

長基線ニュートリノ振動実験における
ステライルシナリオのT非保存の研究

米谷和浩

首都大学東京大学院 理工学研究科 物理学専攻

2012年 2月 20日

要旨

ニュートリノ振動は素粒子標準模型を超える物理の兆候として現時点で確立している唯一の例である。この現象が確立した 90 年代後半から現在に至るまで、様々な理論的・実験的研究がなされ、現在ではレプトン混合行列の混合角の様相がすべて確認できる段階まで実験が進んでいる。一方、通常のレプトン混合行列の枠組みでは説明のつかない現象も知られている。例えば、LSND という実験は、通常の 3 世代では説明がつかない為、もう 1 種類のニュートリノを加えて他の実験結果と矛盾することなく説明しようとするステライルニュートリノのシナリオが提案された。このシナリオは他の実験から厳しい制限が付けられているが、MiniBooNE の反ニュートリノのデータ、原子炉から出てくるニュートリノフラックスの再評価、ガリウムの太陽ニュートリノ観測装置の較正結果の新解釈等から、近年再び注目されている。

通常の 3 世代の場合とは異なり、このステライルニュートリノのシナリオには 3 個の CP 位相が存在するため、もしステライルニュートリノが存在するならば、ニュートリノのチャンネルによっても CP 非保存の様子が異なるなど、将来の長基線実験での CP の破れの出方が通常の場合とは違ったものになると予想される。本論文ではこのステライルシナリオに着目し、ニュートリノを 1 種類増やした (3+1) スキームでの T 非保存について議論した。T 非保存は長基線ニュートリノ振動実験で物質効果を見逃すことができない場合、CP 位相を綺麗に議論するのに有効な概念である。一般にニュートリノの振動確率は T 保存と T 非保存の項に分けることができるので、実験的にはニュートリノのエネルギースペクトルを正確に測定することができればこの T 非保存項を実質的に決定できることになる。ここでは将来計画として構想されているニュートリノファクトリー実験に照準を合わせ、全てのチャンネルにおいて T 非保存と T 非保存/T 保存の比がエネルギーによってどの様な振る舞いをするのかを調べた。

目次

第1章	はじめに	3
第2章	3世代のニュートリノ振動	5
2.1	真空中のニュートリノ振動	5
2.2	物質中のニュートリノ振動	7
2.2.1	物質中での振動確率	7
2.2.2	物質中の適用例：太陽ニュートリノ	8
2.3	現在の振動パラメータ	13
第3章	ステライルニュートリノ	14
3.1	LSND 実験	14
3.2	ステライルニュートリノのスキーム	15
3.3	その他の $\Delta m^2 \sim O(1\text{eV}^2)$ を示唆している実験	17
3.3.1	MiniBooNE 実験	18
3.3.2	Reactor Antineutrino Anomaly	19
3.4	混合角 $\theta_{14}, \theta_{24}, \theta_{34}$ の上限値	20
第4章	ステライルシナリオのT非保存	21
4.1	物質中でのT非保存の有用性	21
4.2	短基線ニュートリノ振動の場合	23
4.3	長基線ニュートリノ振動の場合	23
4.3.1	真空中の場合	24
4.3.2	物質効果を含めた場合	27
第5章	結論	42
付録A		44
A.1	(3 + 1) スキームの混合行列	44
A.2	(4.61) ~ (4.63) 式、(4.65) ~ (4.67) 式の中身の計算	45

第1章 はじめに

素粒子物理学の目的は物質の一番基本的な構造と、それを支配する基本法則を明らかにすることである。特に物質は何から出来ているのか、という問いは何千年も前から考えられてきていて、物理学が発展した現在も多くの人たちによって物質の基本構造(素粒子)の研究が進められている。

今では物質はクォーク、レプトンからなり、それらの間には4つの力が働くことが分かっている。このうち電磁気力、弱い力、強い力の3つで引き起こされる現象を記述する理論体系が素粒子標準模型である。この標準模型にはクォーク、レプトンだけでなく、力を媒介するゲージ粒子、物質の質量の起源になっているヒッグス粒子が登場し、現在ではヒッグス粒子以外のすべての粒子の存在を実験で確認している。また、ヒッグス粒子も現在行われているLHC実験によりその存在の確認まであと一步のところまで迫っている。

素粒子標準模型は予言された粒子もほぼ見つかっており、実験結果とも良く一致する非常に優れた理論体系ではあるが、世代数の問題や、残りひとつの力である重力をどの様に統一していくか、など問題点もある。そのひとつがニュートリノの質量である。

標準模型ではニュートリノの質量はゼロとされてきた。しかし、スーパーカミオカンデ実験によりニュートリノ振動というニュートリノに質量がないと起きない現象が確認された。この現象は標準模型では説明のつかない唯一の実例として、非常に多くの研究者が精力的に研究してきた。そこで本修士論文でも標準模型を超える物理を探るため、ニュートリノ振動を研究した。

現在ニュートリノ振動が確立してから10年以上経っていて、この現象に関わるパラメータもほとんど確認できる状況になった。このパラメータは通常3世代(ニュートリノの種類が3つ)として解析され、成功を収めているが、3世代では説明の付かない実験結果も報告されている。これをニュートリノ振動として説明するには、もう一種類ニュートリノを増やす必要がある。このため、ニュートリノ振動という標準模型を超える物理を使って、世代数という標準模型では説明の付かないものの手がかりを調べることができる。

また、現在全く測定されていないパラメータはCPの破れを表す位相 δ である。このCPの破れは宇宙の物質・反物質の非対称性を研究する上で非常に大事なパラメータになっている。このパラメータを決定する1つの方法として、ある現象の進行とその逆の進行の差を見る($a \rightarrow b$ と $b \rightarrow a$ と進行する現象の差を見る) T非保存がある。本修士論文では3世代では説明の付かない実験結果を踏まえ、ニュー

トリノの数を増やした上で、T非保存を使ってCP位相の様相を調べた。本論分は第2章でまず3世代のニュートリノ振動について、振動確率など基本的なところを定式化し、第3章で3世代では説明の付かない実験結果の紹介と、どのようにニュートリノの数を増やすのかを述べた。そして第4章で本論であるT非保存について、様々な状況を考え議論した。

第2章 3世代のニュートリノ振動

この章ではまず通常の3世代のニュートリノ振動について述べていく。ただし、この章に限らず、以降すべての章で自然単位系 $c = \hbar = 1$ を取ることにする。

2.1 真空中のニュートリノ振動

ニュートリノが生成される時や観測される時は、弱い相互作用の固有状態 ν_α ($\alpha = e, \mu, \tau$) として振る舞っている。一方、空間を伝搬する時には、質量の固有状態 ν_i ($i = 1, 2, 3$) として振る舞っている。この2つの固有状態の関係は、以下の様なユニタリー行列によって関係づけられている。

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U_{MNS} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} U_{MNS} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.2) \end{aligned}$$

ここで、ユニタリー行列 U_{MNS} のことを巻・中川・坂田行列といい、以降単純に U と表していく事にする。また、 $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) と略記していて、 θ_{ij} のことを混合角、 δ のことを CP 位相と呼ぶ。

また、ニュートリノは質量の非常に軽いスピン 1/2 の粒子なので、その時間発展を記述しようと考えたとディラック方程式を考えなくてはならない。ディラック方程式のエネルギー固有値のなかで、正エネルギーの成分だけを取り出し、各質量固有状態をまとめて記述すると、

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

と書ける。ここで、 $E_i = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}$ である。(2.1) 式と (2.3) 式を用いると、以下の様に相互状態の固有状態の時間発展方程式を書き下す事ができる。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

これを解くと、

$$|\nu_\beta\rangle = \sum_{\alpha,i} U_{\beta i} e^{-iE_i t} U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle \quad (2.5)$$

となる。ここで、(2.4) 式のように行列の形ではなく、見やすくするため成分で記述した。ここから、時間 t 秒後に ν_α から ν_β へ変化する確率を求める事ができ、

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha \rangle|^2 \\ &= \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i\Delta E_{ij} t} \\ &= \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2 + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i\Delta E_{ij} t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。ここで、 $\Delta E_{ij} \equiv E_i - E_j$ である。今、ニュートリノは非常に質量の軽い相対論的粒子であるので、時間 t を距離 L に置き換え、

$$E_i = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2} \simeq |\vec{p}| + \frac{m_i^2}{2|\vec{p}|}$$

と近似して、運動量 $|\vec{p}|$ とエネルギー $E \simeq E_i$ はほぼ等しいとする。また、ユニタリ条件 $\sum U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}$ から、

$$\begin{aligned} \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}|^2 &= \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2 + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

である。これらを (2.6) 式に用いると、

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \left(e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E}} - 1 \right) \\ &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \left\{ \cos \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right) - i \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right) - 1 \right\} \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \text{Re} (U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \text{Im} (U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

と変形できる。ただし、 $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$ とした。ここで注意しておきたいのは、振動確率に質量二乗差 Δm_{ij}^2 が現れている事である。これは、(2.4) 式のハミルトニアン

$$U \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} U^{-1}$$

において、単位行列に比例する値を足し引きしても振動確率に影響がない事を表している。また、振動確率に \sin があるので、この引数が $\pi/2$ になれば最も振動してニュートリノの種類が変化することになる ($\alpha \neq \beta$ のとき)。 \sin の中の引数は、普通の単位系に戻してやると、

$$\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \simeq 1.27 \frac{\Delta m_{ij}^2 [\text{eV}^2] \times L [\text{km}]}{E [\text{GeV}]}$$

となっている。

2.2 物質中のニュートリノ振動

前節は真空中での議論であった。しかし、太陽内部を通過するニュートリノや本論文のメインテーマである長基線ニュートリノ振動実験 (地球内部を非常に長い距離通過する実験) では、ニュートリノと物質との相互作用を考慮しなければならない。そこで、この節では物質中での振動確率を議論していく。

2.2.1 物質中での振動確率

まず、物質中での振動確率がどの様になるのかを示していく。通常物質は電子、陽子、中性子 (電子、u クォーク、d クォーク) から構成されているので、これらとニュートリノの相互作用を考えるなければならない。しかし、Z ボソンを介する中性カレント相互作用はすべてのニュートリノに同等の寄与を与えるので (図 2.1 参照)、(2.4) 式のハミルトニアンに単位行列の定数倍を加える事になり、振動確率には影響しない。よって、考えなければならないのは電子と ν_e の間の W ボソンを介する荷電カレント相互作用である。この相互作用のハミルトニアンは、W ボソンの質量がニュートリノのエネルギーに比べ十分大きいとすると、

$$H_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \quad (2.8)$$

となる。物質中の電子はニュートリノに比べほぼ静止しているものとする、

$$\begin{aligned} \langle \bar{e} \gamma_0 e \rangle &= N_e(\vec{x}) \quad (N_e(\vec{x}) \text{ は電子数密度}) \\ \langle \bar{e} \gamma_i e \rangle &= 0 \end{aligned}$$

と平均値をとり置き換えることが出来る。よって、(2.8) 式は、

$$H_{\text{eff}} = \sqrt{2}G_F N_e(\vec{x}) \bar{\nu}_{eL} \gamma^0 \nu_{eL} \quad (2.9)$$

となる。以上から、電子と ν_e の荷電カレント相互作用のポテンシャルは、

$$A_e(\vec{x}) = \sqrt{2}G_F N_e(\vec{x}) \quad (2.10)$$

となるので、物質中での相互作用の固有状態の時間発展方程式は、(2.4) 式のハミルトニアンに $A_e(\vec{x})$ を加えた次の形になる。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \left\{ U \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} U^{-1} + \begin{pmatrix} A_e(\vec{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

今、電子数密度 $N_e(\vec{x})$ が一定であるとする、

$$U \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} U^{-1} + \begin{pmatrix} A_e(\vec{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は形式的にユニタリー行列 \tilde{U} により、以下のように対角化できる。

$$\tilde{U} \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E}_3 \end{pmatrix} \tilde{U}^{-1} \quad (2.12)$$

ここで、 \tilde{E}_i は物質中のエネルギー固有値である。よって、これを用いて (2.11) 式を真空中と同じように解くことができるので、物質中の振動確率は、

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \text{Re} \left(\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta j} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{ij} L}{2} \right) + 2 \sum_{i < j} \text{Im} \left(\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta j} \right) \sin \left(\Delta \tilde{E}_{ij} L \right) \quad (2.13)$$

と書くことができる。ただし、 $\Delta \tilde{E}_{ij} \equiv \tilde{E}_i - \tilde{E}_j$ である。

なお、反ニュートリノの場合は U を U^* 、 A_e を $-A_e$ にして対角化し、振動確率を求めなければならない。

2.2.2 物質中の適用例：太陽ニュートリノ

太陽では核融合反によって ν_e が生成されている。ところが太陽からのこの ν_e を地上で観測すると、観測値は理論値に比べ少なくなっていることが分かった。この

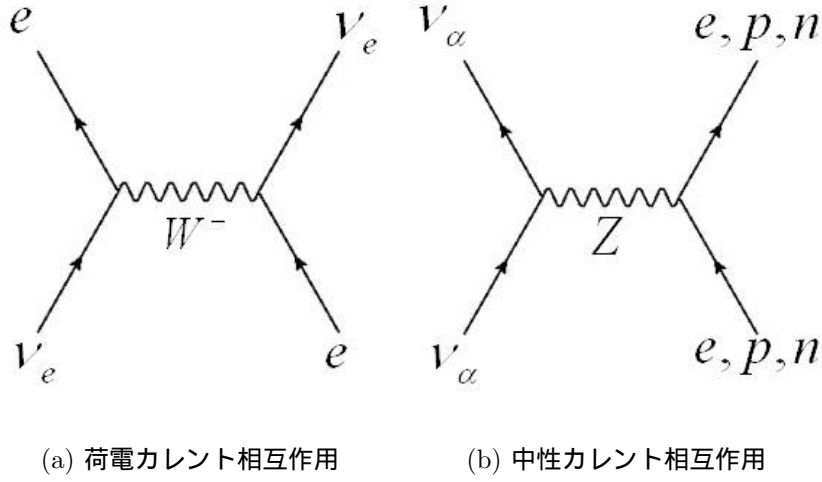


図 2.1: ニュートリノと物質の相互作用

欠損はニュートリノ振動によって説明がつくのだが、太陽内部は非常に密度が高いため、物質効果を取り入れて議論しなければならない。そこで、ここでは前項で議論した物質中でのニュートリノ振動を適用してみる。

前項で見たとおり、物質中での時間発展方程式は、

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \tilde{U}(t) \text{diag}(\tilde{E}_i) \tilde{U}^{-1}(t) \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

であった。ここで、物質効果のポテンシャルにあった位置依存性は時間依存性に置き換えた(ニュートリノは相対論的な粒子なので、 $x = t$)。また、 $\text{diag}(\tilde{E}_i) = \text{diag}(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3)$ である。今、密度の変化がゆっくりであると仮定すると、この時間発展方程式は以下のように解くことができる。

$$\nu_\alpha(t_2) = \sum_{i,\beta} \tilde{U}_{\alpha i}(t_2) \exp \left\{ -i \int_{t_1}^{t_2} dt \text{diag}(\tilde{E}_i) \right\} \tilde{U}_{\beta i}^*(t_1) \nu_\beta(t_1) \quad (2.15)$$

よって、振動確率は、

$$P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) = \sum_{i,j} \tilde{U}_{\alpha i}(t_2) \tilde{U}_{\beta i}^*(t_1) \tilde{U}_{\alpha j}^*(t_2) \tilde{U}_{\beta j}(t_1) \exp \left\{ -i \int_{t_1}^{t_2} dt \Delta \tilde{E}_{ij} \right\} \quad (2.16)$$

となる。今回の場合、 $t = t_1 = 0$ は太陽中心、 $t = t_2 \rightarrow +\infty$ は太陽の外と考えてよいので、(2.16) 式中の \exp は、 $\exp \left\{ -i \int_{t_1}^{t_2} dt \Delta \tilde{E}_{ij} \right\} \rightarrow \delta_{ij}$ というように、激しい振動を平均化できる。よって、振動確率は、

$$P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) = \sum_i \tilde{U}_{\alpha i}(t_2) \tilde{U}_{\beta i}^*(t_1) \tilde{U}_{\alpha i}^*(t_2) \tilde{U}_{\beta i}(t_1) \quad (2.17)$$

となる。ここで、 $t = t_2$ は太陽の外で、密度はゼロと考えてしまってよいので、

$$\begin{aligned} P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) &= \sum_i U_{\alpha i}(t_2) \tilde{U}_{\beta i}^*(t_1) U_{\alpha i}^*(t_2) \tilde{U}_{\beta i}(t_1) \\ &= \sum_i X_i^{\alpha\alpha} \tilde{X}_i^{\beta\beta}(t_1) \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる。2行目は

$$\begin{aligned} X_i^{\alpha\beta} &\equiv U_{\alpha i} U_{\beta i}^* && (\text{真空中の混合行列}) \\ \tilde{X}_i^{\alpha\beta} &\equiv \tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* && (\text{物質中の混合行列}) \end{aligned}$$

という記号を新たに導入して書き下した。太陽ニュートリノの場合は、 ν_e が減少する振動を観測していたので、特に

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = X_1^{ee} \tilde{X}_1^{ee}(t_1) + X_2^{ee} \tilde{X}_2^{ee}(t_1) + X_3^{ee} \tilde{X}_3^{ee}(t_1) \quad (2.19)$$

となる。

ここからさらに振動確率を計算するためには、物質中の混合行列 $\tilde{X}_i^{\alpha\beta}$ を求めなければならない。これを求める手法に、木村-高村-横枕の方法 [1][2] があるので以下で計算していく。なお、この方法はこの論文の本論である T 非保存の計算でも用いていく。

