aligned}$$

である。結果、素過程の散乱断面積は

$$\begin{aligned} & d\sigma_i(e(k) + a_i(p_i) \rightarrow e(k') + a_i(p'_i)) \\ &= (2\pi) \frac{1}{2PQ} \delta(\xi_i - x) \theta((p_i + q)_0) \frac{dE' d\Omega}{2(2\pi)^3} \frac{E'}{4p_i \cdot k} \frac{(4\pi\alpha)^2 Q_q^2}{q^4} l^{\mu\nu} \\ & \quad \times \left\{ \left( -\frac{q^2}{2} \right) \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + 2 \left( p_{i\mu} - \frac{(p_i q) q_\mu}{q^2} \right) \left( p_{i\nu} - \frac{(p_i q) q_\nu}{q^2} \right) \right\} \\ &= \frac{dE' d\Omega'}{q^4} \frac{E'}{E} \alpha^2 l^{\mu\nu} \frac{Q_q^2}{4PQM\xi_i} \delta(\xi_i - x) \\ & \quad \times \left\{ \left( -\frac{q^2}{2} \right) \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + 2\xi_i^2 \left( p_\mu - \frac{(pq) q_\mu}{q^2} \right) \left( p_\nu - \frac{(pq) q_\nu}{q^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。parton model の仮定から

$$d\sigma = \sum_i \int_0^1 \xi_i N_i(\xi_i) d\sigma_i$$

であるので、構造関数と parton distribution function との間に関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned} 4MW_i(\nu, Q^2) &= \sum_i N_i(x) Q_q^2 \\ \nu W_2(\nu, Q^2) &= \sum_i x N_i(x) Q_q^2 \end{aligned}$$

このようにして、parton distribution function は実験で測られる量である。

## 謝辞

本論文を執筆するにあたり、膨大な時間を割いて指導してくださいました安田修教授、北澤敬章助教に心よりお礼申し上げます。また研究室のメンバーである小原怜さん、深澤信也さんには筆舌に尽くし難いほどお世話になりました。芝田健二君、柳田秀明君、同期の中田洋君、清家慎一郎君、吉田賢典君、故有元秀行君をはじめとして枚挙に暇が無いほど多くの人たちの物理に対するひたむきな姿勢が研究生生活を送る上で、力になったことは言うまでもありません。そして最後に、私を支えてくれた家族に深甚の謝意を表します。

## 参考文献

- [1] S. L. Glashow, “Partial Symmetries of Weak Interactions,” Nucl. Phys. **22** (1961) 579.
- [2] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- [3] A. Salam, “Weak and Electromagnetic Interactions,” Conf. Proc. C **680519** (1968) 367.
- [4] S. Schael *et al.* [ALEPH and DELPHI and L3 and OPAL and SLD and LEP Electroweak Working Group and SLD Electroweak Group and SLD Heavy Flavour Group Collaborations], “Precision electroweak measurements on the  $Z$  resonance,” Phys. Rept. **427** (2006) 257
- [5] G. Altarelli and M. W. Grunewald, “Precision electroweak tests of the standard model,” Phys. Rept. **403-404** (2004) 189 [hep-ph/0404165].
- [6] L. Evans and P. Bryant, “LHC Machine,” JINST **3** (2008) S08001.
- [7] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” Phys. Lett. B **716** (2012) 1 [arXiv:1207.7214 [hep-ex]].
- [8] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC,” Phys. Lett. B **716** (2012) 30 [arXiv:1207.7235 [hep-ex]].
- [9] G. 't Hooft, “Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking,” NATO Sci. Ser. B **59** (1980) 135.
- [10] M. Dine, “Naturalness Under Stress,” arXiv:1501.01035 [hep-ph].
- [11] N. S. Manton, “A New Six-Dimensional Approach to the Weinberg-Salam Model,” Nucl. Phys. B **158** (1979) 141.
- [12] D. B. Fairlie, “Higgs’ Fields and the Determination of the Weinberg Angle,” Phys. Lett. B **82** (1979) 97.
- [13] Y. Hosotani, “Dynamical Mass Generation by Compact Extra Dimensions,” Phys. Lett. B **126** (1983) 309.
- [14] H. Hatanaka, T. Inami and C. S. Lim, “The Gauge hierarchy problem and higher dimensional gauge theories,” Mod. Phys. Lett. A **13** (1998) 2601 [hep-th/9805067].
- [15] G. Burdman and Y. Nomura, Nucl. Phys. B **656** (2003) 3 [hep-ph/0210257].
- [16] C. A. Scrucca, M. Serone and L. Silvestrini, “Electroweak symmetry breaking and fermion masses from extra dimensions,” Nucl. Phys. B **669** (2003) 128 [hep-ph/0304220].
- [17] M. Kubo, C. S. Lim and H. Yamashita, “The Hosotani mechanism in bulk gauge theories with an orbifold extra space  $S^{*1} / Z(2)$ ,” Mod. Phys. Lett. A **17** (2002) 2249 [hep-

- ph/0111327].
- [18] N. Haba, Y. Hosotani, Y. Kawamura and T. Yamashita, “Dynamical symmetry breaking in gauge Higgs unification on orbifold,” *Phys. Rev. D* **70** (2004) 015010 [hep-ph/0401183].
- [19] Y. Adachi, N. Kurahashi, C. S. Lim and N. Maru, “Flavor Mixing in Gauge-Higgs Unification,” *JHEP* **1011** (2010) 150 [arXiv:1005.2455 [hep-ph]].
- [20] F. Englert and R. Brout, “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321.
- [21] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508.
- [22] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], “Measurement of the differential and double-differential Drell-Yan cross sections in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV,” *JHEP* **1312** (2013) 030 [arXiv:1310.7291 [hep-ex]].
- [23] The Durham HepData Project <http://hepdata.cedar.ac.uk/pdf/pdf3.html>
- [24] Y. Kawamura, “Gauge symmetry breaking from extra space  $S^{*1} / Z(2)$ ,” *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000) 613 [hep-ph/9902423].
- [25] D. A. Dicus, C. D. McMullen and S. Nandi, “Collider implications of Kaluza-Klein excitations of the gluons,” *Phys. Rev. D* **65** (2002) 076007 [hep-ph/0012259].
- [26] Michael E Peskin and Daniel V. Schroeder, “An Introduction to Quantum Field Theory,” Westview Press, 1995
- [27] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], “Search for new phenomena in the dijet mass distribution using  $pp$  collision data at  $\sqrt{s} = 8$  TeV with the ATLAS detector,” arXiv:1407.1376 [hep-ex].
- [28] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], “Search for resonances and quantum black holes using dijet mass spectra in proton-proton collisions at  $\sqrt{s}=8$  TeV,” arXiv:1501.04198 [hep-ex].