まず、 $\tilde{X}_i^{\alpha\beta}$ を求めるために、3つの恒等式を与えておく。1つ目は、ユニタリー条件から、

$$\sum_{i=1}^3 \tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* \equiv \sum_{i=1}^4 \tilde{X}_i^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.20)$$

さらに、物質効果を考えている場合、

$$U \varepsilon U^{-1} + \mathcal{A} = \tilde{U} \tilde{\varepsilon} \tilde{U}^{-1} \quad (2.21)$$

となっていた。ここで、

$$\begin{aligned} \varepsilon &\equiv \text{diag}(E_i) \\ \tilde{\varepsilon} &\equiv \text{diag}(\tilde{E}_i) \\ \mathcal{A} &\equiv \text{diag}(A_e, 0, 0) \end{aligned}$$

である。(2.21) 式の両辺の (α, β) 成分を取ると、

$$[U \varepsilon U^{-1} + \mathcal{A}]_{\alpha\beta} = [\tilde{U} \tilde{\varepsilon} \tilde{U}^{-1}]_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^3 \tilde{U}_{\alpha i} \tilde{E}_i \tilde{U}_{\beta i}^* = \sum_{i=1}^3 \tilde{E}_i \tilde{X}_i^{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

となる。同じように (2.21) 式の両辺を 2 乗して (α, β) 成分を取ると、

$$\left[(U \varepsilon U^{-1} + \mathcal{A})^2 \right]_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^3 \tilde{E}_i^2 \tilde{X}_i^{\alpha\beta} \quad (2.23)$$

となる。(2.20)、(2.22)、(2.23) 式をまとめると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_3 \\ \tilde{E}_1^2 & \tilde{E}_2^2 & \tilde{E}_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_2^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_3^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \\ [U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A}]_{\alpha\beta} \\ [(U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A})^2]_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

と行列の形で書ける。一番左の行列は、Van der monde 行列と呼ばれ、逆行列が存在するので、 $\tilde{X}_i^{\alpha\beta}$ について解くことができる。その結果、

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_1^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_2^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_3^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \\ [U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A}]_{\alpha\beta} \\ [(U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A})^2]_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$V = \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{21}\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}} \begin{pmatrix} \Delta\tilde{E}_{32}\tilde{E}_2\tilde{E}_3 & -\Delta\tilde{E}_{32}(\tilde{E}_3 + \tilde{E}_2) & \Delta\tilde{E}_{32} \\ -\Delta\tilde{E}_{31}\tilde{E}_1\tilde{E}_3 & \Delta\tilde{E}_{31}(\tilde{E}_3 + \tilde{E}_1) & -\Delta\tilde{E}_{31} \\ \Delta\tilde{E}_{21}\tilde{E}_1\tilde{E}_2 & -\Delta\tilde{E}_{21}(\tilde{E}_2 + \tilde{E}_1) & \Delta\tilde{E}_{21} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

となる。ここから分かるように、物質中の混合行列 (振動確率) を求めるという問題は、物質中のエネルギー固有値を求めるという問題に置き換わった。よって、ここからは物質中のエネルギー固有値を求めていく。

まず、固有値行列を \tilde{E} とすると、固有値方程式は、

$$\tilde{E}\nu_i = (U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A})\nu_i \equiv \mu\nu_i \quad (2.27)$$

となる。固有値を求めるには、

$$|\tilde{E} - \mu| = 0$$

を解けばよい。3 × 3 行列の場合、

$$|\tilde{E} - \mu| = \tilde{E}^3 - \text{tr}\mu\tilde{E}^2 + \frac{1}{2} \{(\text{tr}\mu)^2 - \text{tr}(\mu^2)\} \tilde{E} - \det\mu \quad (2.28)$$

$$\det\mu = \frac{1}{6} (\text{tr}\mu)^3 - \frac{1}{2} \text{tr}\mu \text{tr}(\mu^2) + \frac{1}{3} \text{tr}(\mu^3) \quad (2.29)$$

となるので、計算してまとめると。(2.27) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \tilde{E}^3 - (A_e + \Delta E_{21} + \Delta E_{31}) \tilde{E}^2 \\ & + \{(1 - X_2^{ee}) A_e \Delta E_{21} + (1 - X_3^{ee}) A_e \Delta E_{31} + \Delta E_{21} \Delta E_{31}\} \tilde{E} \\ & - A_e \Delta E_{21} \Delta E_{31} X_1^{ee} = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

ここから、近似的に固有値を導出していく。まず、 $|\Delta E_{21}| \sim |A_e| \ll 1$ の第 0 近似の場合 (2.30) 式は、

$$\begin{aligned} & \tilde{E}^3 - \Delta E_{31} \tilde{E}^2 \simeq 0 \\ \therefore & \tilde{E} = 0, \tilde{E} = \Delta E_{31} \end{aligned} \quad (2.31)$$

となり、縮退した固有値が出てきてしまう。この縮退を解くため、 $\tilde{E}/\Delta E_{31} \equiv \lambda$ 、 $\Delta E_{21}/\Delta E_{31} \equiv \varepsilon$ 、 $A_e/\Delta E_{31} \equiv \eta$ とパラメータを無次元化しておき、(2.30) 式を解いていく。新たな変数で (2.30) 式を書き直すと、

$$\lambda^3 - (1 + \varepsilon + \eta)\lambda^2 + \{\varepsilon + \varepsilon\eta(1 - X_2^{ee}) + \eta(1 - X_3^{ee})\}\lambda - \varepsilon\eta X_1^{ee} = 0 \quad (2.32)$$

となる。ここで、 $\lambda \sim \varepsilon, \eta$ として2次まで取ってくると、

$$\begin{aligned} 0 &\simeq -\lambda^2 + (\varepsilon + \eta c_{13}^2)\lambda - \varepsilon\eta c_{12}^2 c_{13}^2 \\ \therefore \lambda &= \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon + \eta c_{13}^2 \pm \sqrt{(\varepsilon + \eta c_{13}^2)^2 - 4\varepsilon\eta c_{12}^2 c_{13}^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。これをもとのパラメータに戻してやると、

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \left\{ \Delta E_{21} + A_e c_{13}^2 \pm \Delta \tilde{E}_{21} \right\} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_{21} &\equiv \sqrt{(\Delta E_{21} + A_e c_{13}^2)^2 - 4\Delta E_{21} A_e c_{12}^2 c_{13}^2} \\ &= \sqrt{(\Delta E_{21} \cos 2\theta_{12} - A_e c_{13}^2)^2 + (\Delta E_{21} \sin 2\theta_{12})^2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

となる。残る1つの固有値は、 $\lambda = 1 + a\varepsilon + b\eta$ と $\lambda = 1$ 周りに1次で展開し、(2.30) 式に代入すると、1次において、

$$0 \simeq a\varepsilon + b\eta - \eta X_3^{ee}$$

となる。これが成立するには、 $a = 0$ 、 $b = X_3^{ee}$ でなければならないので、

$$\tilde{E}_3 = \Delta E_{31} + A_e X_3^{ee} \quad (2.36)$$

となり、すべての固有値が導出できた。

あとは求めた固有値を $\tilde{X}_i^{\alpha\beta}$ に代入し、計算すれば振動確率が求まる。今回の場合は \tilde{X}_i^{ee} に代入し計算してやると、

$$\tilde{X}_1^{ee} = \frac{1 - X_3^{ee}}{2\Delta \tilde{E}_{21}} \left\{ \Delta \tilde{E}_{21} + \Delta E_{21} \cos 2\theta_{12} - A_e (1 - X_3^{ee}) \right\} \quad (2.37)$$

$$\tilde{X}_2^{ee} = \frac{1 - X_3^{ee}}{2\Delta \tilde{E}_{21}} \left\{ \Delta \tilde{E}_{21} - \Delta E_{21} \cos 2\theta_{12} + A_e (1 - X_3^{ee}) \right\} \quad (2.38)$$

$$\tilde{X}_3^{ee} = X_3^{ee} \quad (2.39)$$

となる。ここから (2.19) 式は、

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = s_{13}^4 + \frac{c_{13}^4}{2} \left(1 + \cos 2\theta_{12} \frac{\Delta E_{21} \cos 2\theta_{12} - c_{13}^2 A_e}{\Delta \tilde{E}_{21}} \right) \quad (2.40)$$

となる。今、混合角 θ_{13} は十分小さい事が分かっているので、(2.40) 式は近似的に θ_{12} と $\Delta E_{21} \simeq \Delta m_{21}^2/2E$ をパラメータとしたニュートリノ振動を起こしていた事になる。

2.3 現在の振動パラメータ

ニュートリノ振動が発見されてから今に至るまで数多くの実験が行われ、レプトン混合行列 U (混合角 θ_{ij}) と質量二乗差 Δm_{ij}^2 の振動パラメータを決定しようと努力してきた。近年 T2K 実験により、上限値しかついていなかった混合角 θ_{13} に、初めてゼロでない値を持つ事が示された。ここではその結果を踏まえた G.L.Fogli et.al [3] の論文の Best fit point を記す。なお、この値は後の T 非保存の計算で使用する。

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_{12} &= 0.306 \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0.021 \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0.42 \\ \Delta m_{21}^2 &= 7.58 \times 10^{-5} \text{eV}^2 \\ |\Delta m_{31}^2| &= 2.35 \times 10^{-3} \text{eV}^2\end{aligned}$$

これで残る完全未測定のパラメータは CP 位相 δ と Δm_{31}^2 の符号のみになった。なお、いままで説明してこなかったが、3世代の場合 Δm_{31}^2 の正負によって質量二乗差のパターンが図 2.2 のように 2 つにわかれている。また、混合角 θ_{13} がほかの 2 つに比べ小さく、 Δm_{21}^2 と Δm_{31}^2 の値が離れているため、近似的に 2 世代として扱って表現していく事がある。次の章ではこの近似的な 2 世代表現を用いて、質量二乗差 Δm^2 、ニュートリノのエネルギー E 、距離 L の議論をしていく。

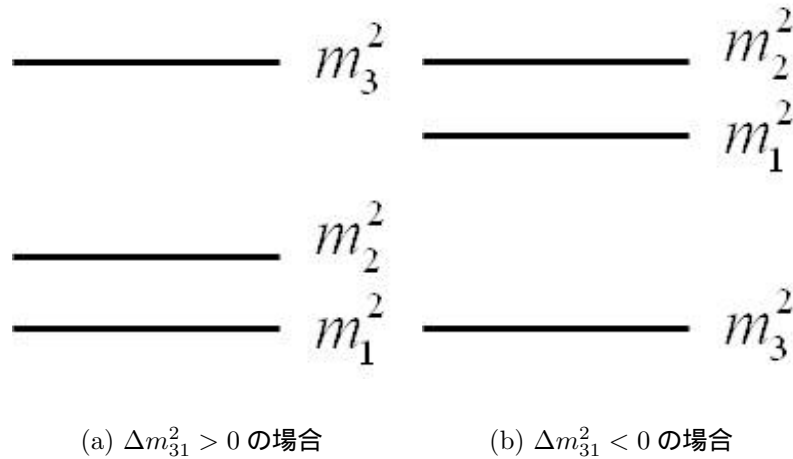


図 2.2: 2 つの質量パターン。左を正常階層性、右を逆階層性という。

第3章 ステライルニュートリノ

この章では通常の3世代では説明のつかない実験を紹介し、その結果をニュートリノ振動として説明するために考えられた、ステライルニュートリノを加えたニュートリノ振動について説明していく。

3.1 LSND 実験

ロスアラモスのLSND(Liquid Scintillator Neutrino Detection) 実験は、 π 中間子の崩壊

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

によって生成した μ^+ がさらに、

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

と崩壊した時に出てきたエネルギー $20\text{MeV} \sim 52.8\text{MeV}$ の $\bar{\nu}_\mu$ を、距離 30m の所に置いてある液体シンチレーター検出器により $\bar{\nu}_e$ への振動を調べた実験である。この $\bar{\nu}_e$ は、液体シンチレーター中で

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$$

という反応を起こすので、ここで出来たポジトロンのシグナルと、中性子が

$$n + p \rightarrow d + \gamma(2.2\text{MeV})$$

と反応して出てきた遅延 γ 線のシグナルを見ることによって、 $\bar{\nu}_e$ を識別している。これにより $87.9 \pm 22.4 \pm 6.0$ 個の $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ のイベントを観測した。もしこの結果を信じるのであれば、距離 $L \sim 30\text{m}$ 、ニュートリノのエネルギー $E \sim 50\text{MeV}$ であるため、

$$\Delta m_{\text{LSND}}^2 \sim O(1\text{eV}^2) \quad (3.1)$$

のニュートリノ振動によるものでなければならない。質量二乗差と混合角の詳しい許容範囲の図は図3.1にある。グレーで色を塗られている部分がLSND実験からの許容範囲で、赤線の左側がその他の実験からの許容範囲になっている。ここからも、おおよそ $\Delta m_{\text{LSND}}^2 \sim O(1\text{eV}^2)$ になる事が読み取れる。しかし、3世代のところで見たように、質量二乗差は $O(10^{-5}\text{eV}^2)$ と $O(10^{-3}\text{eV}^2)$ であったので、ニュー

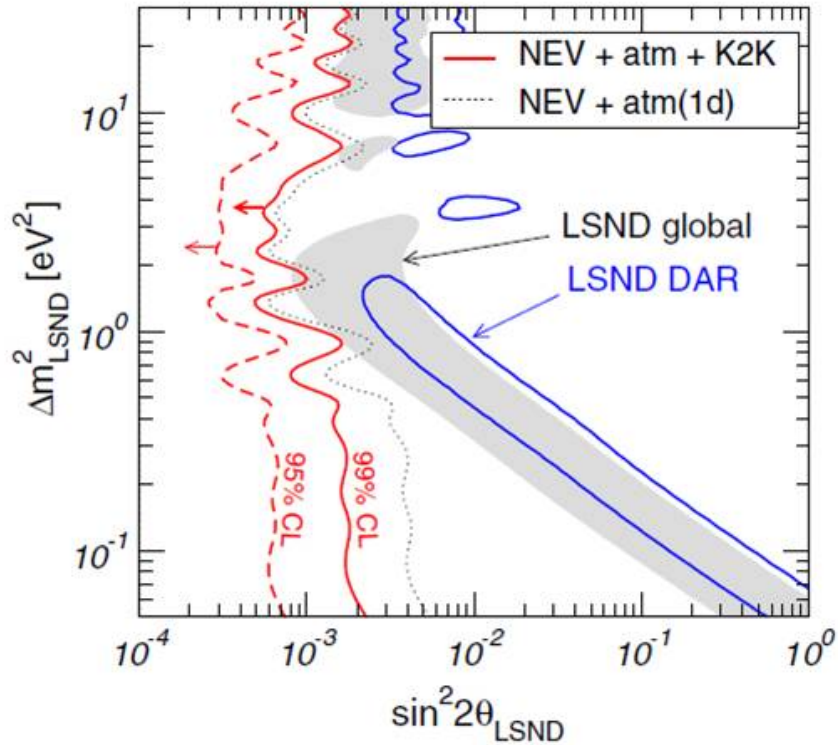


図 3.1: LSND 実験における質量二乗差と混合角の許容範囲 [5]

トリノの数が3ではLSND実験の質量二乗差を説明することはできない。そこで、 $O(1\text{eV}^2)$ を実現できる様にもう一つニュートリノを加える。ただし、LEP実験から、Zボソンと結合する軽いニュートリノは3世代しかないことが分かっているので、弱い相互作用を起こさず、ニュートリノ振動の時にだけ姿を現すステライルニュートリノを導入する。

3.2 ステライルニュートリノのスキーム

ここではLSND実験の結果を受けて、ステライルニュートリノを導入した場合の記述方法 [4] を見ていく。

まず、LSND実験で観測された振動の質量二乗差が $\Delta m^2_{\text{LSND}} \sim O(1\text{eV}^2)$ であったので、三世代の質量パターンに矛盾しないように上手く質量固有値を取り入れてやらなければならない。それには二種類あり、一つが(2+2)スキーム、もう一つが(3+1)スキームである。質量パターンは図3.2の通りである。ただし、今では(2+2)スキームは実験から排除されてしまっている [5] ので、今回は議論せず、(3+1)スキームで考えていく事にする。次に、ステライルニュートリノを考えた場合の振動確率や混合行列がどの様になるのかを述べていく。真空中の場合の相互

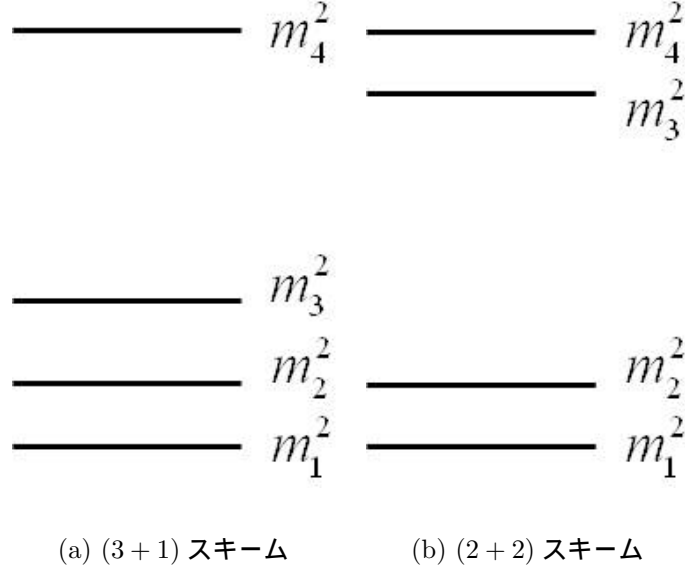


図 3.2: ステライルニュートリノを加えた場合の質量パターン

作用の固有状態の時間発展方程式は、ステライルニュートリノを ν_s (質量固有状態は ν_4) として、

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \\ \nu_s \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \\ \nu_s \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

と書ける。混合行列 U のパラメータは、3世代の時と違い、混合角 θ_{ij} が6個 ($i, j = 1, 2, 3, 4$)、CP位相 δ_l が3個 ($l = 1, 2, 3$) 存在していて、以下の様なパラメータの取り方を使うことにする。

$$U = R_{34}(\theta_{34}, 0) R_{24}(\theta_{24}, 0) R_{23}(\theta_{23}, \delta_3) R_{14}(\theta_{14}, 0) R_{13}(\theta_{13}, \delta_2) R_{12}(\theta_{12}, \delta_1) \quad (3.3)$$

$$[R_{ij}(\theta_{ij}, \delta_l)]_{pq} = \begin{cases} \cos \theta_{ij} & p = q = i, j \\ 1 & p = q \neq i, j \\ \sin \theta_{ij} e^{-i\delta_l} & p = i; q = j \\ -\sin \theta_{ij} e^{i\delta_l} & p = j; q = i \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (3.4)$$

この混合行列 U の具体的な行列要素は付録 A.1 に記しておく。

CP位相は R_{23}, R_{13}, R_{12} のところに入っていて、 R_{13} のところの δ_2 が3世代のCP位相に対応している。もちろんこの混合行列は、ステライルニュートリノに関

わるパラメータを全てゼロにすれば3世代のものに帰着する。物質中の場合の時間発展方程式は、3世代の時と同じように物質との相互作用のポテンシャルを考えて記述する必要がある。しかし、ステライルニュートリノはその定義により、物質とは全く相互作用をしないので、もちろん相互作用のポテンシャルはない。だが、もう一度3世代のときの物質との相互作用を思い出してほしい。今回は3世代の時無視した ν_e, ν_μ, ν_τ に同等にかかっていた中性カレントのポテンシャルを考える必要がある。電氣的に中性な物質中では、この中性カレント相互作用のポテンシャルは、電子と陽子の寄与が打ち消しあい、中性子との相互作用の寄与のみが残る。これを意識して時間発展方程式の $U \text{diag}(E_1, E_2, E_3, E_4) U^{-1}$ の部分は、

$$U \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 \end{pmatrix} U^{-1} + \begin{pmatrix} A_e - A_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$A_e = \sqrt{2} G_F N_e, A_n = \frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n \quad (3.6)$$

となる。ここで N_n は中性子数密度である。ここから、物質効果のポテンシャルの部分に単位行列の A_n 倍を足してやって（この操作は振動確率に影響を与えない）、

$$U \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 \end{pmatrix} U^{-1} + \begin{pmatrix} A_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

の形で振動確率を計算していく。ここからは、電子数密度・中性子数密度が一定であれば、3世代の議論と同じで、振動確率は

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i<j} \text{Re} \left(\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta j} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{ij} L}{2} \right) + 2 \sum_{i<j} \text{Im} \left(\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta j} \right) \sin \left(\Delta \tilde{E}_{ij} L \right) \quad (3.8)$$

と形式的には書けることになる。

3.3 その他の $\Delta m^2 \sim O(1\text{eV}^2)$ を示唆している実験

ここからは他の $\Delta m_{\text{LSND}}^2 \sim O(1\text{eV}^2)$ のニュートリノ振動を示唆していると考えられる実験や新解釈を3つ紹介していく。

3.3.1 MiniBooNE 実験

まずはアメリカの Fermilab にある加速器を用いた MiniBooNE 実験を紹介する。この実験は LSND 実験の追試として行われた実験で、LSND で確認された $\Delta m^2 \sim O(1\text{eV}^2)$ の質量二乗差を、LSND 実験とは異なるニュートリノエネルギー E と距離 L で確認した実験である。MiniBooNE 実験では、平均エネルギー 600MeV の $\bar{\nu}_\mu$ を、およそ 540m 先の検出器に飛ばし、 $\bar{\nu}_e$ に振動するのかどうかを実験した。検出器には 818 トンの無機油 (CH_2) を使用し、

$$p + \bar{\nu} \rightarrow n + l^+ \quad (l \text{ はレプトン})$$

の反応によって生じたレプトンのチェレンコフ光を観測し、 $\bar{\nu}_e$ のシグナルを探した。結果としては、図のように LSND 実験と同じ様な許容範囲になり、 $\Delta m^2 \sim O(1\text{eV}^2)$ の振動を観測できたと主張している。

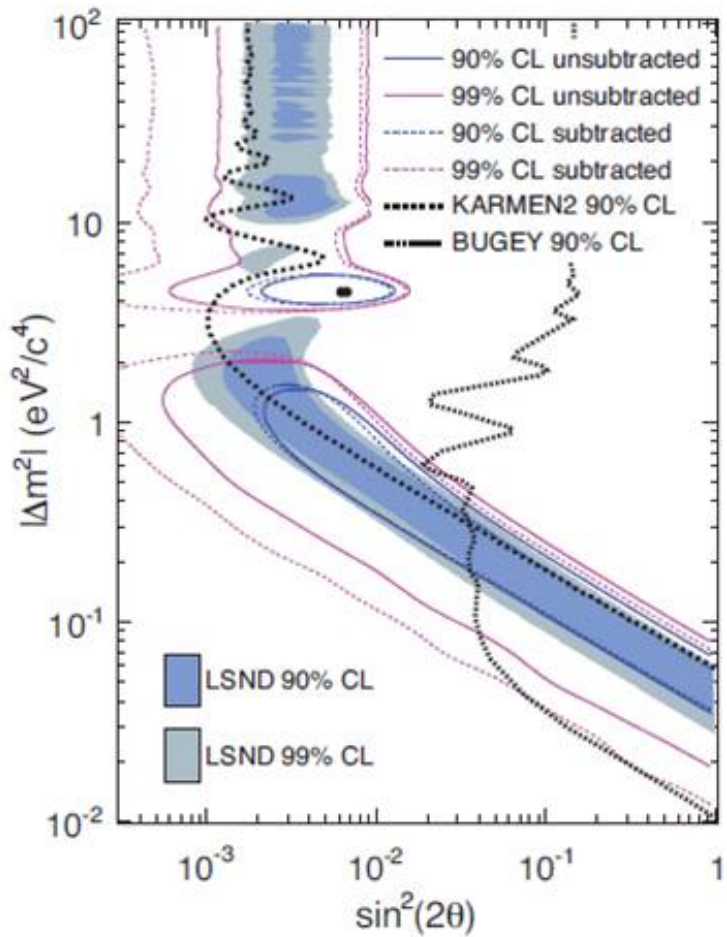


図 3.3: MiniBooNE 実験における質量二乗差と混合角の許容範囲 [6]

なお、MiniBooNE 実験では $\Delta m^2 \sim O(1\text{eV}^2)$ で $\mu_\mu \rightarrow \nu_e$ の振動が起こるかどうかも実験されたが、この場合は起こっていない結果になった。

3.3.2 Reactor Antineutrino Anomaly

今までは $\Delta m^2 \sim O(1\text{eV}^2)$ 振動が確認された実験を述べてきたが、ここでは最近の論文 (G.Mention et al[7]) による解釈を述べていく。

近年原子炉から出てくるニュートリノフラックスの再計算が行われた。その結果、従来使っていたニュートリノフラックス (旧フラックス) は再計算されたニュートリノフラックス (新フラックス) より 3% ほど少なく見積もっていた事が示された。その結果、今まで原子炉から出てくる $\bar{\nu}_e$ を測定する実験 (Bujey など) は、この $\bar{\nu}_e$ のフラックスが減少することなく確認できていたのに、旧フラックスより 3% 多い新フラックスを使うと、減少していたのではないかと解釈できるようになった。この $\bar{\nu}_e$ の欠損を、 $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e$ のニュートリノ振動のせいだとすると、ニュートリノのエネルギー $E \sim$ 数十 MeV、距離 $L \sim$ 数十 m の振動を確認していたことになるので、やはり

$$\Delta m^2 \sim O(1)\text{eV}^2$$

の質量二乗差になる。図 3.4 は、旧来の $\bar{\nu}_e$ の欠損を確認できなかった実験に、新フラックスを用いて解釈し直した際の質量二乗差と混合角の許容範囲である。

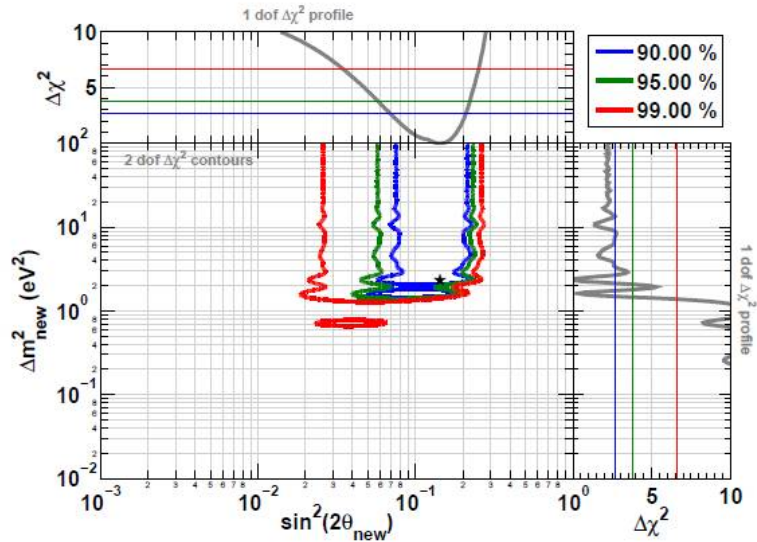


図 3.4: 新フラックスを用いた時の質量二乗差と混合角の許容範囲 [7]

3.4 混合角 $\theta_{14}, \theta_{24}, \theta_{34}$ の上限値

ここではステライルニュートリノ由来の混合角 $\theta_{14}, \theta_{24}, \theta_{34}$ の上限値を記しておく。ちなみに、ここで記した値は次の章の T 非保存の計算で用いる。

$$\sin^2(2\theta_{14}) = 0.14 \quad (3.9)$$

$$\theta_{24} \lesssim 12^\circ \quad (3.10)$$

$$\theta_{34} \lesssim 30^\circ \quad (3.11)$$

ここで、 θ_{14} に関しては図 3.4 で付けられている best fit point の値を用い、その他の混合角は A.Donini et al の論文 [8] からの上限値を記した。

第4章 ステライルシナリオのT非保存

この章では本論文の主題である、 $(3+1)$ スキームのステライルニュートリノのT非保存 [9] を議論していく。そこで、まずはなぜT非保存を考えるのかを簡単に述べた後、様々な状況下でのT非保存の結果を順次述べていく。

4.1 物質中でのT非保存の有用性

この節ではT非保存を考える理由について簡単に述べる。そこで、もう一度振動確率の式を確認しておく。ニュートリノの場合、

$$\begin{aligned}
 P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i<j} \operatorname{Re} \left(\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta j} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{ij} L}{2} \right) \\
 &\quad + 2 \sum_{i<j} \operatorname{Im} \left(\tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* \tilde{U}_{\alpha j}^* \tilde{U}_{\beta j} \right) \sin \left(\Delta \tilde{E}_{ij} L \right) \\
 &\equiv \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i<j} \operatorname{Re} \left(\tilde{X}_i^{\alpha\beta} \tilde{X}_j^{\alpha\beta*} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{ij} L}{2} \right) \\
 &\quad + 2 \sum_{i<j} \operatorname{Im} \left(\tilde{X}_i^{\alpha\beta} \tilde{X}_j^{\alpha\beta*} \right) \sin \left(\Delta \tilde{E}_{ij} L \right) \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

と形式的には書けた。ここで、

$$\tilde{U} = U \varepsilon U^{-1} + \mathcal{A} \tag{4.2}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} \operatorname{diag} (0, \Delta E_{21}, \Delta E_{31}) & (3 \text{ 世代の場合}) \\ \operatorname{diag} (0, \Delta E_{21}, \Delta E_{31}, \Delta E_{41}) & ((3+1) \text{ スキームの場合}) \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \operatorname{diag} (A_e, 0, 0) & (3 \text{ 世代の場合}) \\ \operatorname{diag} (A_e, 0, 0, A_n) & ((3+1) \text{ スキームの場合}) \end{cases} \tag{4.4}$$

であった。 A_e と A_n はそれぞれ、 $A_e = \sqrt{2} G_F N_e$ 、 $A_n = 1/\sqrt{2} G_F N_n$ となっていて、 N_e 、 N_n は物質中の電子数密度と中性子数密度、 G_F はフェルミ結合定数を表していた。また、反ニュートリノの場合は、 U を U^* に、 A_e を $-A_e$ に置き換えられ

ばよかった。真空中の場合には、(4.1) 式で \tilde{U} が U になるだけなので、CP 非保存の場合 ($P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)$) と T 非保存の場合 ($P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha)$) は同じ様に CP 位相の δ を見ることができる。しかし、物質中の場合には、CP 非保存 ($P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)$) を (4.1) 式から計算しようとする、物質効果による寄与と δ による寄与が混じり合ってしまうと見通しが良くなる。そこで、物質中では T 非保存の式

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha} &\equiv P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) \\ &= 4 \sum_{i<j} \text{Im} \left(\tilde{X}_i^{\alpha\beta} \tilde{X}_j^{\alpha\beta*} \right) \sin \left(\Delta \tilde{E}_{ij} L \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

を考える事にする。これだと、例えば三世代の場合は、ユニタリー条件

$$\tilde{X}_1^{\alpha\beta} + \tilde{X}_2^{\alpha\beta} + \tilde{X}_3^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

を用いれば、(4.5) 式は

$$P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha} = -16 \text{Im} \left(\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \tilde{X}_2^{\alpha\beta*} \right) \sin \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{21} L}{2} \right) \sin \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{31} L}{2} \right) \sin \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{32} L}{2} \right) \quad (4.6)$$

とまとめることができ、 $\text{Im}(\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \tilde{X}_2^{\alpha\beta*})$ は

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \tilde{X}_2^{\alpha\beta*} \right) &= \frac{\Delta E_{21} \Delta E_{31} \Delta E_{32}}{\Delta \tilde{E}_{21} \Delta \tilde{E}_{31} \Delta \tilde{E}_{32}} \text{Im} \left(X_1^{\alpha\beta} X_2^{\alpha\beta*} \right) \\ &= \frac{1}{8} \frac{\Delta E_{21} \Delta E_{31} \Delta E_{32}}{\Delta \tilde{E}_{21} \Delta \tilde{E}_{31} \Delta \tilde{E}_{32}} c_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \sin \delta \end{aligned} \quad (4.7)$$

であることが示せるので、物質中でも純粋に CP 位相 δ の影響を調べることができる。

しかし、いざ実験で T 非保存を測定しようとしても、例えば、 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\alpha$ (α は任意のフレーバー) の振動確率を測定することは可能だが、全く同じ条件で $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\mu$ の振動確率を測定することはほぼ不可能である。しかし、一般的に振動確率は

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (P_{\alpha\beta} + P_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} (P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha}) \quad (4.8)$$

のように、T 保存の項と T 非保存の項に分けることができる。よって、T 非保存だけでなく T 保存の式

$$P_{\alpha\beta} + P_{\beta\alpha} = -8 \sum_{i<j} \text{Re} \left(\tilde{X}_i^{\alpha\beta} \tilde{X}_j^{\alpha\beta*} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{ij} L}{2} \right) \quad (4.9)$$

も併せて考え、T 非保存/T 保存の比が分かれば、実験でニュートリノのエネルギースペクトルを正確に測定すれば実質的に T 非保存項を決定できる。

また、(4.7) 式は3世代で計算したので、CP位相が1つしかなく、全てのチャンネルでT非保存項が同じになった。しかし、(3+1)スキームの場合、CP位相が3個存在するためニュートリノのチャンネルによってT非保存 (CP非保存) の様相が異なる事が予想される。よって、以下の節では全てのチャンネルにおいて、(3+1)スキームでのT非保存とT非保存/T保存の比がニュートリノのエネルギーによってどの様な振る舞いをするのかを調べていくことにする。

4.2 短基線ニュートリノ振動の場合

まず最初に短基線ニュートリノ振動実験の場合にはどの様になるかを見ていく。この場合、ニュートリノの伝搬距離 L は物質効果を見捨てるほど短いので、真空中のみを考えていく。また、ここで想定している実験はLSNDやBugeyなどの、ステライルニュートリノの影響が見える距離で、 $\Delta E_{41}L \sim O(1)$ の状況を考えていくことにする。この場合、(4.5) 式は、 $|\Delta E_{21}|$ 、 $|\Delta E_{31}|$ 、 $|\Delta E_{32}| \rightarrow 0$ の極限をとってしまえば、

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha} &\simeq 4\text{Im} \left(X_1^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \sin(\Delta E_{14}L) + 4\text{Im} \left(X_2^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \sin(\Delta E_{24}L) \\
&\quad + 4\text{Im} \left(X_3^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \sin(\Delta E_{34}L) \\
&\simeq 4\text{Im} \left\{ \left(X_1^{\alpha\beta} + X_2^{\alpha\beta} + X_3^{\alpha\beta} \right) X_4^{\alpha\beta*} \right\} \sin(\Delta E_{34}L) \\
&= 4\text{Im} \left(X_4^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \sin(\Delta E_{43}L) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

となる。ここで、1行目から2行目に移る際には、 $|\Delta E_{41}| \sim |\Delta E_{42}| \sim |\Delta E_{43}|$ である事、2行目から3行目に移る際にはユニタリー条件

$$\sum_{i=1}^4 U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \equiv \sum_{i=1}^4 X_i^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{4.11}$$

を用いた。

以上から、短基線ニュートリノ振動の場合では、 ν_4 とその他の質量固有状態の2世代の形になってしまうので、CP位相を見ることができない事が分かった。そこで、次に長基線ニュートリノ振動の場合を考えていく。

4.3 長基線ニュートリノ振動の場合

この節では長基線ニュートリノ振動実験の場合を考えていく。この場合では、物質効果が無視できる場合と無視できない場合があるので、まずはどの様な場合物質効果が無視できるのかを考える。

物質効果のポテンシャルは、 $A_e = \sqrt{2}G_F N_e$ 、 $A_n = 1/\sqrt{2}G_F N_n$ であった。例えば、 A_e を見ると、

$$A_e = \sqrt{2}G_F N_e \sim \frac{\rho}{2.7g/cm^3} \times 10^{-13}eV \quad (4.12)$$

と変形できる。ここで、 ρ は物質密度である。この ρ を今地球の物質密度の適当な値($\rho \sim 3g/cm^3$)に取ってやると、

$$A_e \sim \frac{1}{2000km}$$

になるので、距離 $L \lesssim 1000km$ の場合、物質効果を無視できる。これは、現在行われている T2K 実験 ($L \simeq 300km$) や MINOS 実験、OPERA 実験 ($L \simeq 730km$) に相当する。また、将来的にはニュートリノファクトリーという $L \sim 3000km$ 以上の、物質効果は無視できない実験も構想されている。よって、物質効果が無視できる場合(真空中)と出来ない場合の2パターンを考えていくことにする。

また、ニュートリノファクトリー実験は、ミュー中間子の崩壊

$$\begin{aligned} \mu^- &\rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e \end{aligned}$$

を用いて人工的にニュートリノを作り出すので、

$$\nu_e \rightarrow \nu_\mu, \nu_e \rightarrow \nu_\tau, \nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$$

の振動確率を測定することができる。よって、ここからは (e, μ) 、 (μ, τ) 、 (τ, e) のすべてのフレーバーの組み合わせを計算していく事にする。

4.3.1 真空中の場合

まずは真空中の場合を考えていく。前節でも真空中の場合を考えたが、今回は長基線ニュートリノ振動実験に適用していきたいので、 $\Delta E_{31}L \sim O(1)$ の状況を考える。このとき、ステライルニュートリノの影響は $|\Delta E_{41}L|$ 、 $|\Delta E_{42}L|$ 、 $|\Delta E_{43}L| \rightarrow \infty$ となるため振動の様子が平均化されて見えなくなっている。この条件のもとで、(4.5)式は

$$P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha} \simeq \sum_{(i,j)=(1,2),(1,3),(2,3)} 4\text{Im} \left(X_i^{\alpha\beta} X_j^{\alpha\beta*} \right) \sin \Delta E_{ij}L \quad (4.13)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \sin \Delta E_{31}L &= \sin (\Delta E_{32}L + \Delta E_{21}L) \\ &= \sin \Delta E_{32}L \cos \Delta E_{21}L + \cos \Delta E_{32}L \sin \Delta E_{21}L \end{aligned} \quad (4.14)$$

と展開して、さらに $E_{21}L \ll E_{31}L$ であるので、

$$\cos \Delta E_{21}L \simeq 1, \quad \sin \Delta E_{21}L \simeq \Delta E_{21}L \quad (4.15)$$

とテーラー展開する。この2式を(4.13)に代入し、(4.11)式を用いると、

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha} &= -4\text{Im} \left(X_3^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \sin \Delta E_{32}L - 4\Delta E_{21}L \text{Im} \left(X_1^{\alpha\beta} X_2^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad - 4\Delta E_{21}L \text{Im} \left(X_1^{\alpha\beta} X_3^{\alpha\beta*} \right) \cos \Delta E_{32}L \end{aligned} \quad (4.16)$$

と式変形する事ができる。(4.16)式の第1項目はステライルニュートリノの効果を表していて、残りの2項は通常の3世代の効果を表している。

次に、T保存項を書き下していく。(4.11)式と先ほどのT非保存の議論と同じ条件を(4.9)式に適用すると、

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} + P_{\beta\alpha} &\simeq 4|U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2 - 4\Delta E_{21}L \text{Re} \left(X_1^{\alpha\beta} X_3^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad + 8 \left\{ |U_{\alpha 3}|^2 |U_{\beta 3}|^2 + \text{Re} \left(X_3^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \right\} \sin^2 \left(\frac{\Delta E_{32}L}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる。これは第1項目と第4項目がステライルの効果を表していて、残りが3世代の効果を表している。

以上から、具体的に $(\alpha, \beta) = (e, \mu), (\mu, \tau), (\tau, e)$ を代入してさらに計算していけば、長基線ニュートリノ実験で物質効果が無視できる場合のT非保存とT非保存/T保存の振る舞いが分かる。実際に混合行列の成分を代入し、混合角を現在の実験で決まっている中央値や上限値にして計算してやると、T非保存項は次の様になる。

$$\begin{aligned} P_{e\mu} - P_{\mu e} &\sim 4 \times \left\{ 0.004 \sin(\delta_2 - \delta_3) + 0.0025 \sin(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3) \right. \\ &\quad \left. \times \sin^2 \left(\frac{\Delta E_{32}L}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} P_{\mu\tau} - P_{\tau\mu} &\sim 4 \times \left\{ 0.043 \sin \delta_3 + 0.001 \sin(\delta_2 - \delta_3) - 0.0004 \sin \delta_2 \right. \\ &\quad \left. + 0.002 \sin(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3) \sin^2 \left(\frac{\Delta E_{32}L}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} P_{\tau e} - P_{e\tau} &\sim 4 \times \left\{ -0.01 \sin \delta_2 + 0.001 \sin(\delta_2 - \delta_3) \right. \\ &\quad \left. + 0.002 \sin(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3) \sin^2 \left(\frac{\Delta E_{32}L}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

ただし、(4.16)式中にある $\Delta E_{21}L$ は、

$$\frac{\Delta E_{21}L}{\Delta E_{31}L} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \sim \frac{1}{30}$$

という様に $O(1) \sim \Delta E_{31}L$ で割ってしまい数値化し、(4.16)式の第1項は出てくる全ての項を計算し、第2項・第3項は3世代に近似 ($\theta_{i4} \rightarrow 0$) しても残る項だけ

を計算しまとめた (第 2 項・第 3 項の無視した項は計算した項に比べ 1 桁以上小さい値になる)。ここから、各式の第 1 項が一番大きいのでそこだけ比較することにして、

$$|\sin(\delta_2 - \delta_3)| \sim |\sin \delta_3| \sim |\sin \delta_2| \sim O(1)$$

という様に CP 位相に関する項が全て最大になっているものとする、

$$|P_{e\mu} - P_{\mu e}| : |P_{\mu\tau} - P_{\tau\mu}| : |P_{\tau e} - P_{e\tau}| \sim 1 : 10 : 2 \quad (4.21)$$

となり、大雑把な議論ではあるが、T 保存項は (μ, τ) のチャンネルが一番振幅が大きくなるのが分かる。

また、(4.17) 式の T 保存の項も、 $\Delta E_{21}L$ を数値化してしまい、各チャンネルを計算すると以下の様になる。

$$P_{e\mu} + P_{\mu e} \sim 4 \times [0.002 + 0.001 \cos(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3) + \{0.02 - 0.008 \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \sin^2\left(\frac{\Delta E_{32}L}{2}\right)] \quad (4.22)$$

$$P_{\mu\tau} + P_{\tau\mu} \sim 4 \times [0.013 - 0.001 \cos(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3) + \{0.36 - 0.014 \cos \delta_3 - 0.017 \cos \delta_2 - 0.007 \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \sin^2\left(\frac{\Delta E_{32}L}{2}\right)] \quad (4.23)$$

$$P_{\tau e} + P_{e\tau} \sim 4 \times [0.009 - 0.001 \cos(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3) + \{0.02 + 0.02 \cos \delta_2 - 0.004 \cos \delta_3\} \sin^2\left(\frac{\Delta E_{32}L}{2}\right)] \quad (4.24)$$

ただし、(4.17) 式の第 2 項・第 3 項を計算して現れる 3 世代の効果を表す項の大きさに注意し、これより 1 桁以上小さくなる項は全て無視した。ここから、T 非保存/T 保存の比を大まかに調べる為、(4.22) ~ (4.24) 式中でそれぞれ一番大きい項 ($\sin^2(\Delta E_{32}L/2)$ の係数の第 1 項) を比較することとし、 $\Delta E_{31}L \sim \Delta E_{32}L \equiv \pi/2$ ($\sim O(1)$) と単純化して $\sin^2(\Delta E_{32}L/2)$ を評価してやる (T 非保存項は先ほどと評価方法は変わらない)。結果は、以下の様になった。

$$\left| \frac{P_{e\mu} - P_{\mu e}}{P_{e\mu} + P_{\mu e}} \right| : \left| \frac{P_{\mu\tau} - P_{\tau\mu}}{P_{\mu\tau} + P_{\tau\mu}} \right| : \left| \frac{P_{\tau e} - P_{e\tau}}{P_{\tau e} + P_{e\tau}} \right| \sim 2 : 1 : 5 \quad (4.25)$$

以上から、T 非保存/T 保存の比に関しては (τ, e) のチャンネルが一番大きいことが分かる。しかし、このチャンネルは T 非保存項が小さかったので、T 保存項も小さいことにより T 非保存/T 保存の比が大きくなったと考えられる。また、T 非保存項が一番大きい (μ, τ) チャンネルも、T 非保存項だけ見れば CP 位相の測定に一見有利に見えるが、このチャンネルは T 保存項も一番大きい為、T 非保存項が決定できない可能性が高いと予想される。

4.3.2 物質効果を含めた場合

次に、物質中での T 非保存を考えていく。先ほども述べたように、現在行われている実験は物質効果が無視できてしまうので、将来計画として構想されているニュートリノファクトリーという実験に照準を合わせて考えていく。この場合、T 非保存の式は (4.5) 式となっていて、物質中でのエネルギー固有値 $\tilde{E}_1 \sim \tilde{E}_4$ と混合行列の成分 $\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \sim \tilde{X}_4^{\alpha\beta}$ をまず求める必要がある。そこで、木村-高村-横枕の公式を用いてこれらを求め、(3+1) スキームでの T 非保存の話に移っていく。

4.3.2.1 (3+1) スキームでの木村 – 高村 – 横枕の公式

この章では、(3+1) スキームでの木村-高村-横枕公式の取り扱いを述べる。まず、固有値方程式は、固有値行列を \tilde{E} とすると、

$$\tilde{E}\nu_i = (U\varepsilon U^{-1} + A)\nu_i \equiv \mu\nu_i \quad (4.26)$$

となっていて、 ε は (4.3) 式、 A は (4.4) 式である。また、物質効果のポテンシャルは $A_e = \sqrt{2}G_F N_e$ 、 $A_n = 1/\sqrt{2}G_F N_n$ と書けて、 N_e 、 N_n はそれぞれ物質中の電子数密度と中性子数密度を表す。今回の計算ではこの N_e 、 N_n が等しいと仮定して計算を進めていくので、 $A_e \equiv A$ 、 $A_n = A_e/2 \equiv A/2$ としておく。

さて、(4.26) 式の固有値方程式を解いていく。固有値行列を t とすると、 $|t - \mu| = 0$ を解けばよい。4×4 の行列の場合、

$$\begin{aligned} |t - \mu| &= t^4 - (\text{tr}\mu)t^3 + \frac{1}{2}[(\text{tr}\mu)^2 - \text{tr}(\mu^2)]t^2 \\ &\quad - \frac{1}{6}[(\text{tr}\mu)^3 - 3(\text{tr}\mu)\text{tr}(\mu^2) + 2\text{tr}(\mu^3)]t + \det\mu \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\det\mu = \frac{1}{24}[(\text{tr}\mu)^4 - 6(\text{tr}\mu)^2\text{tr}(\mu^2) + 3\{\text{tr}(\mu^2)\}^2 + 8(\text{tr}\mu)\text{tr}(\mu^3) - 6\text{tr}(\mu^3)] \quad (4.28)$$

となる。この二式にある $\text{tr}\mu$ などを正確に展開して、 $\Delta E_{21} \rightarrow 0$ と近似する。さらに、

$$t/\Delta E_{41} \equiv \lambda, \quad \Delta E_{31}/\Delta E_{41} \equiv \varepsilon, \quad A/\Delta E_{41} \equiv \eta$$

とパラメータを無次元化して、 $|t - \mu| = 0$ を整理してやると、

$$\begin{aligned}
& \lambda^4 - (1 + \varepsilon + \frac{3}{2}\eta)\lambda^3 \\
& + \left\{ \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\eta(\varepsilon + 1) + \varepsilon - \eta(\varepsilon X_3^{ee} + X_4^{ee}) - \frac{\eta}{2}(\varepsilon X_3^{ss} + X_4^{ss}) \right\} \lambda^2 \\
& + \left\{ -\frac{1}{2}\eta^2(\varepsilon + 1) - \frac{3}{2}\eta\varepsilon + \frac{1}{2}\eta^2(\varepsilon X_3^{ee} + X_4^{ee}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}\eta^2(\varepsilon X_3^{ss} + X_4^{ss}) + \eta\varepsilon(X_3^{ee} + X_4^{ee}) + \frac{1}{2}\eta\varepsilon(X_3^{ss} + X_4^{ss}) \right\} \lambda \\
& + \frac{1}{2}\eta^2\varepsilon(1 - X_3^{ee} - X_4^{ee} - X_3^{ss} - X_4^{ss}) \\
& \simeq 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

となる。 $|\Delta E_{31}| \sim |A| \ll 1$ とする第 0 近似の場合、(4.29) 式は、

$$\begin{aligned}
& \lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1) \simeq 0 \\
& \therefore \lambda = 0, 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0, \Delta E_{41} \quad (t = 0 \text{ は重解})
\end{aligned} \tag{4.30}$$

となる。このままでは縮退している固有値があるので、(4.30) 式をもとに、高次の項まで考えて固有値を導出していく。

まず、 $\lambda = 1$ について、 $\lambda = 1 + a\varepsilon + b\eta$ というように、 $\lambda = 1$ 周りで一次に展開して、(4.29) 式に代入すると、一次において、

$$\begin{aligned}
0 & \simeq 1 + 4a\varepsilon + 4b\eta - (1 + \varepsilon + \frac{3}{2}\eta + 3a\varepsilon + 3b\eta) + \frac{3}{2}\eta + \varepsilon - \eta X_4^{ee} - \frac{\eta}{2} X_4^{ss} \\
& = a\varepsilon + b\eta - \eta X_4^{ee} - \frac{\eta}{2} X_4^{ss}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

これを満たす a, b は、

$$a = 0, \quad b = X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \tag{4.32}$$

なので、固有値の 1 つは、

$$t = \Delta E_{41} + A(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss}) \tag{4.33}$$

と求められる。残り 3 つの固有値は、 $\lambda \sim \varepsilon, \eta$ として、二次まで考慮すると求められる。まず、(4.29) 式で、 ε, η の三次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned}
0 & \simeq \lambda \left[\lambda^3 - (1 + \varepsilon + \frac{3}{2}\eta)\lambda^2 + \left\{ \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\eta(\varepsilon + 1) + \varepsilon - \eta X_4^{ee} - \frac{\eta}{2} X_4^{ss} \right\} \lambda \right. \\
& \quad + \left\{ -\frac{1}{2}\eta^2(\varepsilon + 1) - \frac{3}{2}\eta\varepsilon + \frac{1}{2}\eta^2(X_4^{ee} + X_4^{ss}) \right. \\
& \quad \left. \left. + \eta\varepsilon(X_3^{ee} + X_4^{ee}) + \frac{1}{2}\eta\varepsilon(X_3^{ss} + X_4^{ss}) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{4.34}$$

となる。ここから、3つに縮退していた固有値のうちの1つが、

$$t = 0 \quad (4.35)$$

であることが分かる。残りの2つは、 $\lambda \sim \varepsilon, \eta$ として、(4.34)式の大かっこ内を考
えていけばよい。この時、

$$\begin{aligned} \lambda &\sim \varepsilon \sim \eta \sim O(10^{-3}) \\ X_3^{ee} &\sim X_4^{ee} \sim O(s_{13}^2) \sim O(10^{-2}) \end{aligned}$$

ということに気を付け、 λ の二次 ($O(10^{-6})$) までとってくと、

$$\begin{aligned} &-\lambda^2 + \left(\frac{3}{2}\eta + \varepsilon - \frac{\eta}{2}X_4^{ss}\right)\lambda - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{2}\eta\varepsilon + \frac{1}{2}\eta^2 X_4^{ss} + \frac{1}{2}\eta\varepsilon(X_3^{ss} + X_4^{ss}) \\ \therefore \lambda &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\eta}{2}(3 - X_4^{ss}) + \varepsilon \right\} \pm \frac{1}{4} \sqrt{4\varepsilon^2 + \eta^2(1 + X_4^{ss})^2 + 4\eta\varepsilon(-3 + 2X_3^{ss} + X_4^{ss})} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{A}{2}(3 - X_4^{ss}) + \Delta E_{31} \right\} \\ &\quad \pm \frac{1}{4} \sqrt{4\Delta E_{31}^2 + A^2(1 + X_4^{ss})^2 + 4A\Delta E_{31}(-3 + 2X_3^{ss} + X_4^{ss})} \quad (4.36) \end{aligned}$$

という様に残り2つの固有値も求めることができる。以上(4.33)、(4.35)、(4.36)
式より、 $\tilde{E}_1 < \tilde{E}_2 < \tilde{E}_3 < \tilde{E}_4$ の関係に気を付ければ、

$$\tilde{E}_1 = 0 \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{A}{2}(3 - X_4^{ss}) + \Delta E_{31} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sqrt{4\Delta E_{31}^2 + A^2(1 + X_4^{ss})^2 + 4A\Delta E_{31}(-3 + 2X_3^{ss} + X_4^{ss})} \quad (4.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{A}{2}(3 - X_4^{ss}) + \Delta E_{31} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \sqrt{4\Delta E_{31}^2 + A^2(1 + X_4^{ss})^2 + 4A\Delta E_{31}(-3 + 2X_3^{ss} + X_4^{ss})} \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_4 = \Delta E_{41} + A \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) \quad (4.40)$$

とまとめることができる。

次に、 $\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \sim \tilde{X}_4^{\alpha\beta}$ を求める。これらを求める為に、まずは4つの恒等式を与
ておく。まずは、ユニタリー条件から、

$$\sum_{i=1}^4 \tilde{U}_{\alpha i} \tilde{U}_{\beta i}^* \equiv \sum_{i=1}^4 \tilde{X}_i^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (4.41)$$

次に、(4.26) 式の μ は、

$$U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A} = \tilde{U}\tilde{\varepsilon}\tilde{U}^{-1} \quad (4.42)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \text{diag} \left(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \tilde{E}_4 \right)$$

と対角化できる。この(4.42)式を使って残り3つの恒等式を導出する。まず、(4.42)式の両辺の (α, β) 成分を取り出すと、

$$[U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A}]_{\alpha\beta} = [\tilde{U}\tilde{\varepsilon}\tilde{U}^{-1}]_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^4 \tilde{U}_{\alpha i} \tilde{E}_i \tilde{U}_{\beta i}^* = \sum_{i=1}^4 \tilde{E}_i \tilde{X}_i^{\alpha\beta} \quad (4.43)$$

となる。同様に、(4.42)式を2乗、3乗したものの (α, β) 成分を取り出すと、以下のようになる。

$$\left[(U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A})^2 \right]_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^4 \tilde{E}_i^2 \tilde{X}_i^{\alpha\beta} \quad (4.44)$$

$$\left[(U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A})^3 \right]_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^4 \tilde{E}_i^3 \tilde{X}_i^{\alpha\beta} \quad (4.45)$$

以上(4.41)、(4.43)、(4.44)、(4.45)式を行列の形でまとめると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_3 & \tilde{E}_4 \\ \tilde{E}_1^2 & \tilde{E}_2^2 & \tilde{E}_3^2 & \tilde{E}_4^2 \\ \tilde{E}_1^3 & \tilde{E}_2^3 & \tilde{E}_3^3 & \tilde{E}_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_2^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_3^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_4^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \\ \mu_{\alpha\beta} \\ (\mu^2)_{\alpha\beta} \\ (\mu^3)_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

と書ける。一番左の行列は Van der monde 行列と呼ばれ、逆行列が存在するので、目的の $\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \sim \tilde{X}_4^{\alpha\beta}$ を以下のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_1^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_2^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_3^{\alpha\beta} \\ \tilde{X}_4^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \\ \mu_{\alpha\beta} \\ (\mu^2)_{\alpha\beta} \\ (\mu^3)_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{21}\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{41}} \left(\tilde{E}_2\tilde{E}_3\tilde{E}_4 - \left(\tilde{E}_2\tilde{E}_3 + \tilde{E}_2\tilde{E}_4 + \tilde{E}_3\tilde{E}_4 \right) \tilde{E}_1 \right) & \tilde{E}_2 + \tilde{E}_3 + \tilde{E}_4 & -1 \\ \frac{-1}{\Delta\tilde{E}_{21}\Delta\tilde{E}_{32}\Delta\tilde{E}_{42}} \left(\tilde{E}_1\tilde{E}_3\tilde{E}_4 - \left(\tilde{E}_1\tilde{E}_3 + \tilde{E}_1\tilde{E}_4 + \tilde{E}_3\tilde{E}_4 \right) \tilde{E}_2 \right) & \tilde{E}_1 + \tilde{E}_3 + \tilde{E}_4 & -1 \\ \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}\Delta\tilde{E}_{43}} \left(\tilde{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_4 - \left(\tilde{E}_1\tilde{E}_2 + \tilde{E}_1\tilde{E}_4 + \tilde{E}_2\tilde{E}_4 \right) \tilde{E}_3 \right) & \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + \tilde{E}_4 & -1 \\ \frac{-1}{\Delta\tilde{E}_{41}\Delta\tilde{E}_{42}\Delta\tilde{E}_{43}} \left(\tilde{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_3 - \left(\tilde{E}_1\tilde{E}_2 + \tilde{E}_1\tilde{E}_3 + \tilde{E}_2\tilde{E}_3 \right) \tilde{E}_4 \right) & \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + \tilde{E}_3 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

さらに、 $\tilde{X}_1^{\alpha\beta}$ などを評価するには、さらに (4.43)、(4.44)、(4.45) 式の左辺を知る必要がある。これらは、

$$\mu_{\alpha\beta} = [U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A}]_{\alpha\beta} = \sum_{i=2}^4 \Delta E_{i1} X_i^{\alpha\beta} + A\delta_{\alpha e}\delta_{e\beta} + \frac{A}{2}\delta_{\alpha s}\delta_{s\beta} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} (\mu^2)_{\alpha\beta} &= [(U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A})^2]_{\alpha\beta} \\ &= [U\varepsilon^2 U^{-1} + U\varepsilon U^{-1}\mathcal{A} + \mathcal{A}U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A}^2]_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} (\mu^3)_{\alpha\beta} &= [(U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A})^3]_{\alpha\beta} \\ &= [U\varepsilon^3 U^{-1} + U\varepsilon^2 U^{-1}\mathcal{A} + U\varepsilon U^{-1}\mathcal{A}U\varepsilon U^{-1} + U\varepsilon U^{-1}\mathcal{A}^2 \\ &\quad + \mathcal{A}U\varepsilon^2 U^{-1} + \mathcal{A}U\varepsilon U^{-1}\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 U\varepsilon U^{-1} + \mathcal{A}^3]_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.51)$$

となる。ここからさらに計算を進める為には、(4.50)、(4.51) 式の 2 式の $(\alpha\beta)$ 成分をきちんと評価してやり、(4.47)、(4.48) 式に (4.40)、(4.49)、(4.50)、(4.51) 式を代入して、 $|\Delta E_{41}| \sim |\Delta E_{42}| \sim |\Delta E_{43}| \rightarrow \infty$ の極限を考えてやればよい。結果として、

$$\tilde{X}_1^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\Delta\tilde{E}_{21}\Delta\tilde{E}_{31}} \left\{ \tilde{E}_2\tilde{E}_3 (X_4^{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) + (\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3) P^{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta} \right\} \quad (4.52)$$

$$\tilde{X}_2^{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta\tilde{E}_{21}\Delta\tilde{E}_{32}} \left\{ \tilde{E}_1\tilde{E}_3 (X_4^{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) + (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_3) P^{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta} \right\} \quad (4.53)$$

$$\tilde{X}_3^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\Delta\tilde{E}_{31}\Delta\tilde{E}_{32}} \left\{ \tilde{E}_1\tilde{E}_2 (X_4^{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) + (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2) P^{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta} \right\} \quad (4.54)$$

$$\tilde{X}_4^{\alpha\beta} = X_4^{\alpha\beta} \quad (4.55)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} P^{\alpha\beta} &\equiv \left\{ A \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) - A\delta_{\alpha e} - \frac{A}{2}\delta_{\alpha s} - A\delta_{\beta e} - \frac{A}{2}\delta_{\beta s} \right\} X_4^{\alpha\beta} \\ &\quad + \sum_{i=2}^3 \Delta E_{i1} X_i^{\alpha\beta} + A\delta_{\alpha e}\delta_{e\beta} + \frac{A}{2}\delta_{\alpha s}\delta_{s\beta} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} Q^{\alpha\beta} &\equiv \left\{ A^2\delta_{\alpha e} + \frac{A^2}{4}\delta_{\alpha s} + A^2\delta_{\beta e} + \frac{A^2}{4}\delta_{\beta s} + \left(A\delta_{\alpha e} + \frac{A}{2}\delta_{\alpha s} \right) \right. \\ &\quad \times \left(A\delta_{\beta e} + \frac{A}{2}\delta_{\beta s} \right) - A \left(A\delta_{\alpha e} + \frac{A}{2}\delta_{\alpha s} + A\delta_{\beta e} + \frac{A}{2}\delta_{\beta s} \right) \left. \right\} X_4^{\alpha\beta} \\ &\quad - \Delta E_{31} \left(\Delta E_{31} + A\delta_{\alpha e} + \frac{A}{2}\delta_{\alpha s} + A\delta_{\beta e} + \frac{A}{2}\delta_{\beta s} \right) X_3^{\alpha\beta} \\ &\quad - \Delta E_{21} \left(\Delta E_{21} + A\delta_{\alpha e} + \frac{A}{2}\delta_{\alpha s} + A\delta_{\beta e} + \frac{A}{2}\delta_{\beta s} \right) X_2^{\alpha\beta} \\ &\quad + A\Delta E_{31} R^{\alpha\beta} + A\Delta E_{21} S^{\alpha\beta} - A^2\delta_{\alpha e}\delta_{e\beta} - \frac{A^2}{4}\delta_{\alpha s}\delta_{s\beta} \end{aligned} \quad (4.57)$$

となり、さらに (4.57) 式の $R^{\alpha\beta}$ 、 $S^{\alpha\beta}$ は、

$$R^{\alpha\beta} \equiv X_3^{\alpha e} X_4^{e\beta} + \frac{1}{2} X_3^{\alpha s} X_4^{s\beta} + X_4^{\alpha e} X_3^{e\beta} + \frac{1}{2} X_4^{\alpha s} X_3^{s\beta} \quad (4.58)$$

$$S^{\alpha\beta} \equiv X_2^{\alpha e} X_4^{e\beta} + \frac{1}{2} X_2^{\alpha s} X_4^{s\beta} + X_4^{\alpha e} X_2^{e\beta} + \frac{1}{2} X_4^{\alpha s} X_2^{s\beta} \quad (4.59)$$

である。

以上で物質中のすべてのエネルギー固有値と混合行列の成分 $\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \sim \tilde{X}_4^{\alpha\beta}$ を求めることができたので、次からはいよいよ物質中、(3+1) スキームでの T 非保存を調べていく。

4.3.2.2 (3+1) スキームの T 非保存

まず、もう一度 T 非保存の式を確認すると、

$$P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha} = 4 \sum_{i<j} \text{Im}(\tilde{X}_i^{\alpha\beta} \tilde{X}_j^{\alpha\beta*}) \sin(\Delta \tilde{E}_{ij} L) \quad (4.5)$$

であった。今、(4.40) 式から分かるように、 $\Delta \tilde{E}_{41} \sim \Delta E_{41}$ であるので、4.3.1 項で使った、 $|\Delta E_{41} L|$ 、 $|\Delta E_{42} L|$ 、 $|\Delta E_{43} L| \rightarrow \infty$ の近似を使って \sin の振動を平均化出来る。よって、(4.13) 式の様に、

$$P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha} \simeq \sum_{(i,j)=(1,2),(1,3),(2,3)} 4 \text{Im}(\tilde{X}_i^{\alpha\beta} \tilde{X}_j^{\alpha\beta*}) \sin(\Delta \tilde{E}_{ij} L) \quad (4.60)$$

と書ける。これに、(4.37) ~ (4.40) 式と (4.52) ~ (4.59) 式を代入して計算すれば T 非保存の式が分かり、 $\sum \text{Im}(\tilde{X}_i^{\alpha\beta} \tilde{X}_j^{\alpha\beta*})$ の部分は、次のようになる。

$$\text{Im}(\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \tilde{X}_2^{\alpha\beta*}) = -\frac{1}{\Delta \tilde{E}_{21} \Delta \tilde{E}_{31} \Delta \tilde{E}_{32}} \left\{ \tilde{E}_3^2 \text{Im}(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*}) + \tilde{E}_3 \text{Im}(X_4^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*}) + \text{Im}(P^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*}) \right\} \quad (4.61)$$

$$\text{Im}(\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \tilde{X}_3^{\alpha\beta*}) = \frac{1}{\Delta \tilde{E}_{21} \Delta \tilde{E}_{31} \Delta \tilde{E}_{32}} \left\{ \tilde{E}_2^2 \text{Im}(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*}) + \tilde{E}_2 \text{Im}(X_4^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*}) + \text{Im}(P^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*}) \right\} \quad (4.62)$$

$$\text{Im}(\tilde{X}_2^{\alpha\beta} \tilde{X}_3^{\alpha\beta*}) = -\frac{1}{\Delta \tilde{E}_{21} \Delta \tilde{E}_{31} \Delta \tilde{E}_{32}} \left\{ \tilde{E}_1^2 \text{Im}(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*}) + \tilde{E}_1 \text{Im}(X_4^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*}) + \text{Im}(P^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*}) \right\} \quad (4.63)$$

次に、T 保存の式を導出する。T 保存は

$$P_{\alpha\beta} + P_{\beta\alpha} = -8 \sum_{i<j} \text{Re}(\tilde{X}_i^{\alpha\beta} \tilde{X}_j^{\alpha\beta*}) \sin^2\left(\frac{\Delta \tilde{E}_{ij} L}{2}\right) \quad (4.9)$$

であった。この式に、T非保存と同じ条件を課して sin の振動を平均化し、(4.55) を用いてやれば、

$$P_{\alpha\beta} + P_{\beta\alpha} \simeq 4|U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2 - 8 \sum_{(i,j)=(1,2),(1,3),(2,3)} \text{Re} \left(\tilde{X}_i^{\alpha\beta} \tilde{X}_j^{\alpha\beta*} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{E}_{ij} L}{2} \right) \quad (4.64)$$

となる。第1項は sin の振動の平均化から出てきた、ステライルニュートリノ由来の項である。ここで、 $\sum \text{Re}(\tilde{X}_i^{\alpha\beta} \tilde{X}_j^{\alpha\beta*})$ の部分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \tilde{X}_2^{\alpha\beta*} \right) &= -\frac{1}{\Delta \tilde{E}_{21} \Delta \tilde{E}_{31} \Delta \tilde{E}_{32}} \left[\tilde{E}_1 \tilde{E}_2 \tilde{E}_3^2 |U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2 \right. \\ &\quad \left(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_3 \right) \left(\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3 \right) |P^{\alpha\beta}|^2 + |Q^{\alpha\beta}|^2 \\ &\quad + \tilde{E}_3 \left\{ 2\tilde{E}_1 \tilde{E}_2 + \tilde{E}_3 \left(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 \right) \right\} \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad + \tilde{E}_3 \left(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 \right) \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad \left. + \left(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + 2\tilde{E}_3 \right) \text{Re} \left(P^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*} \right) \right] \quad (4.65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\tilde{X}_1^{\alpha\beta} \tilde{X}_3^{\alpha\beta*} \right) &= \frac{1}{\Delta \tilde{E}_{21} \Delta \tilde{E}_{31} \Delta \tilde{E}_{32}} \left[\tilde{E}_1 \tilde{E}_2^2 \tilde{E}_3 |U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2 \right. \\ &\quad \left(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 \right) \left(\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3 \right) |P^{\alpha\beta}|^2 + |Q^{\alpha\beta}|^2 \\ &\quad + \tilde{E}_2 \left\{ 2\tilde{E}_1 \tilde{E}_3 + \tilde{E}_2 \left(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_3 \right) \right\} \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad + \tilde{E}_2 \left(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_3 \right) \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad \left. + \left(\tilde{E}_1 + 2\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3 \right) \text{Re} \left(P^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*} \right) \right] \quad (4.66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\tilde{X}_2^{\alpha\beta} \tilde{X}_3^{\alpha\beta*} \right) &= -\frac{1}{\Delta \tilde{E}_{21} \Delta \tilde{E}_{31} \Delta \tilde{E}_{32}^2} \left[\tilde{E}_1^2 \tilde{E}_2 \tilde{E}_3 |U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2 \right. \\ &\quad \left(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 \right) \left(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_3 \right) |P^{\alpha\beta}|^2 + |Q^{\alpha\beta}|^2 \\ &\quad + \tilde{E}_1 \left\{ 2\tilde{E}_2 \tilde{E}_3 + \tilde{E}_1 \left(\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3 \right) \right\} \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad + \tilde{E}_1 \left(\tilde{E}_2 + \tilde{E}_3 \right) \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad \left. + \left(2\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + \tilde{E}_3 \right) \text{Re} \left(P^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*} \right) \right] \quad (4.67) \end{aligned}$$

ここから、(4.61)、(4.62)、(4.63) 式中有る $\text{Im}(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*})$ や、(4.65)、(4.66)、(4.67) 式中有る $\text{Re}(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*})$ などの未評価の項も計算してやれば T非保存項、T保存項が評価できる。この未評価の項は少し煩雑なので付録 A.2 に記しておく。

これで物質中の T非保存と T非保存/T保存の比が求められる形になったので、具体的に $(\alpha, \beta) = (e, \mu), (\mu, \tau), (\tau, e)$ を代入して計算する。その際、混合角は真空

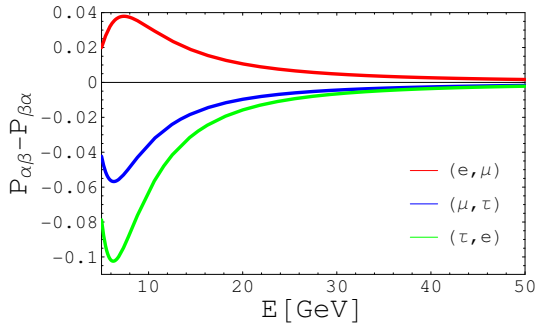
中の計算と同じように現在の中央値や上限値を用いる。また、今回はニュートリノファクトリー実験を想定して計算しているので、基線長 L は 4000km とし、物質密度 ρ は $4.3\text{g}/\text{cm}^3$ とするので、物質効果のポテンシャルは、

$$A \sim \left(\frac{\rho}{2.7\text{g}/\text{cm}^3} \right) \times 10^{-13}\text{eV} \sim 1.6 \times 10^{-13}\text{eV}$$

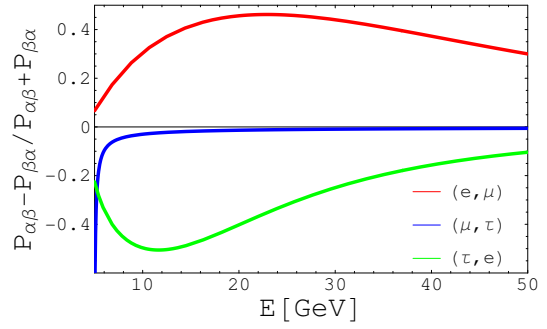
となる。さらに、ニュートリノのエネルギーは数十 GeV であるので、5GeV ~ 50GeV の間で計算した。

結果は図 4.1 ~ 図 4.21 のようになった。図の見方であるが、赤色の線が (e, μ) 、青色の線が (μ, τ) 、緑色の線が (τ, e) のチャンネルである。各図の (a) が T 非保存の様子で、(b) が T 非保存/T 保存の比の様子である。まず、図 4.1 はステライルニュートリノ由来の CP 位相 (δ_1 と δ_3) をゼロにとり、三世代の位相 δ_2 を $\pi/2$ にしてある。なので、近似的には 3 世代の場合を調べていることに相当する。ここから、 (μ, τ) のチャンネルが T 非保存も T 非保存/T 保存の比も小さくなっていることが読み取れる。次に、図 4.2 と図 4.3 を見ていく。ここから、 δ_1 と δ_3 が $\pi/2$ の一番 CP が破れている角度になると (μ, τ) チャンネルが一番 T 非保存が大きくなり、T 非保存/T 保存の比も大きくなるのが分かる。T 非保存/T 保存の比だけを見れば、他のチャンネルも大きいのだが、T 非保存は (μ, τ) チャンネルに比べてとても小さいので T 保存項も小さくなっていることが分かり、実験から T 非保存を実質的に決定するには不利であると考えられる。また、図 4.4 や図 4.5 のように、 δ_1 と δ_3 を固定して、 δ_2 の値を $0, \pi/2$ に変えても (μ, τ) チャンネルが T 非保存、T 非保存/T 保存の比がともに大きいままであることが分かった。その他の $\delta_1 \sim \delta_3$ の角度を $0, \pi/2, \pi$ の三点で変えた結果を図 4.6 ~ 図 4.21 に示した。一番最後の図 4.21 は T 非保存が見えない CP 位相の組み合わせになっている。また、図 4.6 ~ 図 4.20 の間で、 δ_3 が $\pi/2$ となっている場合にのみ (μ, τ) チャンネルの T 非保存、T 非保存/T 保存の比が大きくなる事が読み取れる。よって、ステライルニュートリノ由来の位相のうち、 δ_3 のみに大きく依存している事が分かった。

以上から、 (μ, τ) チャンネルがステライルニュートリノの特徴的なシグナルを調べるのに最も適していると考えられる。

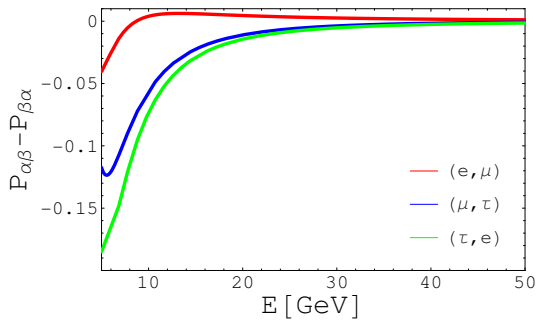


(a) T 非保存

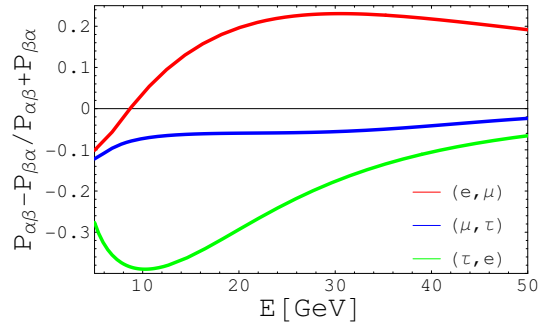


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.1: $\delta_2 = \pi/2, \delta_1 = \delta_3 = 0$ の時の T 非保存、 T 非保存/T 保存の比

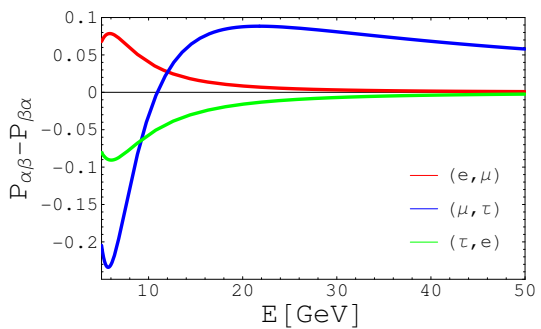


(a) T 非保存

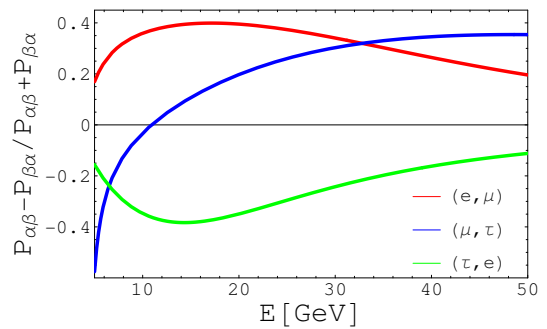


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.2: $\delta_2 = \pi/2, \delta_1 = \delta_3 = \pi$ の時の T 非保存、 T 非保存/T 保存の比

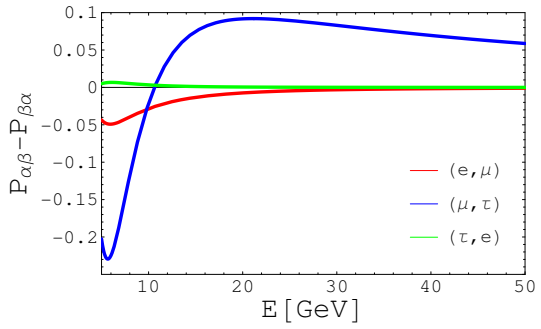


(a) T 非保存

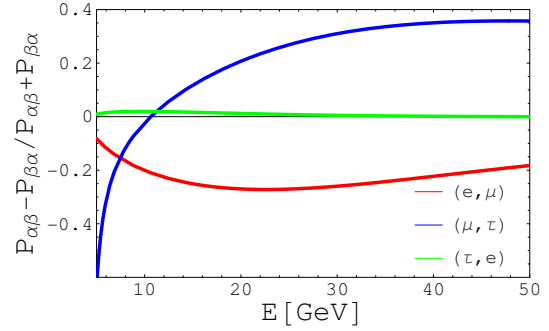


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.3: $\delta_2 = \delta_1 = \delta_3 = \pi/2$ の時の T 非保存、 T 非保存/T 保存の比

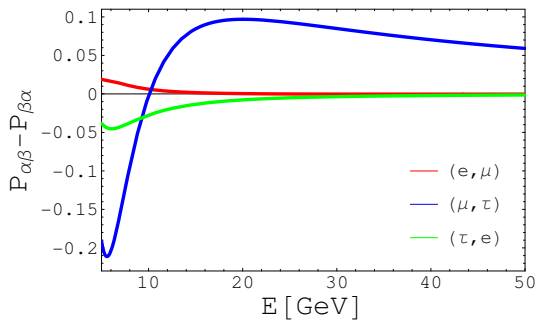


(a) T 非保存

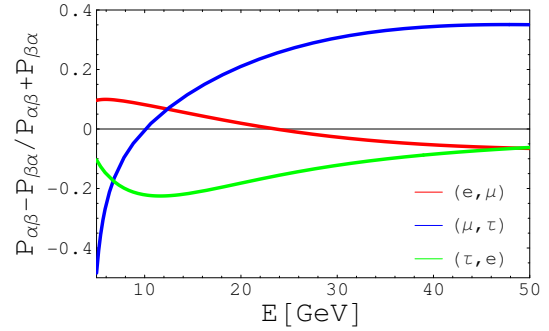


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.4: $\delta_2 = 0, \delta_1 = \delta_3 = \pi/2$ の時の T 非保存、T 非保存/T 保存の比

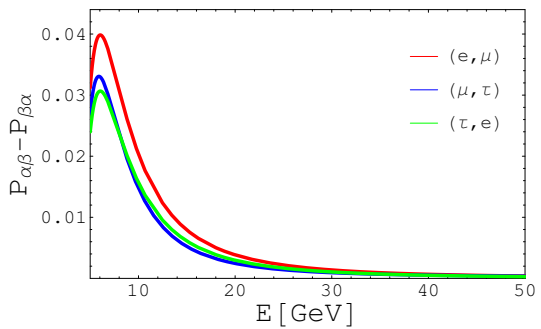


(a) T 非保存

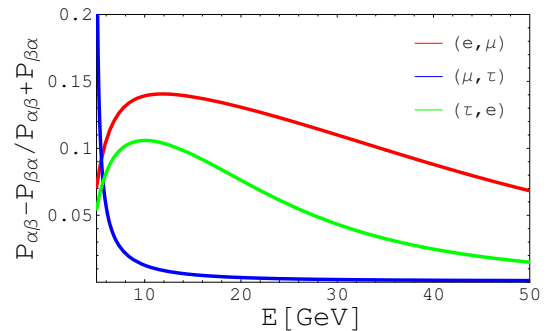


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.5: $\delta_2 = \pi, \delta_1 = \delta_3 = \pi/2$ の時の T 非保存、T 非保存/T 保存の比

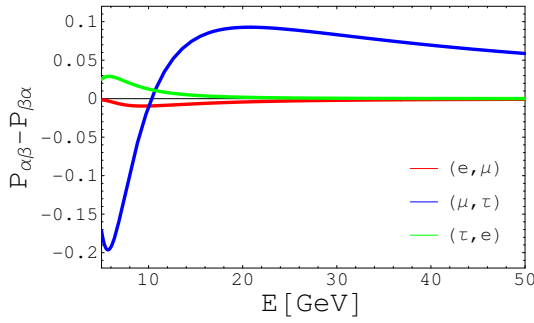


(a) T 非保存

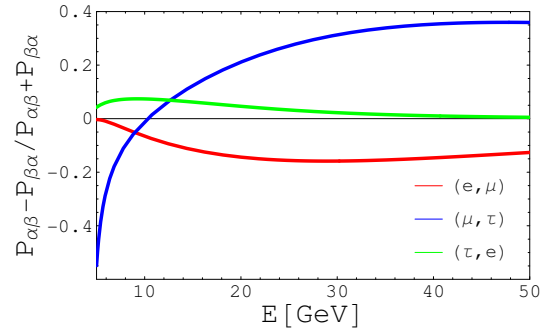


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.6: $\delta_1 = \pi/2, \delta_2 = \delta_3 = 0$ の時の T 非保存、T 非保存/T 保存の比

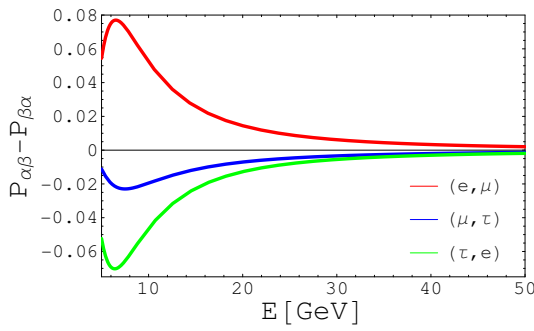


(a) T 非保存

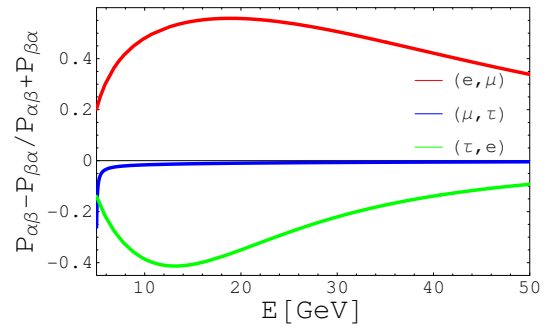


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.7: $\delta_1 = \delta_2 = 0, \delta_3 = \pi/2$ の時の T 非保存、 T 非保存/T 保存の比

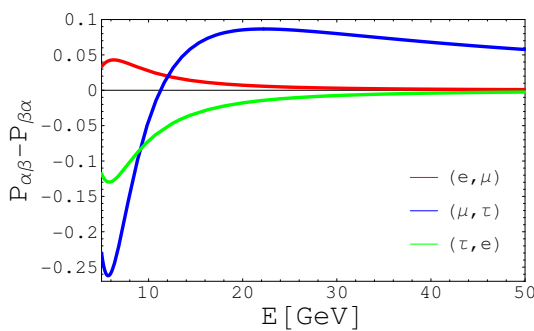


(a) T 非保存

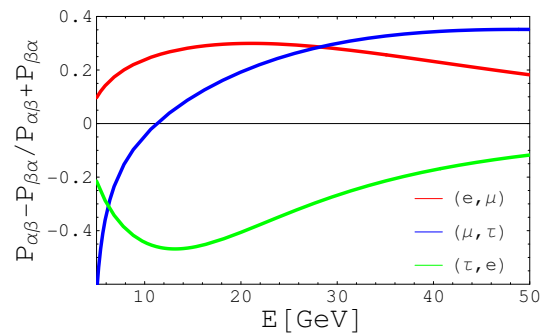


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.8: $\delta_1 = \delta_2 = \pi/2, \delta_3 = 0$ の時の T 非保存、 T 非保存/T 保存の比

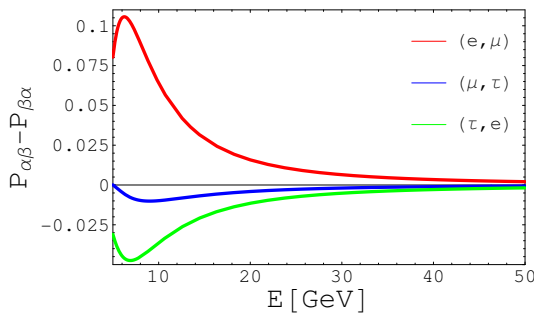


(a) T 非保存

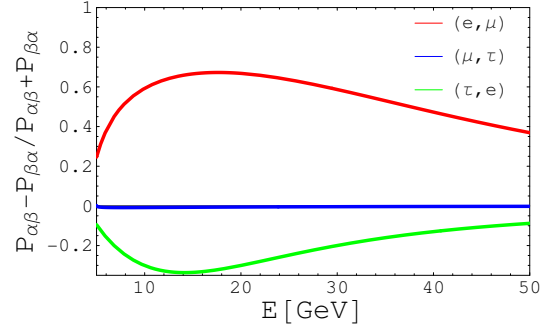


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.9: $\delta_1 = 0, \delta_2 = \delta_3 = \pi/2$ の時の T 非保存、 T 非保存/T 保存の比

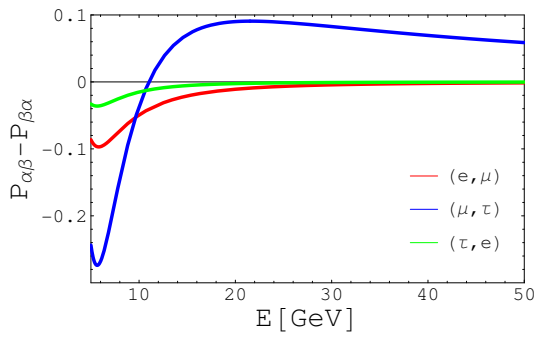


(a) T 非保存

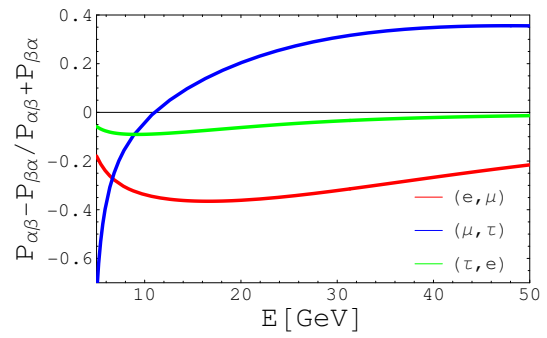


(b) T 非保存 / T 保存の非

図 4.10: $\delta_1 = \pi, \delta_2 = \pi/2, \delta_3 = 0$ の時の T 非保存、T 非保存 / T 保存の比

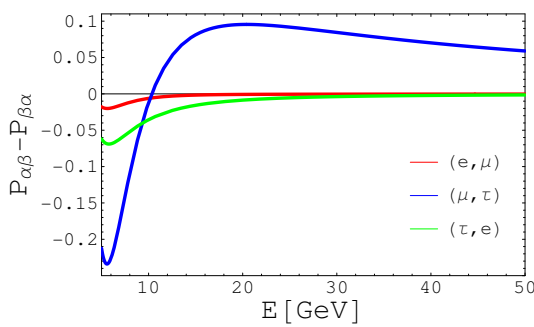


(a) T 非保存

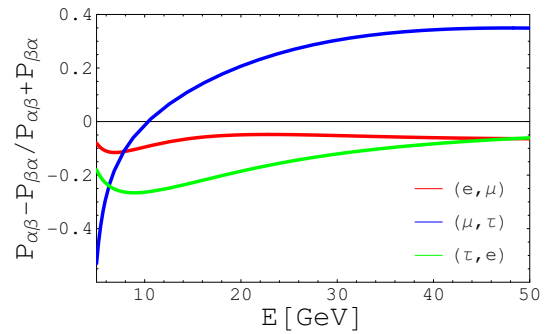


(b) T 非保存 / T 保存の非

図 4.11: $\delta_1 = \pi, \delta_2 = 0, \delta_3 = \pi/2$ の時の T 非保存、T 非保存 / T 保存の比

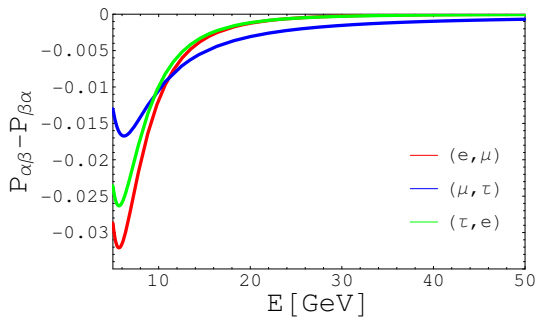


(a) T 非保存

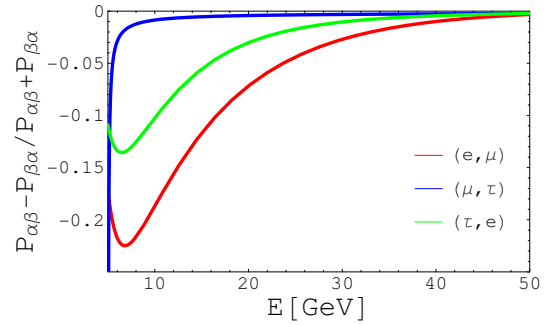


(b) T 非保存 / T 保存の非

図 4.12: $\delta_1 = 0, \delta_2 = \pi, \delta_3 = \pi/2$ の時の T 非保存、T 非保存 / T 保存の比

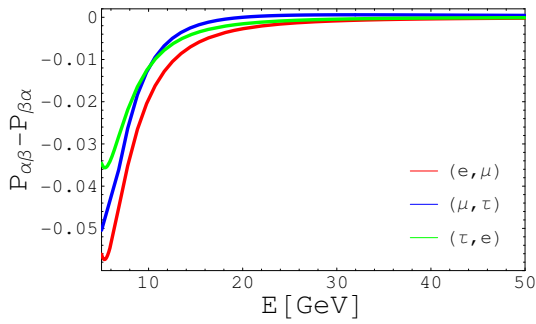


(a) T 非保存

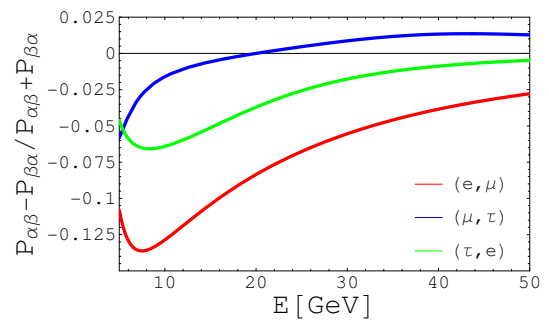


(b) T 非保存 / T 保存の非

図 4.13: $\delta_1 = \pi/2, \delta_2 = \pi, \delta_3 = 0$ の時の T 非保存、T 非保存 / T 保存の比

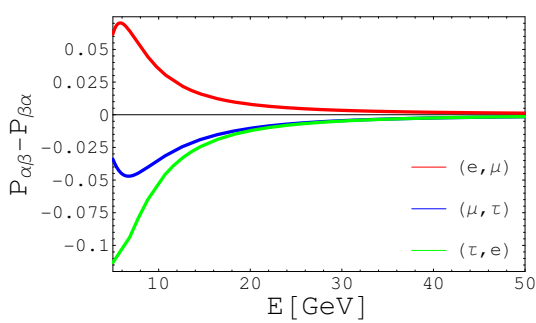


(a) T 非保存

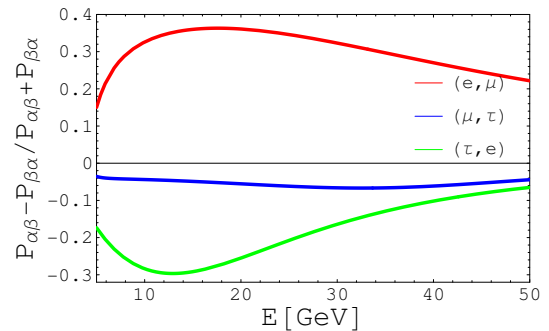


(b) T 非保存 / T 保存の非

図 4.14: $\delta_1 = \pi/2, \delta_2 = \delta_3 = 0$ の時の T 非保存、T 非保存 / T 保存の比

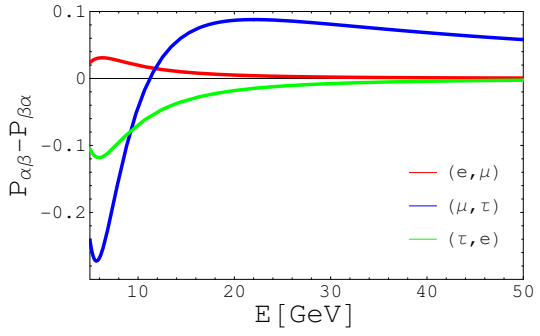


(a) T 非保存

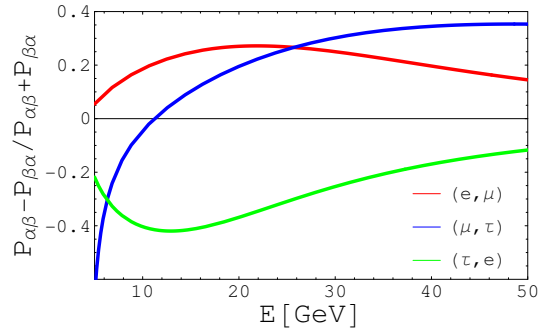


(b) T 非保存 / T 保存の非

図 4.15: $\delta_1 = 0, \delta_2 = \pi/2, \delta_3 = \pi$ の時の T 非保存、T 非保存 / T 保存の比

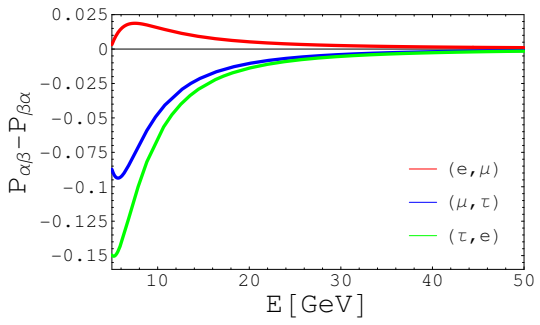


(a) T 非保存

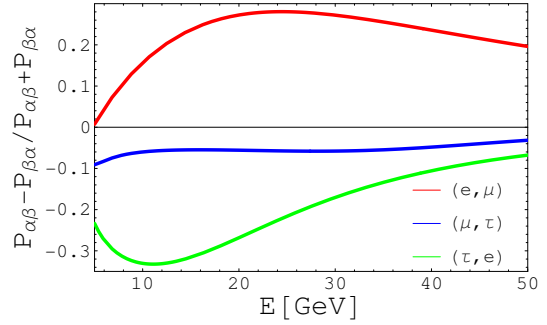


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.16: $\delta_1 = \pi, \delta_2 = \delta_3 = \pi/2$ の時の T 非保存、T 非保存/T 保存の比

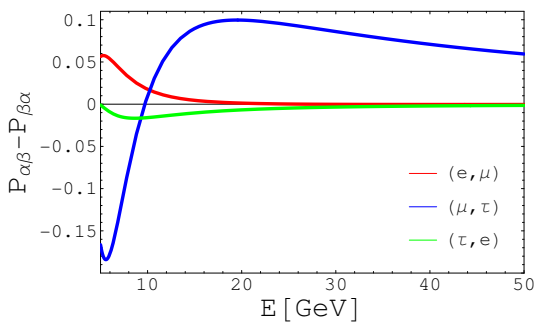


(a) T 非保存

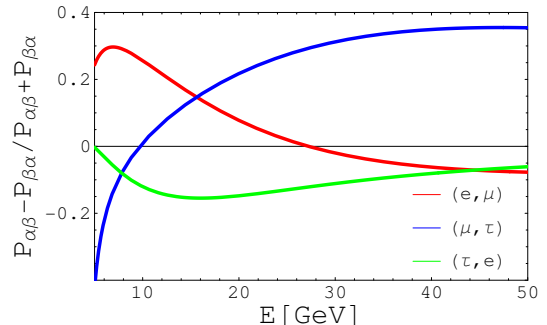


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.17: $\delta_1 = \delta_2 = \pi/2, \delta_3 = \pi$ の時の T 非保存、T 非保存/T 保存の比

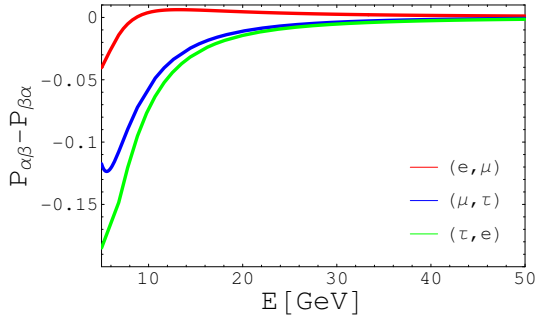


(a) T 非保存

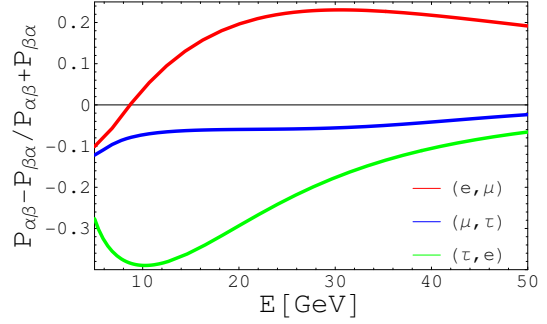


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.18: $\delta_1 = \delta_2 = \pi, \delta_3 = \pi/2$ の時の T 非保存、T 非保存/T 保存の比

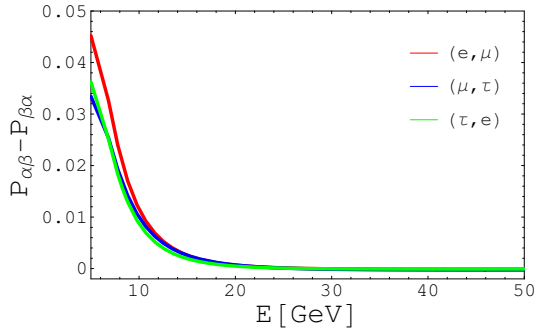


(a) T 非保存

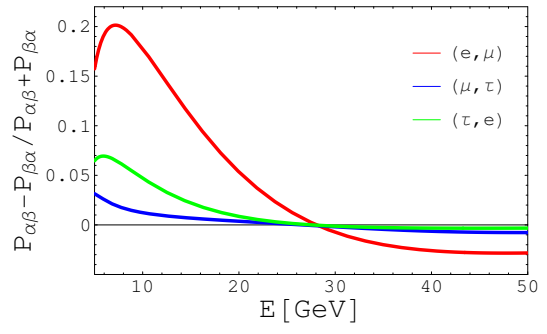


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.19: $\delta_1 = \pi, \delta_2 = \pi/2, \delta_3 = \pi$ の時の T 非保存、T 非保存/T 保存の比

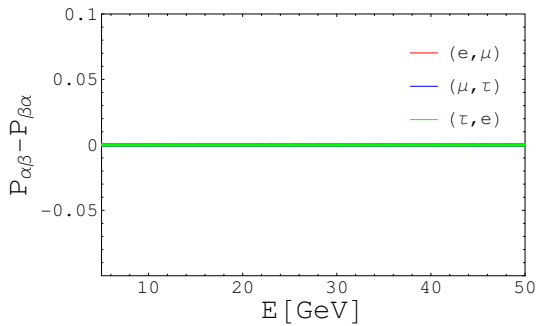


(a) T 非保存

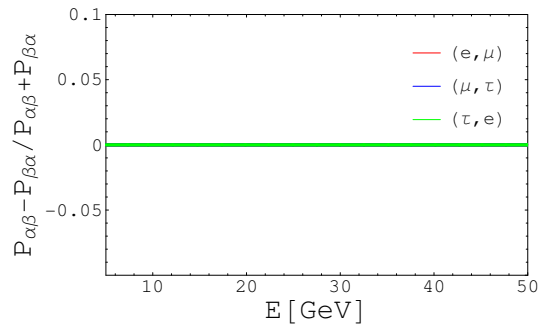


(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.20: $\delta_1 = \pi/2, \delta_2 = \delta_3 = \pi$ の時の T 非保存、T 非保存/T 保存の比



(a) T 非保存



(b) T 非保存/T 保存の非

図 4.21: $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (0, 0, 0), (\pi, 0, 0), (0, \pi, 0), (0, 0, \pi), (\pi, \pi, 0), (\pi, 0, \pi), (0, \pi, \pi), (\pi, \pi, \pi)$ の時の T 非保存、T 非保存/T 保存の比

第5章 結論

本研究の目的は、LSND 実験などから示唆されているステライルニュートリノの存在を仮定して、T 非保存の振る舞いを調べる事である。もしステライルニュートリノが存在すれば、CP 位相が3つあるためニュートリノの振動チャンネルによって振る舞いが異なる事が予想される。そこですべての振動チャンネルでのT 非保存の振る舞いを以下の状況ごとに調べた。

まず、短基線ニュートリノ振動実験の場合にT 非保存を計算すると、ゼロになってT 非保存の影響が見えない事が分かった。次に長基線ニュートリノ振動実験の場合を考えた。この場合は物質効果が無視できる場合と無視できない場合の2パターン考えられるので、まずは物質効果が無視できる場合の計算を行った。その結果、T 非保存の大きさは (μ, τ) チャンネルが一番大きくなったが、T 非保存/T 保存の比はこのチャンネルが一番小さくなる事が分かった。次に物質効果が無視できない場合の計算を行った。現在行われている人工的に作り出したニュートリノを使う実験では物質効果が無視できてしまうので、今回は将来計画として構想されているニュートリノファクトリー実験を想定し、T 非保存がどの様に振舞うのかを計算した。物質効果が無視できない場合のT 非保存を計算していくために、まず木村-高村-横枕の公式を使い物質中でのT 非保存・T 保存の解析的な計算を近似的にはあるが行い、定式化した。その上でT 非保存とT 非保存/T 保存の比をすべての振動チャンネルで計算した。結果として、ステライルニュートリノ由来のCP 位相を大きくしていくと、 (μ, τ) チャンネルがT 非保存とT 非保存/T 保存の比が大きくなり、他のチャンネルはT 非保存/T 保存の比が大きくてもT 非保存が小さくなるため、物質効果が無視できない場合、ステライルニュートリノの特徴を発見するためには (μ, τ) チャンネルが一番有効であることが分かった。

本研究の議論はあくまで定性的な議論にとどまった。しかし、ここから定量的な議論に移るためには、実際の実験のイベント数を見積もり、統計誤差・系統誤差を考慮したうえで解析する必要がある。そこで今後の展望としてはニュートリノファクトリー実験のイベント数を考え、誤差を考慮した解析、議論を行っていききたい。

謝辞

本研究を行うにあたり、いつでも議論、指導して下さった安田修先生に感謝いたします。また、研究を行いやすい環境を作ってくれた研究室のメンバーの皆様
に感謝申し上げます。そしてどんな時も暖かく見守り、励ましてくれた友人や家族に心より御礼を申し上げます。

付録A

A.1 (3 + 1) スキームの混合行列

ここでは(3 + 1) スキームの混合行列

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} & U_{e4} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} & U_{\mu4} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} & U_{\tau4} \\ U_{s1} & U_{s2} & U_{s3} & U_{s4} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

の各要素を、(3.3) 式のパラメータの取り方に従って記述しておく。

$$\begin{cases} U_{e1} = c_{12}c_{13}c_{14} \\ U_{e2} = c_{13}c_{14}s_{12}e^{-i\delta_1} \\ U_{e3} = c_{14}s_{13}e^{-i\delta_2} \\ U_{e4} = s_{14} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{cases} U_{\mu1} = -c_{23}c_{24}s_{12}e^{i\delta_1} - c_{12} \{c_{24}s_{13}s_{23}e^{i(\delta_2-\delta_3)} + c_{13}s_{14}s_{24}\} \\ U_{\mu2} = c_{12}c_{23}c_{24} - s_{12}e^{-i\delta_1} \{c_{24}s_{13}s_{23}e^{i(\delta_2-\delta_3)} + c_{13}s_{14}s_{24}\} \\ U_{\mu3} = c_{13}c_{24}s_{23}e^{-i\delta_3} - s_{13}s_{14}s_{24}e^{-i\delta_2} \\ U_{\mu4} = c_{14}s_{24} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{cases} U_{\tau1} = s_{12}e^{i\delta_1} (c_{34}s_{23}e^{i\delta_3} + c_{23}s_{24}s_{34}) \\ \quad - c_{12} \{c_{13}c_{24}s_{14}s_{34} + s_{13}e^{i\delta_2} (c_{23}c_{34} - s_{23}s_{24}s_{34}e^{-i\delta_3})\} \\ U_{\tau2} = -c_{12} (c_{34}s_{23}e^{i\delta_3} + c_{23}s_{24}s_{34}) \\ \quad - s_{12}e^{-i\delta_1} \{c_{13}c_{24}s_{14}s_{34} + s_{13}e^{i\delta_2} (c_{23}c_{34} - s_{23}s_{24}s_{34}e^{-i\delta_3})\} \\ U_{\tau3} = -c_{24}s_{13}s_{14}s_{34}e^{-i\delta_2} + c_{13} (c_{23}c_{34} - s_{23}s_{24}s_{34}e^{-i\delta_3}) \\ U_{\tau4} = c_{14}c_{24}s_{34} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{s1} = s_{12}e^{i\delta_1} (c_{23}c_{34}s_{24} - s_{23}s_{34}e^{i\delta_3}) \\ \quad - c_{12} \{ c_{13}c_{24}c_{34}s_{14} - s_{13}e^{i\delta_2} (c_{34}s_{23}s_{24}e^{-i\delta_3} - c_{23}s_{34}) \} \\ U_{s2} = -c_{12} (c_{23}c_{34}s_{24} - s_{23}s_{34}e^{i\delta_3}) \\ \quad - s_{12}e^{-i\delta_1} \{ c_{13}c_{24}c_{34}s_{14} - s_{13}e^{i\delta_2} (c_{34}s_{23}s_{24}e^{-i\delta_3} + c_{23}s_{34}) \} \\ U_{s3} = -c_{24}c_{34}s_{13}s_{14}e^{-i\delta_2} - c_{13} (c_{34}s_{23}s_{24}e^{-i\delta_3} + c_{23}s_{34}) \\ U_{s4} = c_{14}c_{24}c_{34} \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

A.2 (4.61) ~ (4.63) 式、(4.65) ~ (4.67) 式の中身の計算

ここでは(4.61) ~ (4.63) 式、(4.65) ~ (4.67) 式にあった $\text{Im}(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*})$ や $\text{Re}(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*})$ などの未評価の項を示しておく。

まず、T非保存項((4.61) ~ (4.63) 式) にあった未評価の式の計算結果は、以下の様になる。

$$\text{Im} (X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*}) = -\Delta E_{31} \text{Im} (X_3^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*}) - \Delta E_{21} \text{Im} (X_2^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*}) \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \text{Im} (X_4^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*}) &= \Delta E_{31} \left(\Delta E_{31} + A\delta_{\alpha e} + \frac{A}{2}\delta_{\alpha s} + A\delta_{\beta e} + \frac{A}{2}\delta_{\beta s} \right) \text{Im} (X_3^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*}) \\ &\quad + \Delta E_{21} \left(\Delta E_{21} + A\delta_{\alpha e} + \frac{A}{2}\delta_{\alpha s} + A\delta_{\beta e} + \frac{A}{2}\delta_{\beta s} \right) \text{Im} (X_2^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*}) \\ &\quad + A\Delta E_{31} \text{Im} (X_4^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta*}) + A\Delta E_{21} \text{Im} (X_4^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta*}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$\text{Im}(P^{\alpha\beta}Q^{\alpha\beta*})$ は場合分けして以下に示す。

$$\begin{aligned}
\text{Im}(P^{\alpha\beta}Q^{\alpha\beta*}) &= A\Delta E_{31}^2 \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} - 1 \right) \text{Im}(X_3^{\alpha\beta}X_4^{\alpha\beta*}) \\
&+ A^2\Delta E_{31} \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} - 1 \right) \text{Im}(X_4^{\alpha\beta}R^{\alpha\beta*}) \\
&+ A\Delta E_{21}^2 \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} - 1 \right) \text{Im}(X_2^{\alpha\beta}X_4^{\alpha\beta*}) \\
&+ A^2\Delta E_{21} \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} - 1 \right) \text{Im}(X_4^{\alpha\beta}S^{\alpha\beta*}) \\
&+ A\Delta E_{31}^2 \text{Im}(X_3^{\alpha\beta}R^{\alpha\beta*}) + A\Delta E_{21}^2 \text{Im}(X_2^{\alpha\beta}S^{\alpha\beta*}) \\
&+ A\Delta E_{21}\Delta E_{31} \left\{ \text{Im}(X_3^{\alpha\beta}S^{\alpha\beta*}) + \text{Im}(X_2^{\alpha\beta}R^{\alpha\beta*}) \right\} \\
&- \Delta E_{21}\Delta E_{31}\Delta E_{32} \text{Im}(X_2^{\alpha\beta}X_3^{\alpha\beta*}) \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$((\alpha, \beta) = (e, \mu), (\tau, e) \text{ のとき})$

$$\begin{aligned}
\text{Im}(P^{\mu\tau}Q^{\mu\tau*}) &= A\Delta E_{31}^2 \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} \right) \text{Im}(X_3^{\mu\tau}X_4^{\mu\tau*}) \\
&+ A^2\Delta E_{31} \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} \right) \text{Im}(X_4^{\mu\tau}R^{\mu\tau*}) \\
&+ A\Delta E_{21}^2 \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} \right) \text{Im}(X_2^{\mu\tau}X_4^{\mu\tau*}) \\
&+ A^2\Delta E_{21} \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} \right) \text{Im}(X_4^{\mu\tau}S^{\mu\tau*}) \\
&+ A\Delta E_{31}^2 \text{Im}(X_3^{\mu\tau}R^{\mu\tau*}) + A\Delta E_{21}^2 \text{Im}(X_2^{\mu\tau}S^{\mu\tau*}) \\
&+ A\Delta E_{21}\Delta E_{31} \left\{ \text{Im}(X_3^{\mu\tau}S^{\mu\tau*}) + \text{Im}(X_2^{\mu\tau}R^{\mu\tau*}) \right\} \\
&- \Delta E_{21}\Delta E_{31}\Delta E_{32} \text{Im}(X_2^{\mu\tau}X_3^{\mu\tau*}) \tag{A.9}
\end{aligned}$$

$((\alpha, \beta) = (\mu, \tau) \text{ のとき})$

ここで、(A.8)、(A.9) 式の一番最後の項が3世代の効果を表していて、 $\theta_{i4} \rightarrow 0 (i = 1, 2, 3)$ の極限をとれば3世代の結果と一致する。また、(A.7)、(A.8)、(A.9) 式の中の $\text{Im}(X_4^{\alpha\beta}S^{\alpha\beta*})$ などの未評価の項は、(4.58)、(4.59) 式から分かるように、全て混合行列の要素で書ける。

以上から、(4.61) ~ (4.63) 式に (A.6) ~ (A.9) 式を代入したものを (4.60) 式に適用してやり、混合行列の要素や (4.37) ~ (4.40) 式のエネルギー固有値を用いれば物質中での T 非保存を求める事ができる。

次に、T 保存項 ((4.65) ~ (4.67) 式) にあった未評価の式の計算結果は以下の様に

なる。

$$\begin{aligned}
|P^{\alpha\beta}|^2 &= A^2 \left\{ \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) - \delta_{\alpha e} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha s} - \delta_{\beta e} - \frac{1}{2} \delta_{\beta s} \right\}^2 |U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2 \\
&\quad + 2A \left\{ \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) - \delta_{\alpha e} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha s} - \delta_{\beta e} - \frac{1}{2} \delta_{\beta s} \right\} \\
&\quad \quad \times \left\{ \Delta E_{31} \operatorname{Re} \left(X_3^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) + \Delta E_{21} \operatorname{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \right\} \\
&\quad + \Delta E_{31}^2 |U_{\alpha 3}|^2 |U_{\beta 3}|^2 + \Delta E_{21}^2 |U_{\alpha 2}|^2 |U_{\beta 2}|^2 \\
&\quad + 2\Delta E_{21} \Delta E_{31} \operatorname{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} X_3^{\alpha\beta*} \right) \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Q^{\alpha\beta}|^2 &= A^4 \left\{ 1 - \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) \right\}^2 |U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2 \\
&\quad - 2A^2 \Delta E_{31} (\Delta E_{31} + A) \left\{ 1 - \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) \right\} \operatorname{Re} \left(X_3^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \\
&\quad - 2A^2 \Delta E_{21} (\Delta E_{21} + A) \left\{ 1 - \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) \right\} \operatorname{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \\
&\quad + 2A^3 \Delta E_{31} \left\{ 1 - \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) \right\} \operatorname{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta*} \right) \\
&\quad + 2A^3 \Delta E_{21} \left\{ 1 - \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) \right\} \operatorname{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta*} \right) \\
&\quad + \Delta E_{31}^2 (\Delta E_{31} + A)^2 |U_{\alpha 3}|^2 |U_{\beta 3}|^2 \\
&\quad + 2\Delta E_{21} \Delta E_{31} (\Delta E_{21} + A) (\Delta E_{31} + A) \operatorname{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} X_3^{\alpha\beta*} \right) \\
&\quad - 2A \Delta E_{31}^2 (\Delta E_{31} + A) \operatorname{Re} \left(X_3^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta*} \right) \\
&\quad - 2A \Delta E_{21} \Delta E_{31} (\Delta E_{31} + A) \operatorname{Re} \left(X_3^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta*} \right) \\
&\quad + \Delta E_{21}^2 (\Delta E_{21} + A)^2 |U_{\alpha 2}|^2 |U_{\beta 2}|^2 \\
&\quad - 2A \Delta E_{21} \Delta E_{31} (\Delta E_{21} + A) \operatorname{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta*} \right) \\
&\quad - 2A \Delta E_{21}^2 (\Delta E_{21} + A) \operatorname{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta*} \right) \tag{A.11} \\
&\quad \quad \quad ((\alpha, \beta) = (e, \mu), (\tau, e) \text{ のとき})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Q^{\mu\tau}|^2 &= \Delta E_{31}^4 |U_{\mu 3}|^2 |U_{\tau 3}|^2 + 2\Delta E_{21}^2 \Delta E_{31}^2 \operatorname{Re} \left(X_2^{\mu\tau} X_3^{\mu\tau*} \right) \\
&\quad - 2A \Delta E_{31}^3 \operatorname{Re} \left(X_3^{\mu\tau} R^{\mu\tau*} \right) - 2A \Delta E_{21} \Delta E_{31}^2 \operatorname{Re} \left(X_3^{\mu\tau} S^{\mu\tau*} \right) \\
&\quad + \Delta E_{21}^4 |U_{\mu 2}|^2 |U_{\tau 2}|^2 - 2A \Delta E_{21}^2 \Delta E_{31} \operatorname{Re} \left(X_2^{\mu\tau} R^{\mu\tau*} \right) \\
&\quad - 2A \Delta E_{21}^3 \operatorname{Re} \left(X_2^{\mu\tau} S^{\mu\tau*} \right) \tag{A.12} \\
&\quad \quad \quad ((\alpha, \beta) = (\mu, \tau) \text{ のとき})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta*} \right) &= A \left\{ \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) - \delta_{\alpha e} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha s} - \delta_{\beta e} - \frac{1}{2} \delta_{\beta s} \right\} |U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2 \\ &\quad + \Delta E_{31} \text{Re} \left(X_3^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) + \Delta E_{21} \text{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*} \right) &= A^2 \left\{ \delta_{\alpha e} + \frac{1}{4} \delta_{\alpha s} + \delta_{\beta e} + \frac{1}{4} \delta_{\beta s} + \left(\delta_{\alpha e} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha s} \right) \left(\delta_{\beta e} + \frac{1}{2} \delta_{\beta s} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\delta_{\alpha e} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha s} + \delta_{\beta e} + \frac{1}{2} \delta_{\beta s} \right) \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) \right\} |U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2 \\ &\quad - \Delta E_{31} \left(\Delta E_{31} + A \delta_{\alpha e} + \frac{A}{2} \delta_{\alpha s} + A \delta_{\beta e} + \frac{A}{2} \delta_{\beta s} \right) \text{Re} \left(X_3^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad - \Delta E_{21} \left(\Delta E_{21} + A \delta_{\alpha e} + \frac{A}{2} \delta_{\alpha s} + A \delta_{\beta e} + \frac{A}{2} \delta_{\beta s} \right) \text{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad + A \Delta E_{31} \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta*} \right) + A \Delta E_{21} \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta*} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(P^{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta*} \right) &= -A^3 \left\{ \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) - 1 \right\}^2 |U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2 \\ &\quad - A \Delta E_{31} (\Delta E_{31} + 2A) \left\{ \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) - 1 \right\} \text{Re} \left(X_3^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad - A \Delta E_{21} (\Delta E_{21} + 2A) \left\{ \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) - 1 \right\} \text{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} X_4^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad + A^2 \Delta E_{31} \left\{ \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) - 1 \right\} \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad + A^2 \Delta E_{21} \left\{ \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2} X_4^{ss} \right) - 1 \right\} \text{Re} \left(X_4^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad - \Delta E_{31}^2 (\Delta E_{31} + A) |U_{\alpha 3}|^2 |U_{\beta 3}|^2 \\ &\quad - \Delta E_{21} \Delta E_{31} (\Delta E_{21} + \Delta E_{31} + 2A) \text{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} X_3^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad + A \Delta E_{31}^2 \text{Re} \left(X_3^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta*} \right) + A \Delta E_{21} \Delta E_{31} \text{Re} \left(X_3^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta*} \right) \\ &\quad - \Delta E_{21}^2 (\Delta E_{21} + A) |U_{\alpha 2}|^2 |U_{\beta 2}|^2 \\ &\quad + A \Delta E_{21} \Delta E_{31} \text{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta*} \right) + A \Delta E_{21}^2 \text{Re} \left(X_2^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta*} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

((α, β) = (e, μ), (τ, e) のとき)

$$\begin{aligned}
\text{Re}(P^{\mu\tau}Q^{\mu\tau*}) &= -A\Delta E_{31}^2 \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} \right) \text{Re}(X_3^{\mu\tau}X_4^{\mu\tau*}) \\
&\quad - A\Delta E_{21}^2 \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} \right) \text{Re}(X_2^{\mu\tau}X_4^{\mu\tau*}) \\
&\quad + A^2\Delta E_{31} \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} \right) \text{Re}(X_4^{\mu\tau}R^{\mu\tau*}) \\
&\quad + A^2\Delta E_{21} \left(X_4^{ee} + \frac{1}{2}X_4^{ss} \right) \text{Re}(X_4^{\mu\tau}S^{\mu\tau*}) \\
&\quad - \Delta E_{31}^3 |U_{\mu 3}|^2 |U_{\tau 3}|^2 \\
&\quad - \Delta E_{21}\Delta E_{31} (\Delta E_{21} + \Delta E_{31}) \text{Re}(X_2^{\mu\tau}X_3^{\mu\tau*}) \\
&\quad + A\Delta E_{31}^2 \text{Re}(X_3^{\mu\tau}R^{\mu\tau*}) + A\Delta E_{21}\Delta E_{31} \text{Re}(X_3^{\mu\tau}S^{\mu\tau*}) \\
&\quad - \Delta E_{21}^3 |U_{\mu 2}|^2 |U_{\tau 2}|^2 \\
&\quad + A\Delta E_{21}\Delta E_{31} \text{Re}(X_2^{\mu\tau}R^{\mu\tau*}) + A\Delta E_{21}^2 \text{Re}(X_2^{\mu\tau}S^{\mu\tau*}) \quad (\text{A.16}) \\
&\quad \quad \quad ((\alpha, \beta) = (\mu, \tau) \text{ のとき})
\end{aligned}$$

これで先ほどと同じように全て混合行列の要素とエネルギー固有値で書くことができたので、それらを代入すれば物質中でのT保存項を求める事が出来る。また、(A.10) ~ (A.17) 式中出现してくる $\text{Re}(X_2^{\alpha\beta}X_3^{\alpha\beta*})$ がやはり三世代の効果を表している。

関連図書

- [1] K. Kimura, A. Takamura and H. Yokomakura, Phys.Lett. B **537** (2002) 86-94 [arXiv:hep-ph/0203099]
- [2] Osamu Yasuda, arXiv:0704.1531 [hep-ph]
- [3] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo and A. M. Rotunno, Phys.Rev. D **84** (2011) 053007 [arXiv:1106.6028 [hep-ph]]
- [4] A. Donini, K. Fuki, J. Lopez-Pavon, D. Meloni and O. Yasuda, JHEP **0908** (2009) 041 [arXiv:0812.3703 [hep-ph]]
- [5] M. Maltoni, T. Schwetz, M. Tortola and J. W. F. Valle, New J.Phys. **6** (2004) 122 [arXiv:hep-ph/0405172]
- [6] A. A. Aguilar-Alevalo et al. [The MiniBooNE Collaboration], Phys.Rev.Lett. **105** (2010) 181801 [arXiv:1007.1150 [hep-ex]]
- [7] G. Mention, M. Fechner, Th. Lasserre, Th. A. Mueller, D. Lhuillier, M. Cribier and A. Letourneau, Phys.Rev. D**83** (2011) 073006 [arXiv:1101.2755 [hep-ex]]
- [8] A. Donini, M. Maltoni, D. Meloni, P. Migliozzi and F. Terranova, JHEP **0712** (2007) 013 [arXiv:0704.0388 [hep-ph]]
- [9] Osamu Yasuda, arXiv:1004.2388 [hep-ph]